

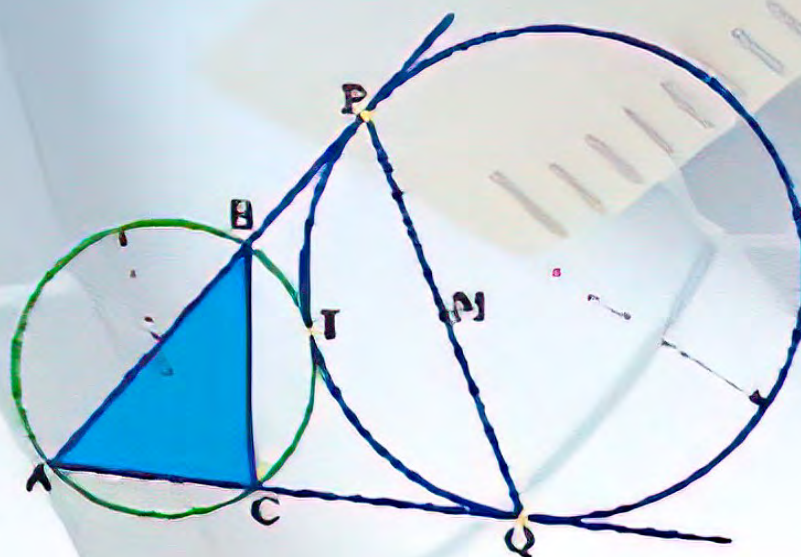
7 GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



En el gráfico E , Q y T son puntos de tangencia
y $MP > MQ$. ¿Qué punto notable es M
del triángulo ABC ?

GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

220 Problemas Resueltos

220 Problemas Propuestos

*Incluye Problemas
de Olimpiadas*

JULIO ORIHUELA BASTIDAS


CUZCAN
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES

Autor : Julio César Orihuela Bastidas

© **Titular de la obra:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

Diseño y diagramación: Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

© **Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Página web: www.editorialcuzcano.com.pe

Primera edición : setiembre 2018

Tiraje : 1 000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2018-14510

Prohibida la reproducción de esta obra por cualquier medio, total o parcialmente.
Derechos reservados D.Leg. N°822

Distribución y ventas al por mayor y menor

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L. en el mes de octubre de 2018

Jr. Coricancha N°675 Urb. Zárate S.J.L.
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña Lima - Perú
Teléfono 423-8154

Introducción

El presente trabajo sobre Puntos Notables es producto de mucho tiempo de dedicación, así como una constante búsqueda de material bibliográfico, del mismo modo consulta a profesores y estudiantes, a los cuales va mi reconocimiento.

El contenido va dirigido principalmente a un público preuniversitario, pero dados los temas abarcados, puede también ser útil como preparación preolímpica o material de consulta de algunos profesores.

Se da inicio a la obra con una lista de los términos mas empleados en Geometría; se pasa luego a la definición de cada punto notable, se describe cada uno de ellos y se pasa enseguida a las demostraciones de las concurrencias y teoremas. Se da en algunos casos más de una demostración, los cuales pueden ser considerados, como guías, mas no son las únicas, ni las mejores, el lector debe intentarlo previamente y encontrará también nuevas formas.

En una segunda parte, estudiamos con todas sus demostraciones, otros puntos notables y los temas denominados como selectos, el cual va dirigido a un público con mayor experiencia, es cierto que algunos temas aquí desarrollados no son motivo de preguntas de examen de admisión, se creyó conveniente incluirlo, por la constante búsqueda de dar respuesta a muchas interrogantes. En esa búsqueda se incluyó en algunos casos la inclusión de otros temas como: semejanza, relaciones métricas y áreas; algunos temas nuevos como homotecia, inducción en la geometría e inversión, los cuales se explican brevemente.

La demostración dada al final, sobre el teorema de Morley, se desarrolla sólo con herramientas de geometría Euclídeana.

En cuanto al desarrollo de los problemas, se resalta la clasificación de problemas: tipo anual, semestral, semestral intensivo y repaso, así como también se han incluido problemas del Cepre Uni, se presenta de esta forma con el objetivo de que el estudiante pueda ubicarse según el ciclo que se encuentre y a su vez que vaya avanzando.

Se ha incluido también un grupo de problemas tomados de diferentes Olimpiadas Internacionales, con la finalidad de que el estudiante avance a mayores niveles cada vez.

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
 - A los profesores: Renzo Pardo, Jesús Silva, Luis Saavedra.
Moisés Rayme, Richard Huamani y César Trucios.
 - A todos mis alumnos de las distintas instituciones educativas.
-

Dedicatoria

A mis padres Moisés y Margarita

◆ PUNTOS NOTABLES

Pág.

INTRODUCCIÓN

1.- Terminología	7
2.- Definición	11
3.- Puntos notables asociados al triángulo	12
- Incentro	
- Excentro	
- Circuncentro	
- Ortocentro	
- Baricentro	
4.- Demostraciones de las concurrencias	14
5.- Circunferencias inscrita, exinscrita y circunscrita al triángulo	19
6.- Teoremas fundamentales	21
7.- Criterios para identificar los puntos notables	25
8.- Teoremas asociados a los puntos notables	40
- Teorema de Nagel	
- Teorema de Steiner	
- Teorema de Carnot	
- Teorema de Poncelet	
- Teorema de Pitot y recíprocos	
- Teorema de Steiner y recíprocos	
9.- Triángulos especiales	61
- Triángulo mediano	
- Triángulo órtico	
- Triángulo exincentral	
- Triángulo tangencial	
- Triángulo de contacto exterior	
- Triángulo incentrico	
- Triángulo pedal o podar	
- Triángulo ceviano	
10.- Teoremas sobre triángulos especiales	65
- Otros triángulos especiales	
- Triángulo anticeviano	
- Triángulo intangencial	
- Triángulo extangencial	
11.- Rectas notables	73
- Rectas paralelas	
- Rectas antiparalelas	
- Rectas isogonales	
- Rectas isotómicas	
- Recta de Simson-Wallace	
- Recta de Euler	
- Recta de Steiner	
- Recta de Housel	
- Recta de Nagel	

	Pág.
12.- Circunferencia de los nueve puntos	86
- Teoremas sobre la circunferencia de los nueve puntos	
- Teorema de Fevrierbach	
13.- Otros puntos notables	96
- Punto de Georgonne	
- Punto de Nagel	
- Punto de Poncelet	
- Puntos conjugados isotómicos	
- Punto Simediado o de Lemoine	
- Punto Exmediano	
- Punto Exsimediano	
- Punto de Brocard	
- Punto de Spieker	
- Punto de Miquel	
- Punto de Steiner	
- Punto de Tarry	
- Puntos de Jerabek	
- Punto de Fermat - Torricelli	
- Segundo punto de Fermat	
14.- Circunferencias notables	122
- Circunferencia de Mannheim	
- Circunferencia de Conway	
- Circunferencia de Adamas	
- Circunferencia de Taylor	
- Circunferencia Pedal	
- Circunferencia de los cinco puntos	
- Circunferencia de los ocho puntos	
- Circunferencia de Brocard	
- Circunferencia de Lemoine	
- Segunda circunferencia de Lemoine	
- Circunferencia de Steiner	
15.- Temas selectos	140
- Teorema de Loriga	
- Demostración de la recta de Houssel	
- Demostración de la recta de Nagel	
- Teorema de Napoleón	
- Teorema de Fagnano	
- Primer teorema japonés	
- Lugares geométricos	
- Centro de gravedad de un triángulo	
- Inducción en la geometría	
- Baricentro de un polígono	
- Circunferencia de Euler de polígonos inscritos	
- Homotecia	
- Demostración de la circunferencia de los nueve puntos	
- Inversión	
- Demostración del teorema de Feuerbach	
- Teorema de Morley	
♦ PROBLEMAS RESUELTOS	187
♦ PROBLEMAS PROPUESTOS	301
♦ CLAVES	

PUNTOS NOTABLES

GEOMETRÍA

Objetivos :

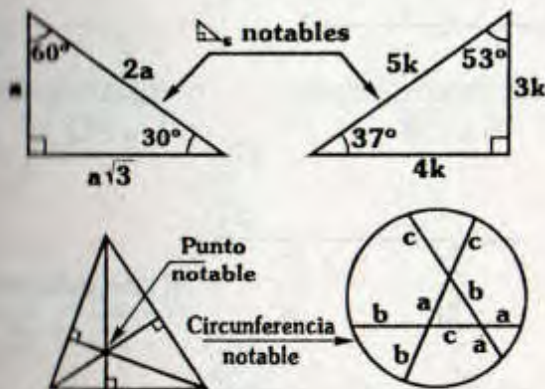
- Conocer la definición de cada punto notable, así como su ubicación según el tipo de triángulo.
- Estudiar los teoremas y características relacionadas a los puntos notables y analizar los teoremas recíprocos.
- Identificar diferentes formas de concurrencia en diversas figuras.
- Impulsar en el estudiante la investigación y el deseo de profundizar cada tema, así como su relación con otros temas.

1. TERMINOLOGÍA

Con el afán de hacer más comprensible la presente obra, se va a utilizar la siguiente terminología :

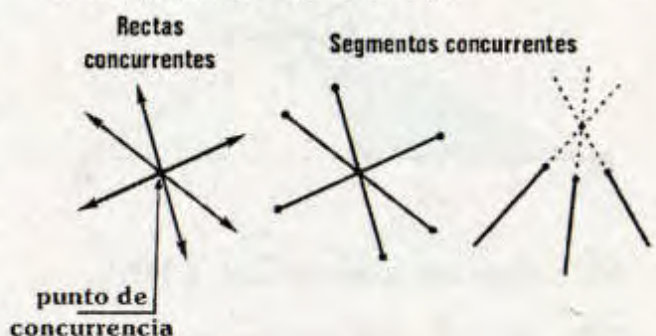
NOTABLE:

Digno de atención debido a las propiedades que posee, por ejemplo:



CONCURRENCIA:

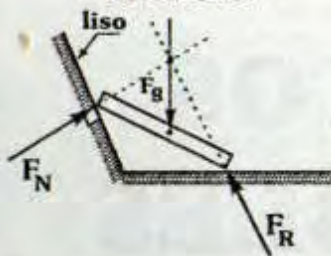
Tres o más líneas son concurrentes cuando pasan por un mismo punto o si alguna(s) de las prolongaciones tienen un punto en común .



Curvas concurrentes



Fuerzas concurrentes



PROLONGACIÓN DE UN SEGMENTO:

Prolongación de \overline{BA}

Prolongación de \overline{AB}



BISECAR UN SEGMENTO:

Es cortar a un segmento en su punto medio, por ejemplo la mediatriz de un segmento lo biseca, las diagonales de un paralelogramo se bisecan, etc.

NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO:

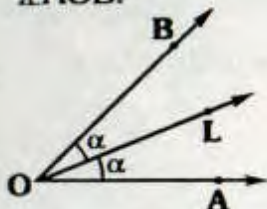
Generalmente se considera como la clasificación por las medidas angulares (triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo).

DISTANCIA:

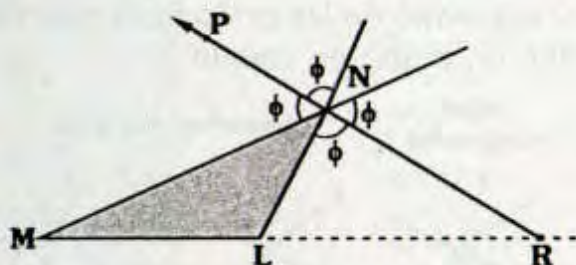
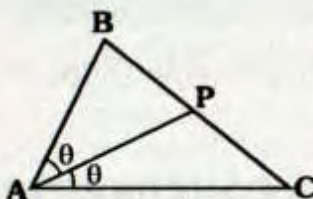
BISECTRIZ:

Consideremos los siguientes casos :

El rayo OL , es bisectriz del $\angle AOB$.

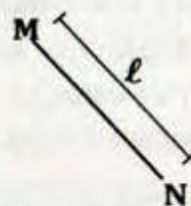


\overline{AP} es bisectriz interior del $\triangle ABC$.

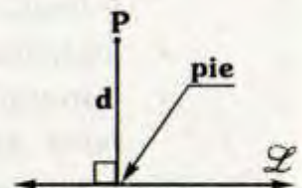


\overline{NR} : Bisectriz exterior del $\triangle MNL$.

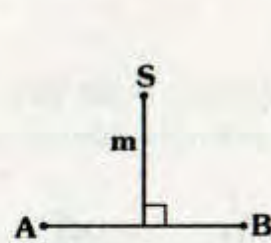
\overrightarrow{NP} : Bisectriz del ángulo exterior en N.



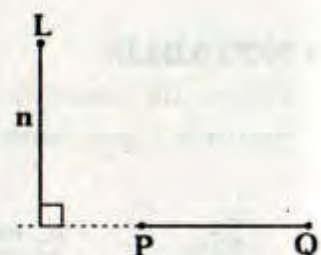
l : Distancia entre M y N.



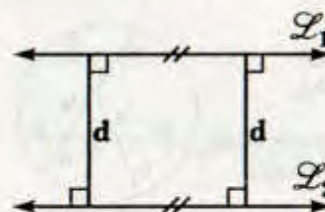
d : distancia entre P y \overleftrightarrow{L}



m : distancia entre S y \overline{AB}



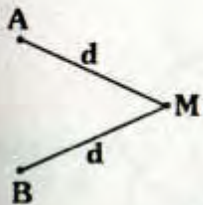
n : distancia entre L y \overline{PQ}



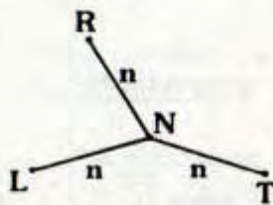
d : distancia entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$

EQUIDISTAR:

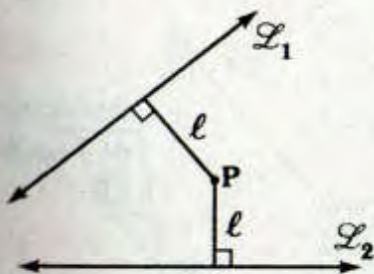
"M" equidista de A y B.



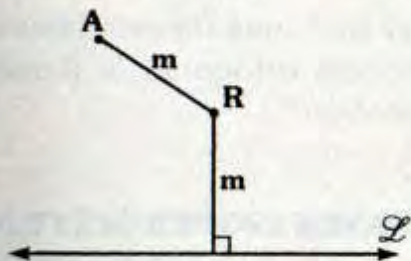
"N" equidista de R, L y T.



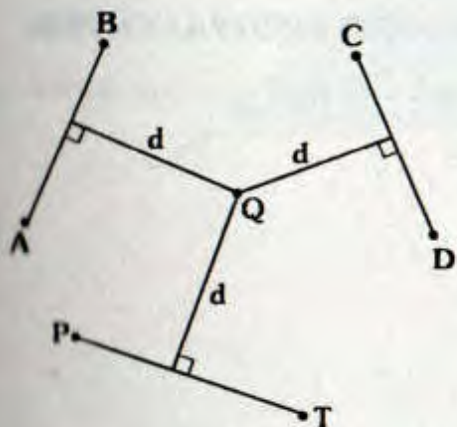
"P" equidista de \vec{L}_1 y \vec{L}_2 .



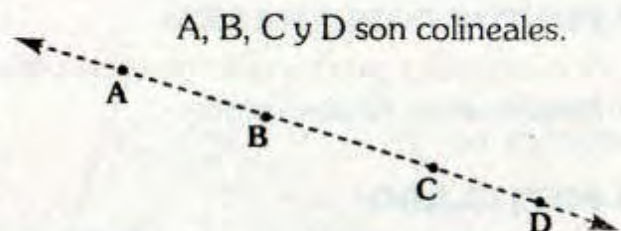
"R" equidista de A y \vec{L}



"Q" equidista de \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{PT} .

**PUNTOS COLINEALES:**

Tres o más puntos son colineales cuando pueden pertenecer a una misma recta.

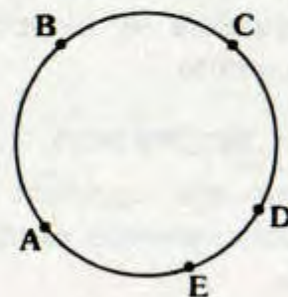


A, B, C y D son colineales.

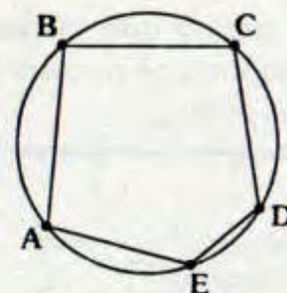
PUNTOS CÍCLICOS:

También llamados aferentes. Tres o más puntos son cíclicos cuando pertenecen a una misma circunferencia. Al polígono que resulta de unir consecutivamente dichos puntos se le denomina polígono inscrito o cíclico.

A, B, C, D y E son puntos cíclicos.



ABCDE: es un pentágono inscrito.



■ **PUNTOS CONCÍCLICOS:**

Tres o más puntos son concíclicos cuando pueden pertenecer a una misma circunferencia.

■ **PUNTOS COPLANARES:**

Son aquellos puntos que pueden pertenecer a un mismo plano.

■ **POSTULADO:**

Es una proposición que se admite sin demostración

■ **TEOREMA RECÍPROCO:**

Un teorema es recíproco cuando tiene por hipótesis la conclusión y por conclusión la hipótesis de un teorema dado.

➤ *Ejemplo:*

TEOREMA:

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

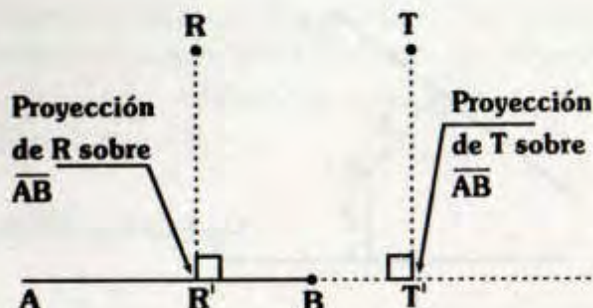
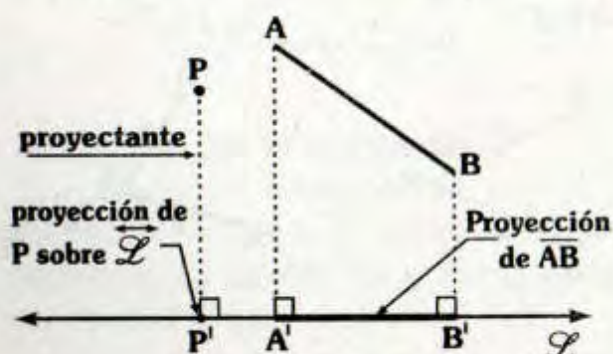
TEOREMA RECÍPROCO:

Todo punto que equidista de los extremos del segmento pertenece a la mediatriz.

Observación

Tener en cuenta que el recíproco de todo teorema no necesariamente es verdadero.

■ **PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UNA RECTA:**



Para el tema que desarrollaremos a la proyección ortogonal la llamaremos "proyección".

■ **REGIONES ISOPERIMÉTRICAS**

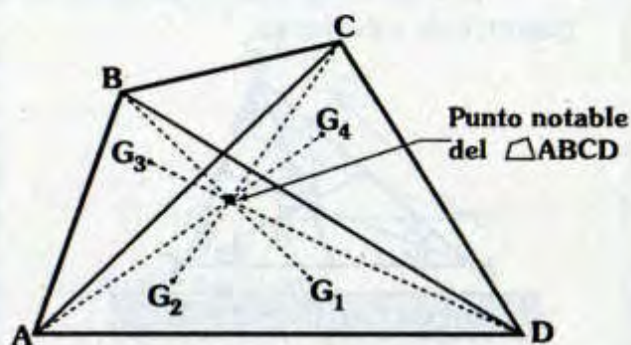
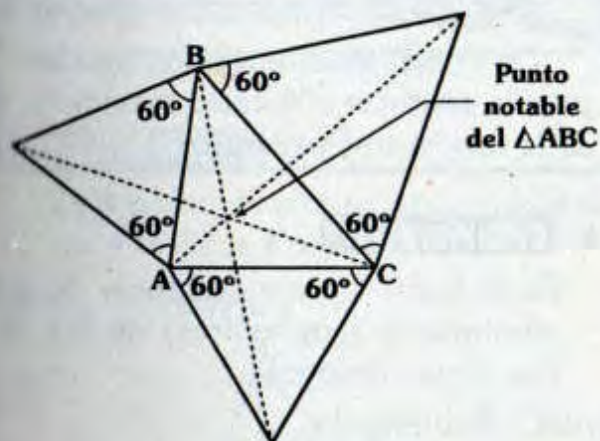
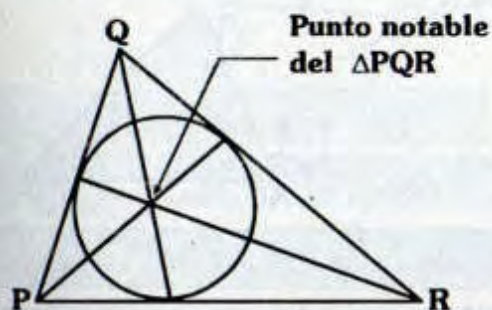
Son aquellas regiones que tienen igual perímetro.

■ **REGIONES EQUIVALENTES:**

Son aquellas regiones que tienen igual área.

2. DEFINICIÓN

Es el punto o puntos de concurrencia de líneas (segmentos, rectas o curvas) sometidas a la misma definición.



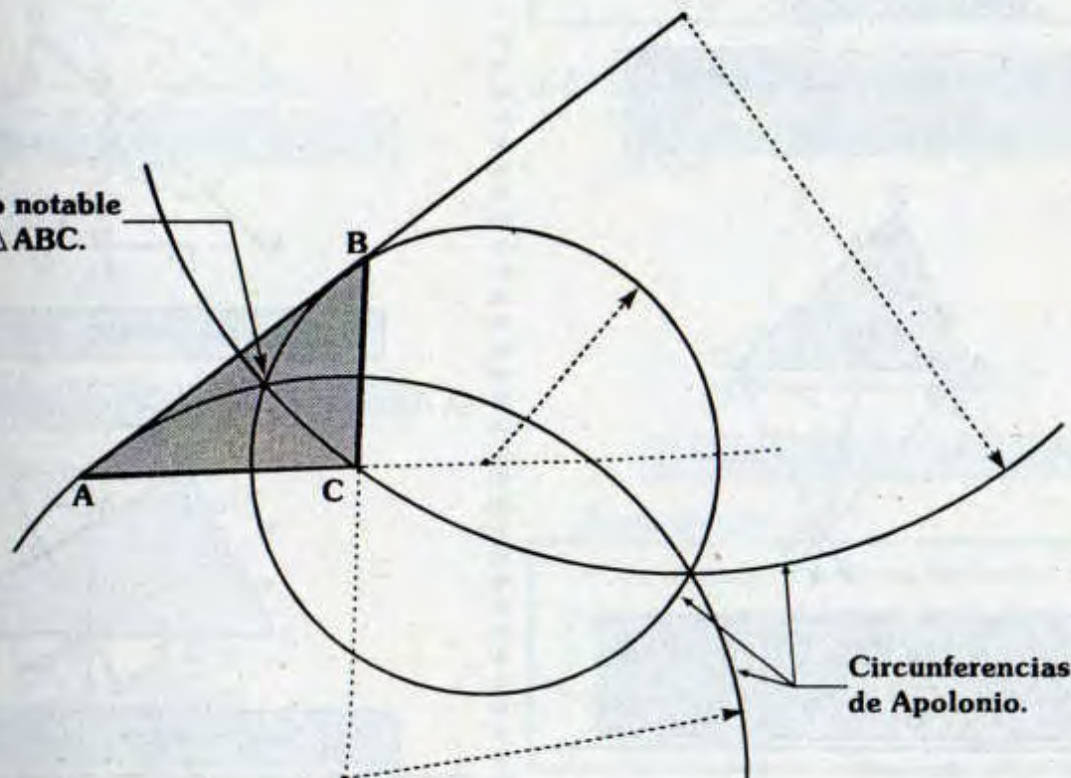
G_1 : Baricentro del $\triangle ACD$.

G_2 : Baricentro del $\triangle ABD$.

G_3 : Baricentro del $\triangle ABC$.

G_4 : Baricentro del $\triangle BCD$.

Punto notable del $\triangle ABC$.

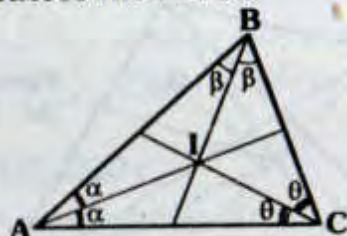


3. PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

En esta primera parte estudiaremos los puntos notables más comunes.

3.1. INCENTRO⁽¹⁾

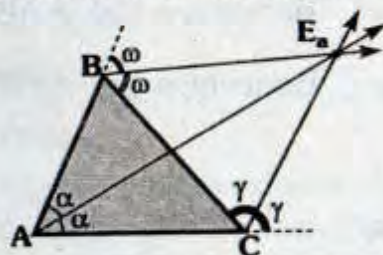
Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores.



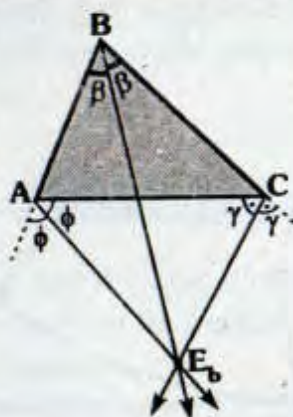
I: Incentro del $\triangle ABC$.

3.2. EXCENTRO⁽²⁾

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior.



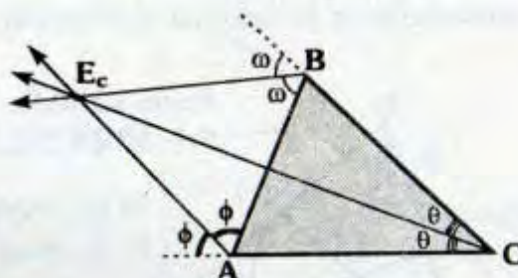
E_a : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a \overline{BC} .



E_b : Excentro del $\triangle ABC$, relativo \overline{AC} .

(1) Del latín, In: dentro de

(2) Del latín, Ex: fuera de



E_c : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a \overline{AB} .

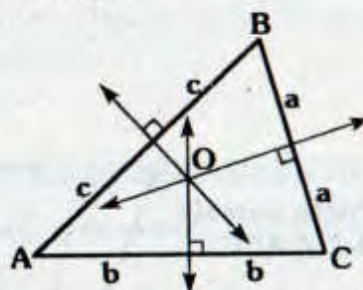
Nota

De lo expuesto anteriormente se puede asegurar: "A todo triángulo se le asocia tres excentros".

3.3. CIRCUNCENTRO⁽¹⁾

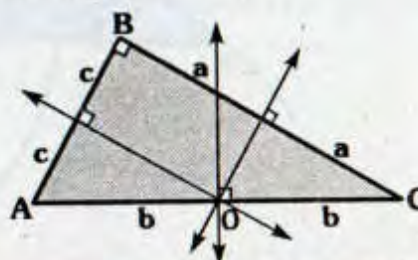
Es el punto de concurrencia de las mediatrices (coplanares) de los lados de un triángulo.

$\triangle ABC$: Acutángulo



O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

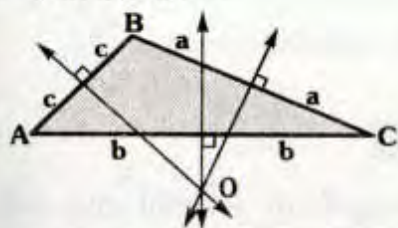
$\triangle ABC$: Rectángulo



O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

(1) Del latín, Circun: alrededor de

ΔABC : Obtusángulo



O: Circuncentro del ΔABC .

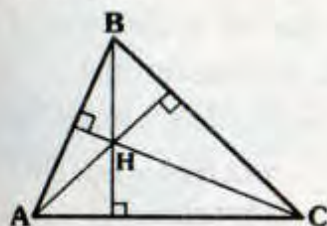
Nota

De lo anterior nos podemos dar cuenta que la ubicación del circuncentro (dentro, en o fuera del triángulo) depende de la naturaleza del triángulo.

3.4. ORTOCENTRO⁽²⁾

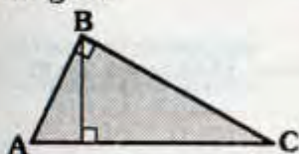
Es el punto de concurrencia de las alturas (o de sus prolongaciones).

ΔABC : Acutángulo



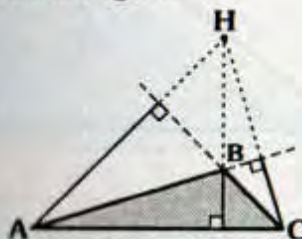
H: Ortocentro del ΔABC .

ΔABC : Rectángulo



B: Ortocentro del ΔABC .

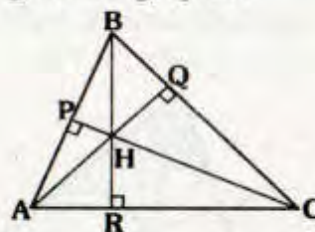
ΔABC : Obtusángulo



H: Ortocentro del ΔABC .

Nota

- Así como el circuncentro la ubicación del ortocentro depende de la naturaleza del triángulo.
- Del siguiente gráfico:

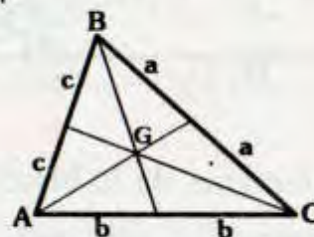


Se puede asegurar:

- H: Ortocentro del ΔABC .
- A: Ortocentro del ΔBHC .
- B: Ortocentro del ΔAHC .
- C: Ortocentro del ΔAHB .
- P: Ortocentro de los triángulos APH, APC, BPH y BPC.
- Q: Ortocentro de los triángulos BQH, BQA, HQC y AQC.
- R: Ortocentro de los triángulos ARH, ARB, HRC y BRC.

3.5. BARICENTRO⁽¹⁾

Es el punto de concurrencia de las medianas.



G: Baricentro del ΔABC

Importante:

De los puntos mencionados hemos visto que son **siempre interiores** el incentro y baricentro, son **exteriores** los excen-tros; y dependiendo de la naturaleza del triángulo el circuncentro y ortocentro.

(1) Del latín, Orto: recto, vertical

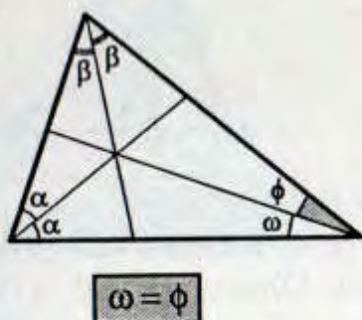
(1) Del latín, Bari: pesado, peso

4. DEMOSTRACIONES DE LAS CONCURRENCIAS

A continuación demostraremos las concurrencias mencionadas.

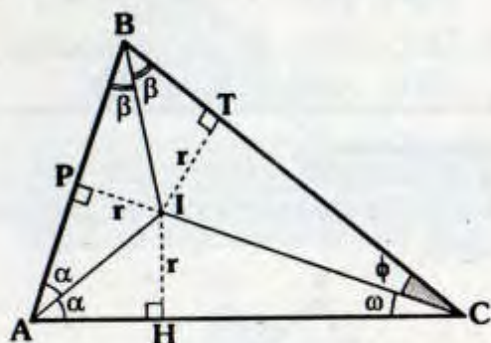
4.1. CON RESPECTO AL INCENTRO

En el gráfico vamos a demostrar:



Método 1

- Se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$ e $\overline{IT} \perp \overline{BC}$.



- Por el teorema de la bisectriz:

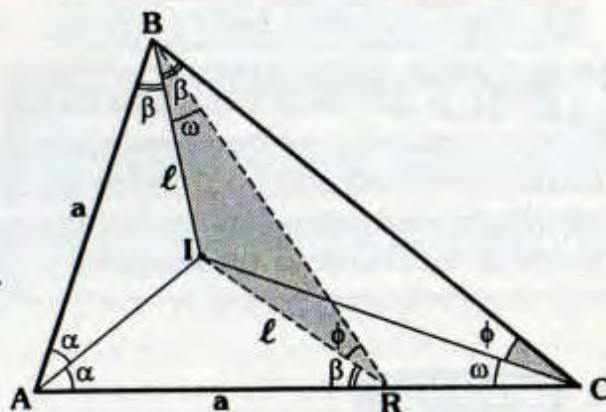
$$IH = IP = r \text{ e } IP = IT = r \\ \Rightarrow IH = IT = r$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, se concluye que \overline{CI} es bisectriz.

$$\therefore \omega = \phi$$

Método 2

- Se ubica R en \overline{AC} tal que $AR = a$

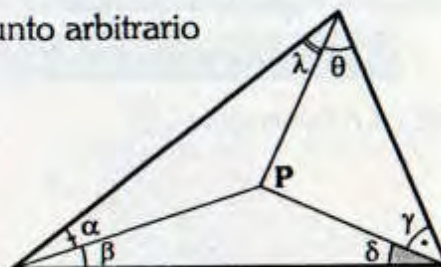


- $\triangle ABI \equiv \triangle AIR$ (LAL)
 $\Rightarrow BI = IR = l$ y $m\angle IRA = \beta$
- Puesto que $m\angle IBC = m\angle IRA = \beta$ el $\triangle BIRC$ es inscriptible.
 $\Rightarrow m\angle IBR = m\angle ICR = \omega$
 $m\angle BCI = m\angle BRI = \phi$
- $\triangle BIR$: Isósceles
 $\therefore \omega = \phi$

Método 3

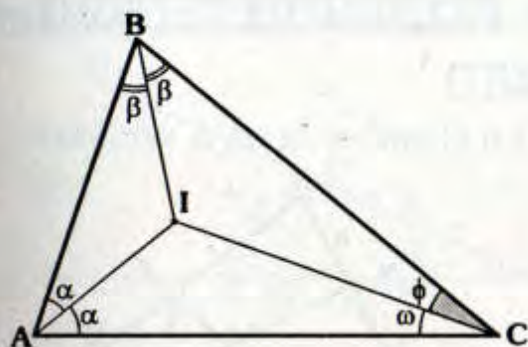
Observación

P: Punto arbitrario



Se cumple:

$$\text{sen}\alpha \text{ sen}\theta \text{ sen}\delta = \text{sen}\lambda \text{ sen}\gamma \text{ sen}\beta$$



- De la observación:

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \omega \text{ sen } \beta = \text{sen } \alpha \text{ sen } \phi \text{ sen } \beta$$

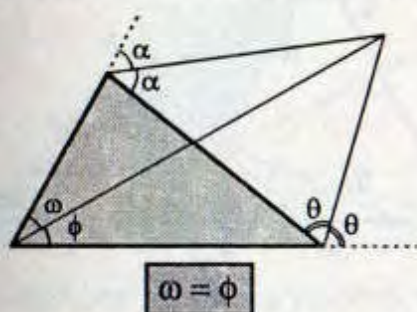
$$\Rightarrow \text{sen } \omega = \text{sen } \phi$$

$$\therefore \omega = \phi$$

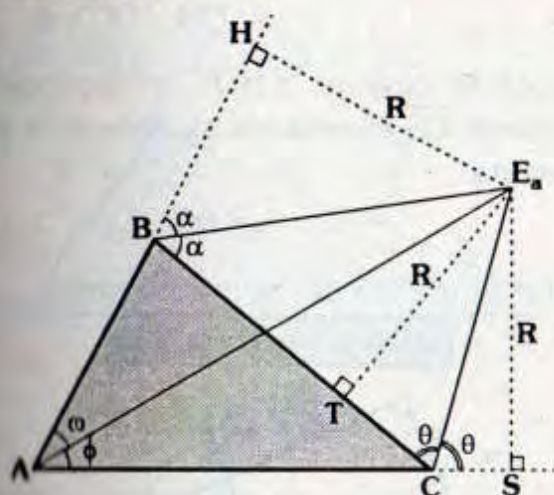
4.2. CON RESPECTO AL EXCENTRO

Caso 1

En el gráfico vamos a demostrar:



Método 1



- Se traza $\overrightarrow{E_a T} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{E_a H} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{E_a S} \perp \overrightarrow{AC}$.

- Por el teorema de la bisectriz:

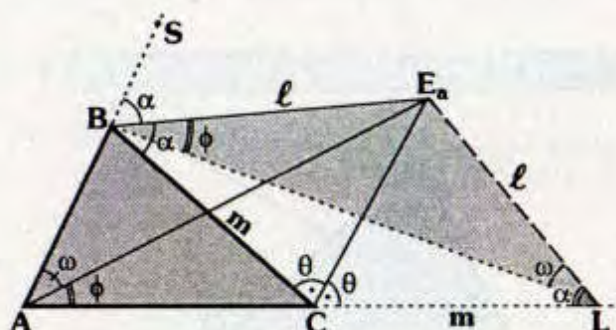
$$E_a H = E_a T = R \text{ y } E_a T = E_a S = R$$

$$\Rightarrow E_a H = E_a S = R$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, se concluye que $\overrightarrow{AE_a}$ es bisectriz.

$$\therefore \omega = \phi$$

Método 2



- Se ubica L en la prolongación de \overline{AC} , tal que $CL = BC = m$

- $\triangle BE_a C \equiv \triangle CE_a L$ (LAL)

$$\Rightarrow BE_a = LE_a = \ell$$

$$m\angle CBE_a = m\angle E_a LC = \alpha$$

- Debido a que:

$$m\angle SBE_a = m\angle E_a LA = \alpha$$

el $\triangle ABE_a L$ es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle E_a BL = m\angle E_a AL = \phi; \text{ y}$$

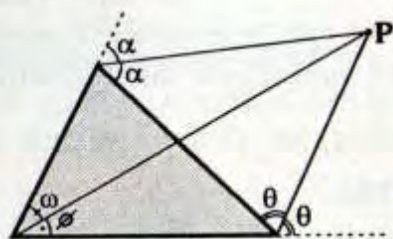
$$m\angle BAE_a = m\angle BLE_a = \omega$$

- $\triangle BE_a L$: Isósceles

$$\therefore \omega = \phi$$

Método 3

- Usando la observación de 4.1, cuando P es exterior.

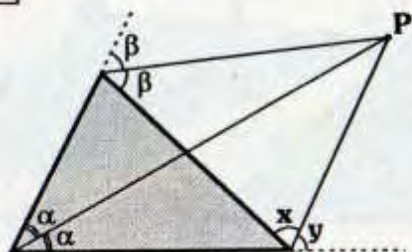


$$\text{sen } \omega \text{ sen } \theta \text{ sen } \alpha = \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \text{ sen } \alpha$$

$$\Rightarrow \text{sen } \omega = \text{sen } \phi$$

$$\therefore \omega = \phi$$

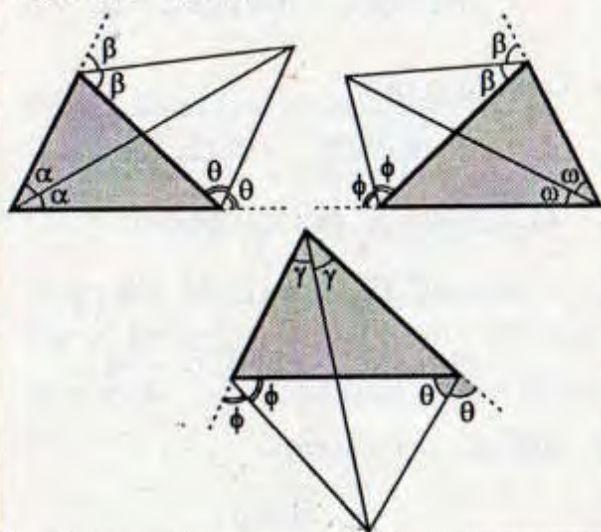
Caso 2



En el gráfico se demuestra que $x=y$, para ello debemos proceder análogamente al caso anterior.

Nota

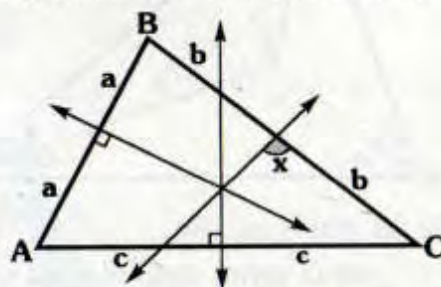
Se verifica entonces que relativo a cada lado encontraremos la concurrencia.



4.3. CON RESPECTO AL CIRCUNCENTRO

Caso 1

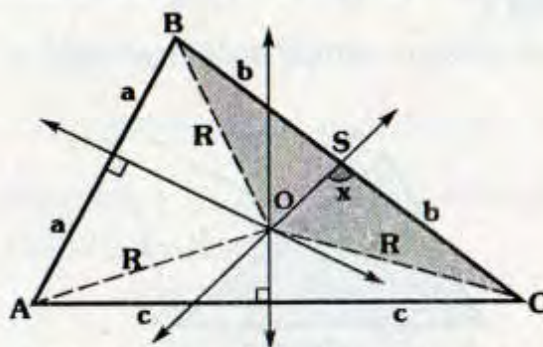
A) En el gráfico se va a demostrar:



$$\Rightarrow x = 90^\circ$$

Demostración:

- Trazamos \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC}



- Por el teorema de la mediatriz:

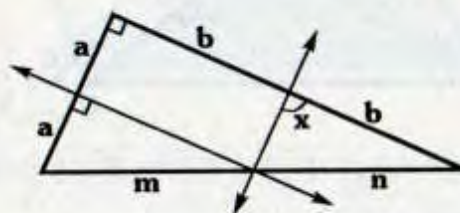
$$OC = OA = R \quad \text{y} \quad OA = OB = R \\ \Rightarrow OB = OC = R$$

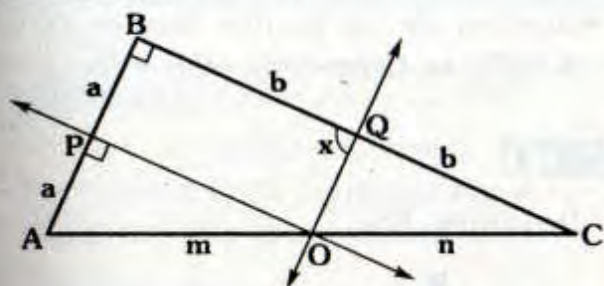
- Con lo cual el $\triangle BOC$ es isósceles, como \overline{OS} es mediana también debe ser altura.

$$\therefore x = 90^\circ$$

B) En el gráfico se va a demostrar:

$$m = n \quad \text{y} \quad x = 90^\circ$$

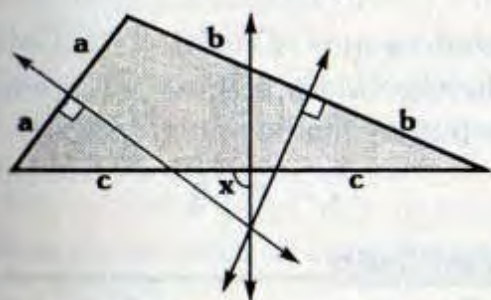


Demostración:

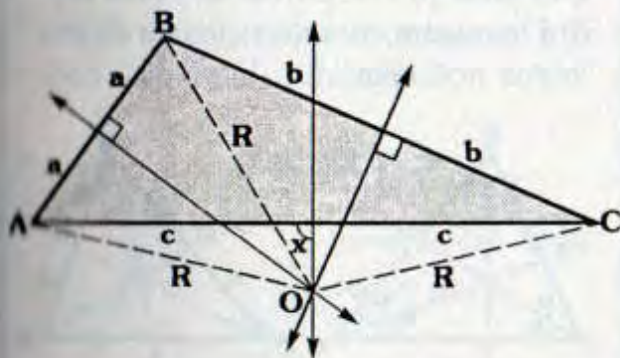
- Como $AP = PB = a$ y $\overline{PO} \parallel \overline{BC}$, por el teorema de los puntos medios:
 $m = n$
- Puesto que $BQ = QC = b$ y $AO = OC = m \Rightarrow \overline{OQ}$ es base media $\triangle ABC$.
 $\therefore x = 90^\circ$

C) En el gráfico vamos a demostrar:

$$x = 90^\circ$$



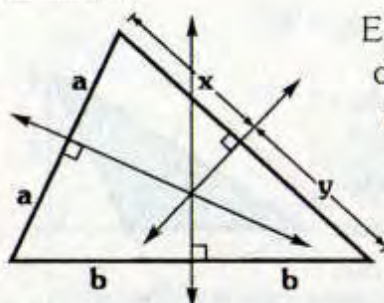
- Se traza \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} .



- Por el teorema de la mediatriz:
 $AO = BO = R$ y $BO = OC = R$
 $\Rightarrow AO = OC = R$

- Puesto que el $\triangle AOC$ es isósceles, por teorema, tenemos:

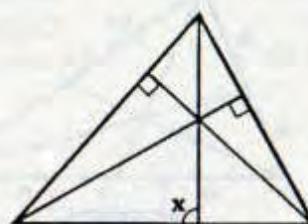
$$\therefore x = 90^\circ$$

Caso 2

En el gráfico se demuestra $x = y$, para lo cual debemos proceder análogamente al caso 1.

4.4. CON RESPECTO AL ORTOCENTRO

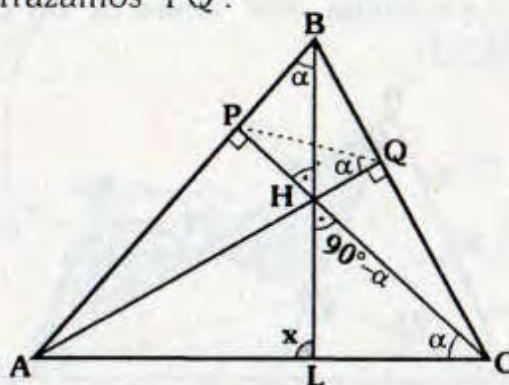
En el gráfico tenemos que demostrar:



$$\Rightarrow x = 90^\circ$$

Demostración:

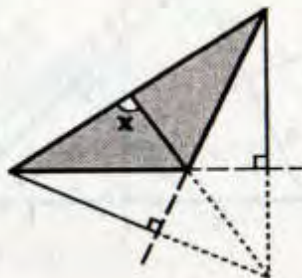
- Trazamos \overline{PQ} .



- Debido a que:
 $m\angle APC = m\angle AQC = 90^\circ$
el $\triangle APQC$ es inscriptible:
 $\Rightarrow m\angle PQA = m\angle PCA = \alpha$

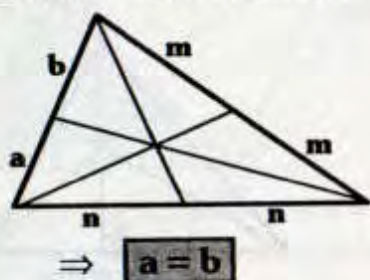
- Puesto que $m\angle BPH = m\angle BQH = 90^\circ$ el $\triangle PBQH$ es inscriptible:
 $\Rightarrow m\angle HBP = m\angle HQP = \alpha$
- En $\triangle HLC$ por ángulo exterior :
 $\therefore x = 90^\circ$

En el gráfico de muestra $x = 90^\circ$, para lo cual nos debemos percatar que se trata del mismo caso anterior.



5.5. CON RESPECTO AL BARICENTRO

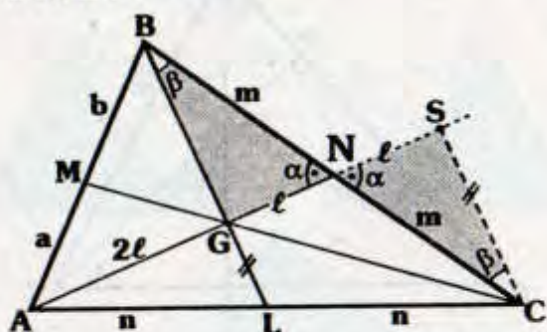
En el gráfico demostramos:



Demostración:

Paso 1

- Se prolonga \overline{AN} hasta S, tal que $\overline{CS} \parallel \overline{LG}$.

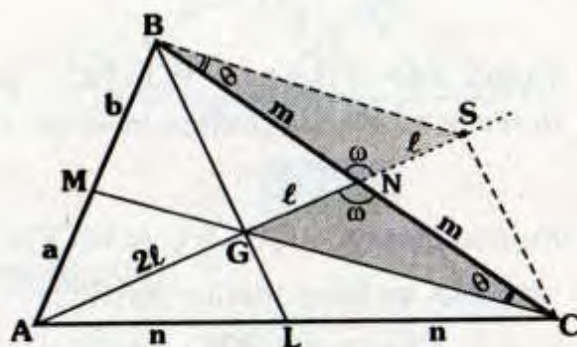


- Ya que $m\angle GBN = m\angle NCS = \beta$ (ángulos alternos internos), $BN = NC = m$ y $m\angle BNG = m\angle SNC = \alpha$:
 $\triangle BGN \cong \triangle CNS$ (ALA) $\Rightarrow GN = NS = \ell$

- Como $AL = LC = n$ y $\overline{LG} \parallel \overline{SC}$ por el teorema de los puntos medios en el $\triangle ASC$, se tiene: $AG = GS = 2\ell$.

Paso 2

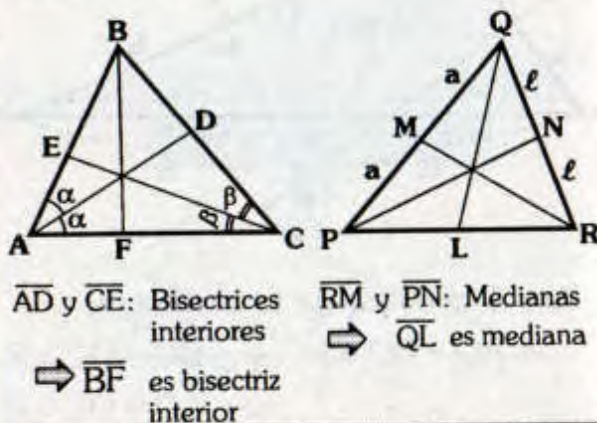
- Trazamos \overline{BS} .



- Como $BN = NC = m$, $m\angle BNS = m\angle GNC$ y $GN = NS = \ell$: $\triangle GNC \cong \triangle BNS$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle SBN = m\angle NCG = \theta$
- Debido a que $AG = GS = 2\ell$ y $\overline{GM} \parallel \overline{BS}$ (alternos internos), por el teorema de los puntos medios en el $\triangle ABS$.
 $\therefore a = b$

Importante:

Tener en cuenta que al trazar dos líneas notables similares la ceviana que pase por el punto de corte tendrá la misma característica de dichas líneas notables.

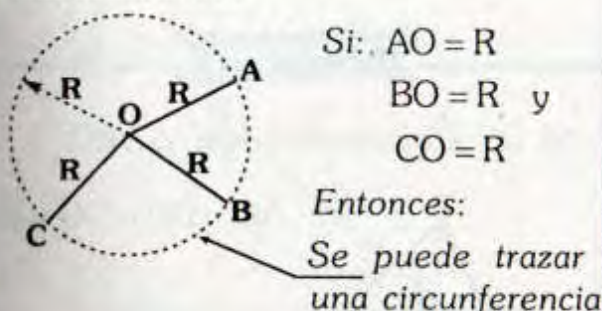


5. CIRCUNFERENCIAS INSCRITA, EXINSCRITA Y CIRCUNSCRITA AL TRIÁNGULO

Recordar: (Postulado de Euclides)

Por un punto arbitrario como centro y un radio cualquiera se puede trazar una circunferencia.

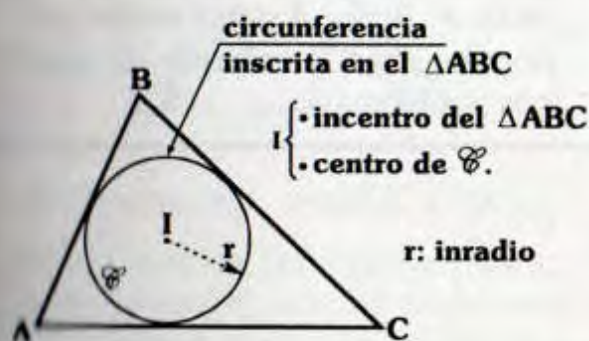
Gráficamente:



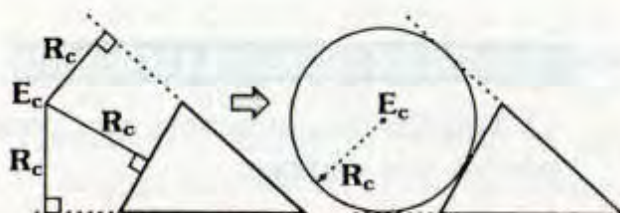
- * Por lo estudiado en el incentro, sabemos que dicho punto equidista de los lados del triángulo ($IP = IT = IH = r$, ver demostración 4.1), por lo tanto (por el postulado de Euclides) el incentro es el centro de una circunferencia de radio r , la cual es tangente a cada lado del triángulo, como se muestra a continuación.

5.1. CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN EL TRIÁNGULO

Es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

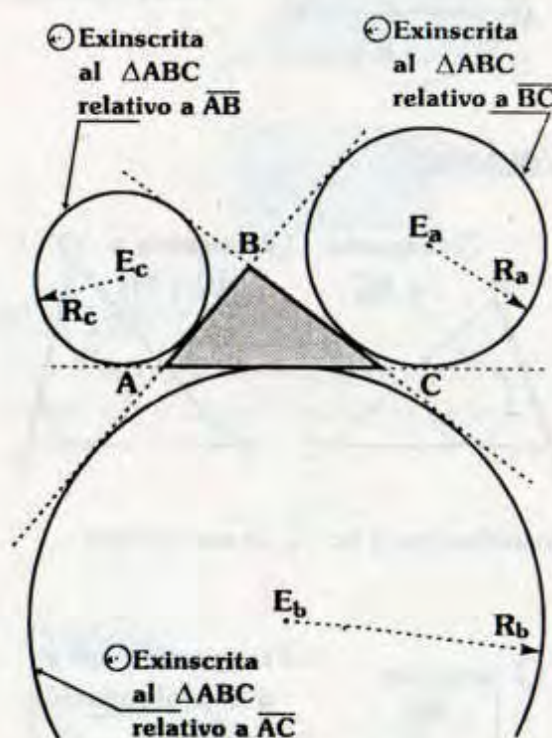


- * De forma similar a los estudiado en el incentro podemos concluir:



5.2. CIRCUNFERENCIA EXINSCRITA EN EL TRIÁNGULO

Es la circunferencia tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

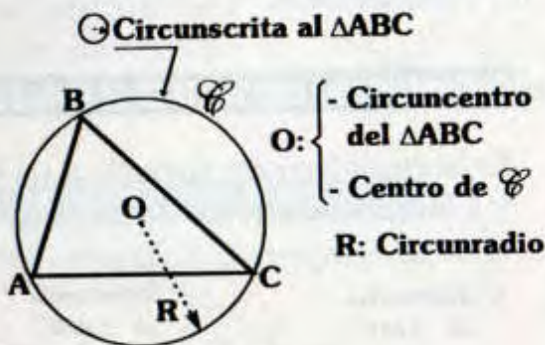


- E_a : Excentro del ΔABC , relativo a \overline{BC}
- E_b : Excentro del ΔABC , relativo a \overline{AC}
- E_c : Excentro del ΔABC , relativo a \overline{BA}
- R_a : Exradio del ΔABC , relativo a \overline{BC}

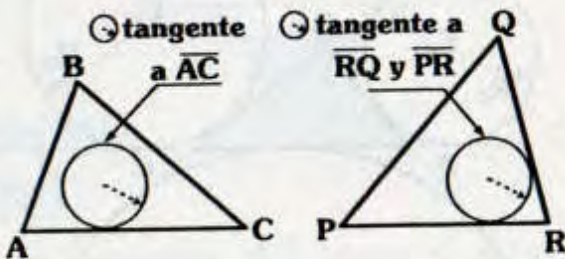
- R_b : Exradio del $\triangle ABC$, relativo a \overline{AC}
- R_c : Exradio del $\triangle ABC$, relativo a \overline{BA}
- * Lo mismo ocurre con el circuncentro.

5.3. CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO

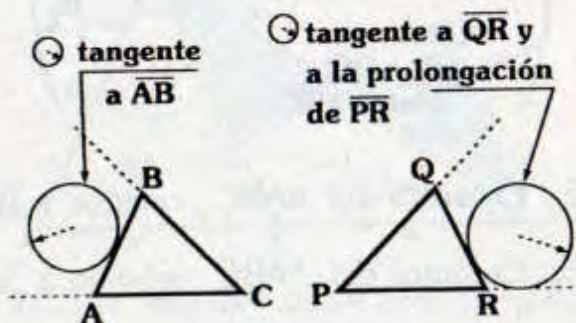
Es aquella circunferencia que pasa por los tres vértices.



Cuidado:

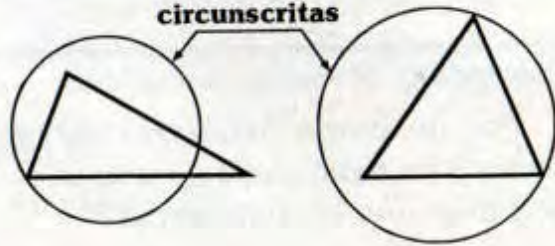


En ambos casos las \odot_s no son inscritas.



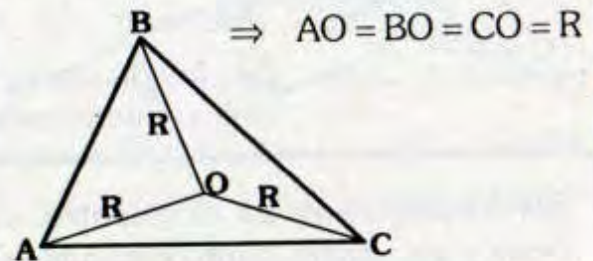
Las \odot_s no son exinscritas.

No están circunscritas

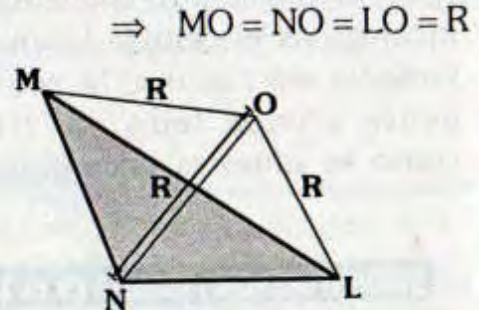


Observación

Si O: Circuncentro del $\triangle ABC$:



Si O: Circuncentro del $\triangle MNL$:



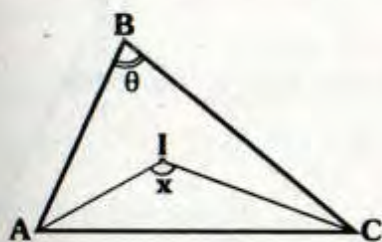
En ambos casos se podrá trazar una circunferencia de centro O y radio R (lo cual daría mayor panorama para la solución de algunos problemas).

6. TEOREMAS FUNDAMENTALES

6.1. TEOREMA

La medida de un ángulo cuyo vértice es el incentro y sus lados pasan por dos vértices de un triángulo es 90° más la mitad de la medida del ángulo interior en el tercer vértice.

Si I : Incentro del $\triangle ABC$.



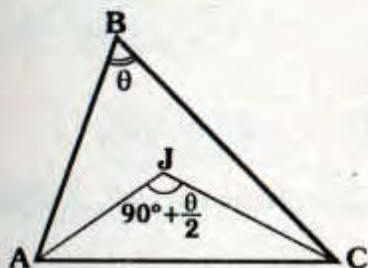
$$\Rightarrow x = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$$

Demostración:

- Dado que I es incentro, sabemos que \overline{AI} y \overline{CI} son bisectrices. Por teorema de ángulos entre bisectrices:

$$x = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$$

Cuidado:



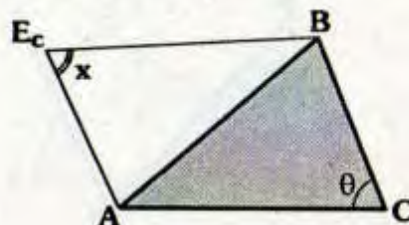
Se observa que: $m\angle AJC = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$

con lo cual **no** podemos afirmar que J es **incentro**, nos faltarían condiciones las cuales analizaremos en las páginas siguientes.

6.2. TEOREMA

La medida del ángulo cuyo vértice es el excentro relativo a un lado y cuyos lados pasan por los vértices de dicho lado es igual a 90° menos la mitad de la medida del ángulo interior en el tercer vértice.

Si E_c : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a \overline{AB} .



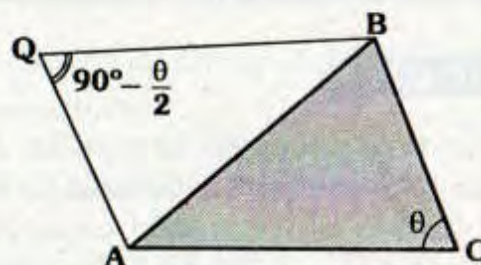
$$\Rightarrow x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Demostración:

- Así como en el teorema anterior, del tema de triángulo se concluye:

$$\therefore x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Cuidado:

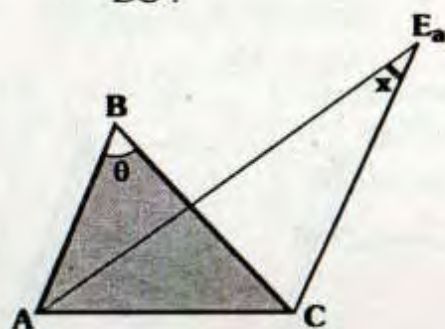


"Q" no necesariamente es un excentro del $\triangle ABC$.

6.3. TEOREMA

La medida del ángulo cuyo vértice es el excentro relativo a un lado del triángulo y cuyos lados pasan por un extremo de dicho lado y el tercer vértice del triángulo es igual a la mitad de la medida del ángulo interior en el otro extremo.

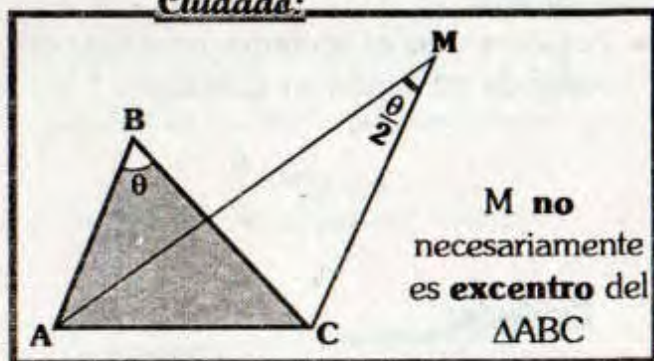
Si E_a : Excentro del ABC, relativo a \overline{BC} .



$$\Rightarrow x = \frac{\theta}{2}$$

La demostración es análoga a las anteriores.

Cuidado:

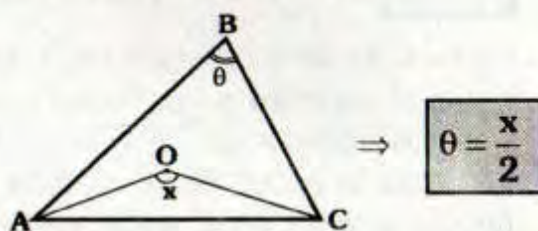


6.4 TEOREMA

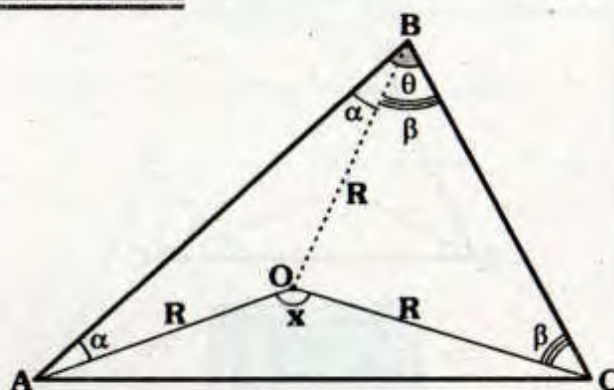
En todo triángulo la medida de un ángulo interior agudo es la mitad de la medida del ángulo cuyo vértice es el circuncentro de dicho triángulo y los lados pasan por los vértices no correspondientes al ángulo mencionado.

Caso 1

Si O: Circuncentro del ABC.



Demostración:

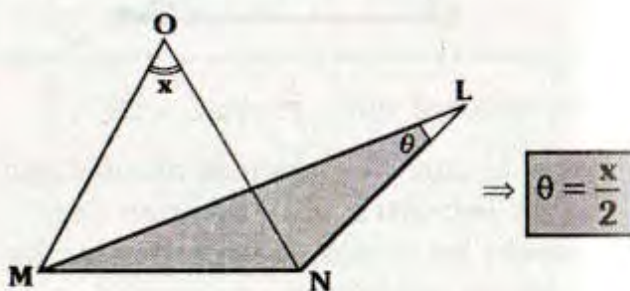


- Trazamos \overline{OB} .
- Como O es circuncentro.
 $\Rightarrow AO=BO=CO$
 $\Rightarrow \triangle AOB$ y $\triangle BOC$ son isósceles

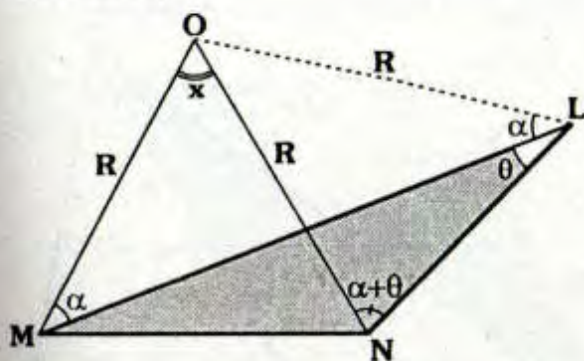
- Por propiedad \triangle : $x = \alpha + \beta + \theta$
 - En "B": $\frac{\alpha + \beta = \theta}{\Rightarrow x = 2\theta}$
- $\therefore x = 2\theta$

Caso 2

Si O: Circuncentro del $\triangle MNL$.



Demostración:

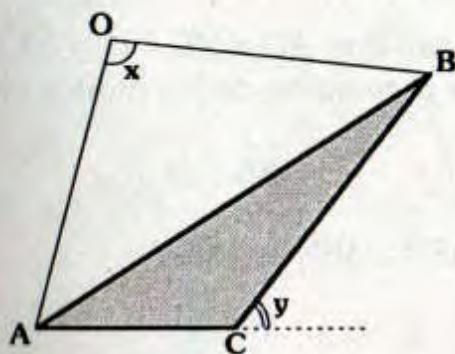


- Trazamos \overline{OL} .
- $\triangle MLO$, $\triangle MNO$ y $\triangle LNO$ son isósceles.
 $\Rightarrow m\angle ONL = m\angle OLN = \alpha + \theta$
- En \triangle : $x + \alpha = \alpha + 2\theta$

$$\therefore \theta = \frac{x}{2}$$

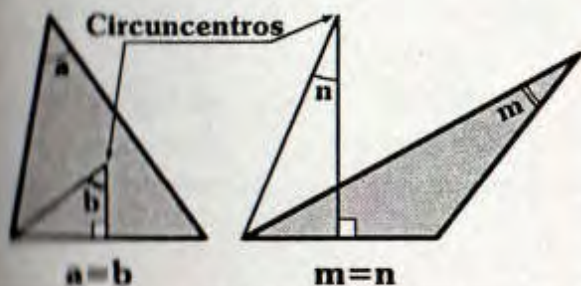
Observación

- Si O: Circuncentro del $\triangle ABC$.



$$\Rightarrow \boxed{x = 2y}$$

- También se deduce :

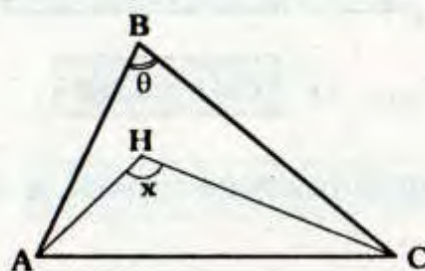


6.5. TEOREMA

En todo triángulo un ángulo interior y el ángulo cuyo vértice es el ortocentro de dicho triángulo y sus lados pasan por los vértices no correspondientes al ángulo interior mencionado son suplementarios.

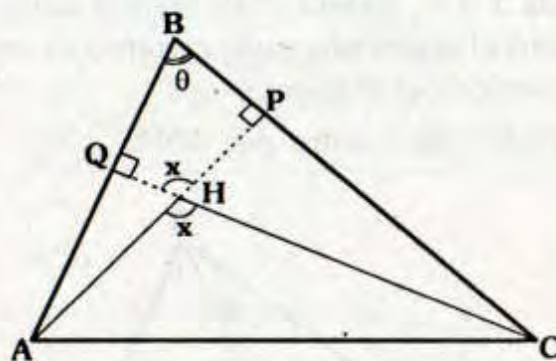
Caso	1
------	---

Si H: Ortocentro del ABC :



$$\Rightarrow \boxed{x + \theta = 180^\circ}$$

Demostración:



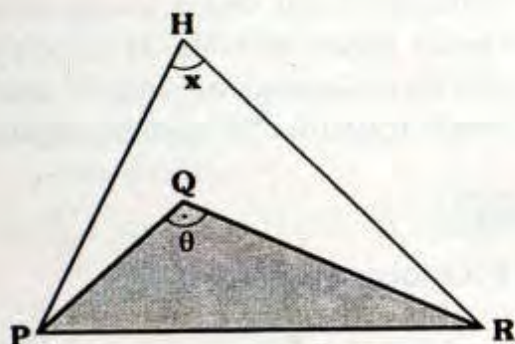
- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AP}$ y \overline{CQ} son alturas.
- En $\triangle QBPH$:

$$x + \theta + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x + \theta = 180^\circ$$

Caso 2

Si, H : Ortocentro del ΔPQR



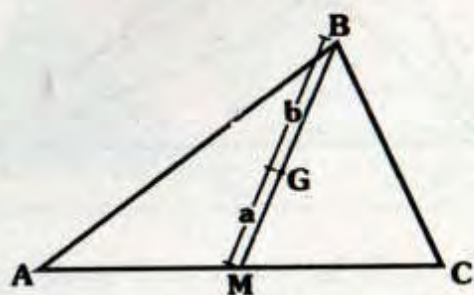
$$\Rightarrow x + \theta = 180^\circ$$

La demostración es análoga a la anterior.

6.6. TEOREMA

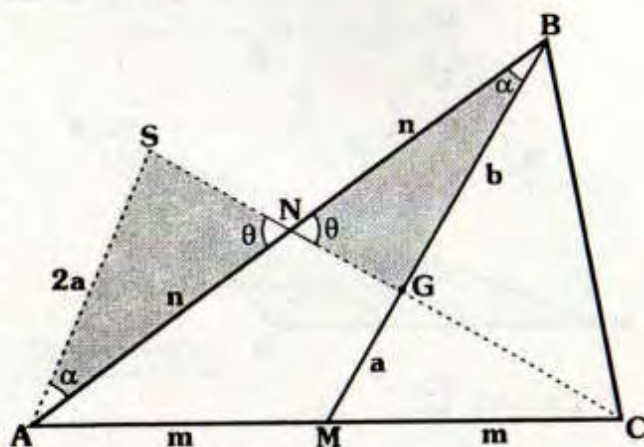
En todo triángulo el baricentro divide a la mediana en dos segmentos cuyas longitudes están en la razón de 1 a 2, siendo el de mayor longitud el segmento cuyo extremo es un vértice del triángulo.

Si G: Baricentro del ΔABC



$$\Rightarrow b = 2a$$

Demostración



- Trazamos las medianas \overline{CN} y \overline{BM} , las cuales pasan por el baricentro G.

$$\Rightarrow AN = NB = n \quad y$$

$$AM = MC = m$$

- Luego prolongamos \overline{CN} hasta S, tal que $\overline{AS} \parallel \overline{MG}$.
- Puesto que $AM = MC = m$ y $\overline{MG} \parallel \overline{AS}$, por el teorema de los puntos medios:

$$AS = 2a$$

- $\Delta ASN \cong \Delta BNG$ A.L.A.

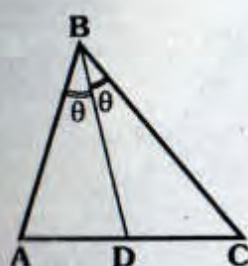
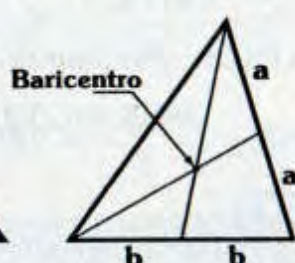
$$\therefore b = 2a$$

7. CRITERIOS PARA IDENTIFICAR LOS PUNTOS NOTABLES

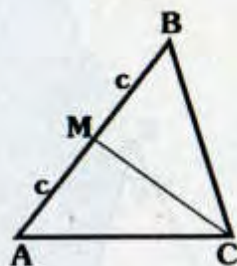
7.1 CRITERIO PRINCIPAL

Cuando se quiere ubicar o reconocer un punto notable por lo general bastara trazar dos líneas de la misma característica (ya sean por ejemplo dos bisectrices, dos medianas, dos alturas, etc.) o trazar solo una de ellas y el punto al que hacemos referencia se encontrará sobre dicha línea.

En adelante al trazar dos líneas de la misma especie el punto de intersección será un punto notable (por ejemplo la intersección de dos bisectrices interiores es el incentro).

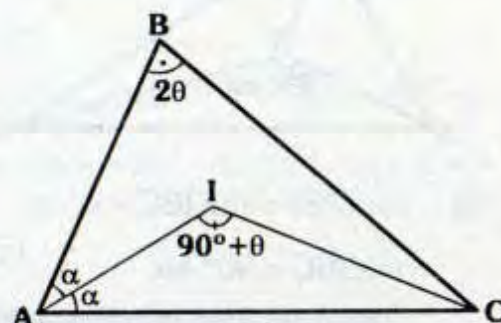


En \overline{BD} se encuentra el incentro



En \overline{CM} se encuentra el baricentro

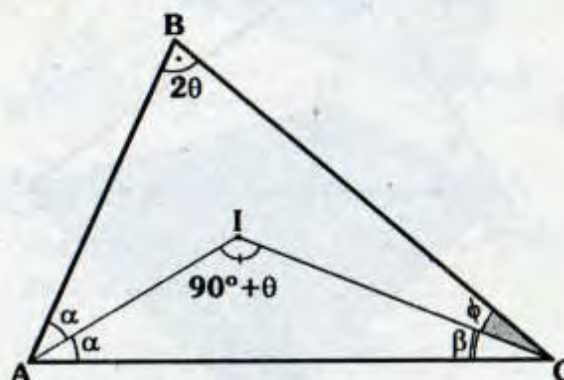
7.2



$$\text{Si : } m\angle AIC = 90^\circ + \frac{m\angle ABC}{2} = 90^\circ + \theta$$

⇒ **I: Incentro del $\triangle ABC$**

Demostración:



• $\triangle AIC$:

$$\alpha + 90^\circ + \theta + \beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = 90^\circ \quad \dots(I)$$

• $\triangle ABCI$:

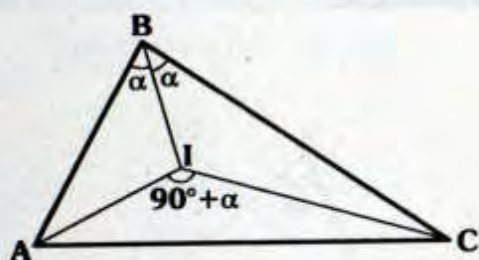
$$90^\circ + \theta = \alpha + 2\theta + \phi$$

$$\Rightarrow 90^\circ = \alpha + \theta + \phi \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

$\beta = \phi$, con lo cual \overrightarrow{CI} es bisectriz, por lo tanto del criterio principal, se deduce que I es incentro del ABC.

7.3

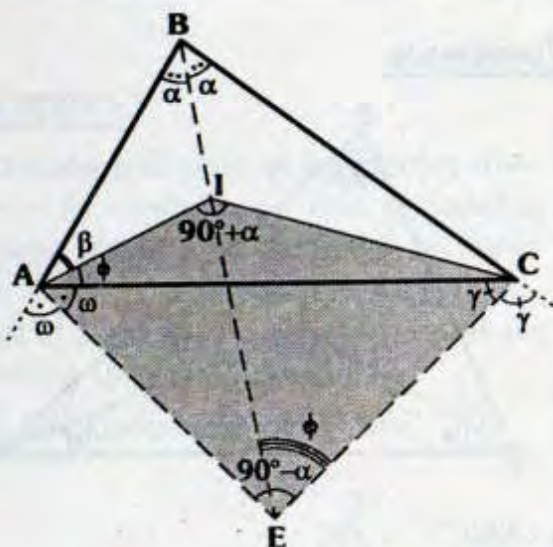


Si : $m\angle ABI = m\angle IBC = \alpha$ y
 $m\angle AIC = 90^\circ + \alpha$

\Rightarrow **I: Incentro del $\triangle ABC$**

Demostración:

Método 1



- Se prolonga \overline{BI} hasta el excentro E del $\triangle ABC$.
- Luego trazamos \overline{EA} y \overline{EC} .
- Por el teorema 6.2, en $\triangle ABC$:

$$m\angle AEC = 90^\circ - \alpha$$
- Debido a que:

$$m\angle AIC + m\angle AEC = 180^\circ$$
 El $\triangle AICE$ es inscriptible:
 $\Rightarrow m\angle IEC = m\angle IAC = \phi$

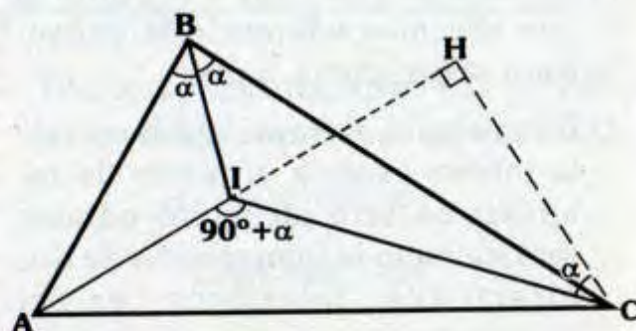
- $\triangle ABC$: Por el teorema 6.3

$$\Rightarrow \frac{\beta + \phi}{2} = \phi \Rightarrow \beta = \phi$$

- \overrightarrow{AI} : Bisectriz interior $\triangle ABC$
 $\therefore I$ es incentro del $\triangle ABC$

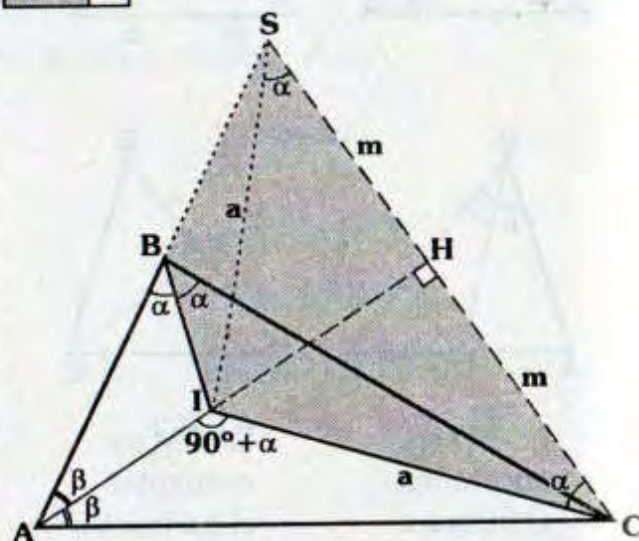
Método 2

Paso 1



- Prolongamos \overline{AI} hasta H, tal que $m\angle IHC = 90^\circ$.
- $\triangle IHC$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow m\angle HCI = \alpha$

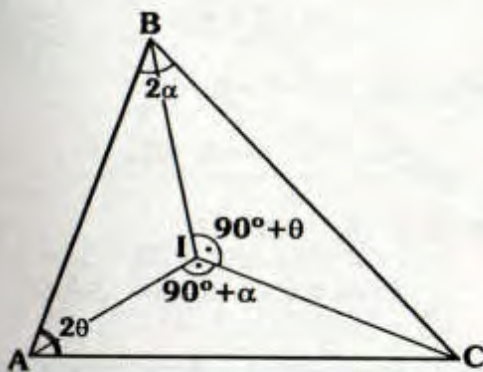
Paso 2



- Prolongamos \overline{AB} y \overline{CH} hasta que se corten en S.

- Dado que: $m\angle ABI = m\angle ICS = \alpha$
el $\triangle BSCI$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle IBC = m\angle ISC = \alpha$
- Como $m\angle ISC = m\angle ICS = \alpha$ el $\triangle ISC$
es isósceles $\Rightarrow SH = HC = m$
- Con lo cual el $\triangle ASC$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle SAH = m\angle CAH = \beta$
 $\therefore I$ es incentro del $\triangle ABC$

7.4



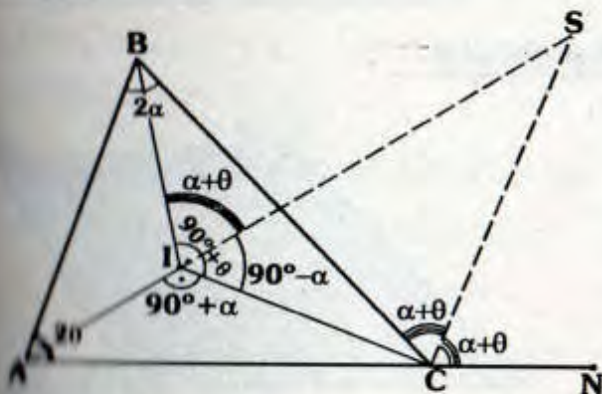
$$\text{Si: } m\angle AIC = 90^\circ + \frac{m\angle ABC}{2} = 90^\circ + \alpha$$

$$\text{y } m\angle BIC = 90^\circ + \frac{m\angle BAC}{2} = 90^\circ + \theta$$

\Rightarrow **I: Incentro del $\triangle ABC$**

Demostración:

Paso 1



- Prolongamos \overline{AI} y trazamos la bisectriz exterior \overline{CS} :

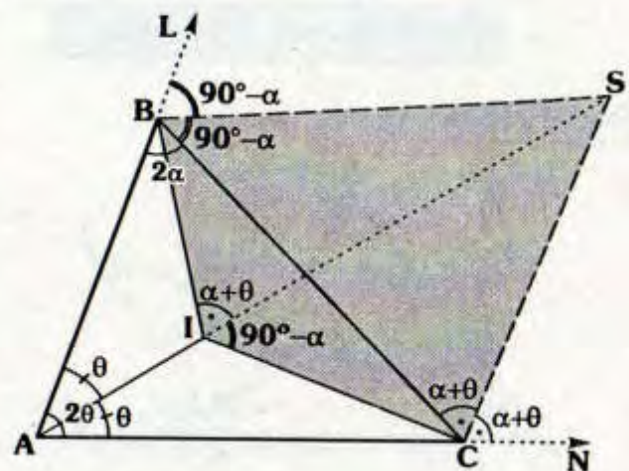
$$m\angle BCS = m\angle SCN = \alpha + \theta$$

- En "I":

$$m\angle SIC = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$$

$$m\angle BIS = 90^\circ + \theta - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \theta$$

Paso 2



- Trazamos \overline{BS} , debido a que:
 $m\angle BIS = m\angle BCS = \alpha + \theta \Rightarrow \triangle BICS$
es inscriptible.

$$\Rightarrow m\angle SIC = m\angle SBC = 90^\circ - \alpha$$

- En "B": $m\angle LBS = 90^\circ - \alpha$

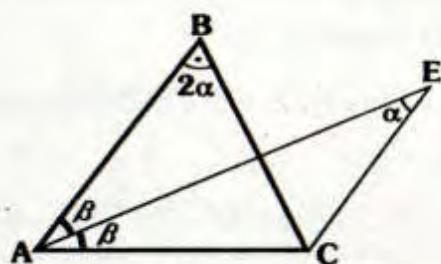
- Luego podemos notar que \overline{BS} y \overline{CS}
son bisectrices exteriores para el
 $\triangle ABC$, por el criterio principal \overline{AS} es
bisectriz, es decir:

$$m\angle BAS = m\angle SAC = \theta$$

- En $\triangle AIB$, por ángulo exterior:
 $m\angle ABI = \alpha$, luego $m\angle ABI = m\angle IBC$,
es decir \overline{BI} es bisectriz del $\angle ABC$.

$\therefore I$: Incentro $\triangle ABC$

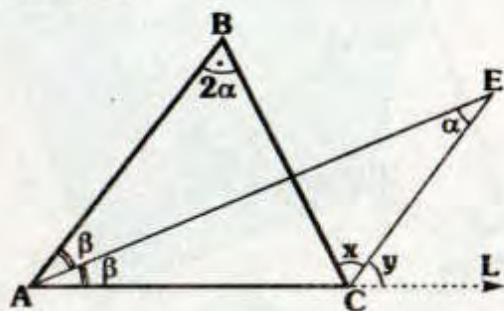
7.5



Si : $m\angle ABC = 2(m\angle AEC) = 2\alpha$ y
 $m\angle BAE = m\angle CAE = \beta$

⇒ **E: Excentro del ΔABC**

Demostración:

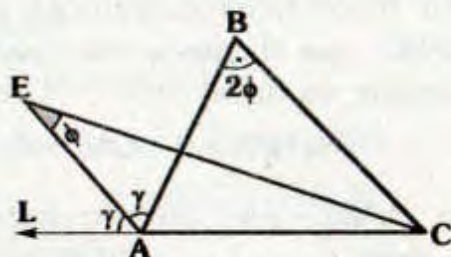


• ΔACE : Por ángulo exterior :
 $\Rightarrow y = \alpha + \beta$... (I)

• ΔBCE : $\beta + 2\alpha = x + \alpha$:
 $\Rightarrow x = \alpha + \beta$... (II)

• De (I) y (II): $x = y$ es decir \overrightarrow{CE} bisectriz, por el criterio principal :
 E es excentro ΔABC .

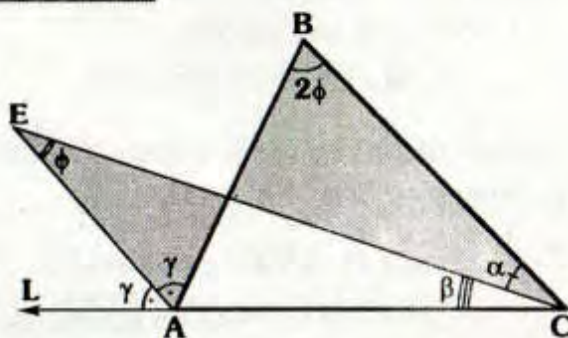
7.6



Si : $m\angle ABC = 2(m\angle AEC) = 2\phi$ y
 $m\angle BAE = m\angle EAL = \gamma$

⇒ **E: Excentro del ΔABC**

Demostración:

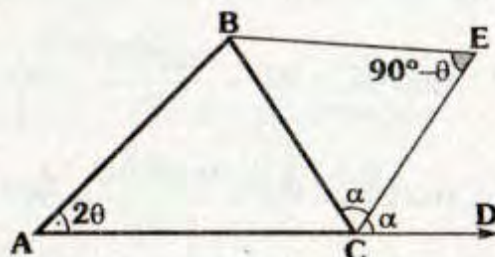


• ΔCAE : Por ángulo exterior:
 $\Rightarrow \beta + \phi = \gamma$... (I)

• ΔBCE : $\alpha + 2\phi = \gamma + \phi$
 $\Rightarrow \alpha + \phi = \gamma$... (II)

• De (I) y (II): $\alpha = \beta$
 \therefore E es excentro del ΔABC .

7.7

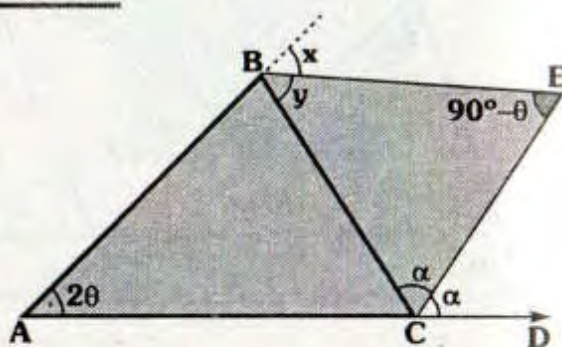


Si : $m\angle BEC = 90^\circ - \frac{m\angle BAC}{2} = 90^\circ - \theta$

y $m\angle BCE = m\angle ECD = \alpha$

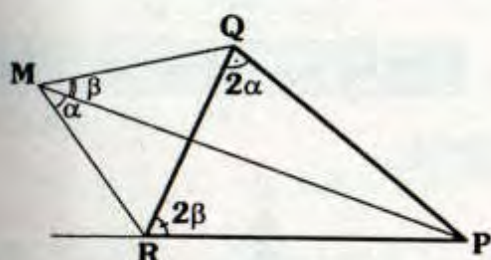
⇒ **E: Excentro del ΔABC**

Demostración:



- $\triangle BEC$: $y + \alpha + 90^\circ - \theta = 180^\circ$
 $\Rightarrow y = 90^\circ + \theta - \alpha$... (I)
- \triangle : $x + \alpha = 2\theta + 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow x = 90^\circ + \theta - \alpha$... (II)
- De (I) y (II): $x = y$
 $\therefore E$ es excentro del $\triangle ABC$.

7.8



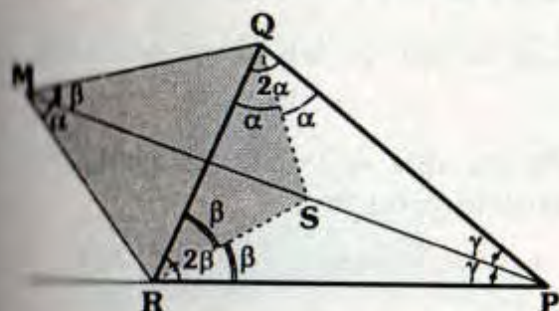
Si: $m\angle PQR = 2(m\angle PMR) = 2\alpha$

$m\angle PRQ = 2(m\angle PMQ) = 2\beta$

\Rightarrow **M: Excentro del $\triangle PQR$**

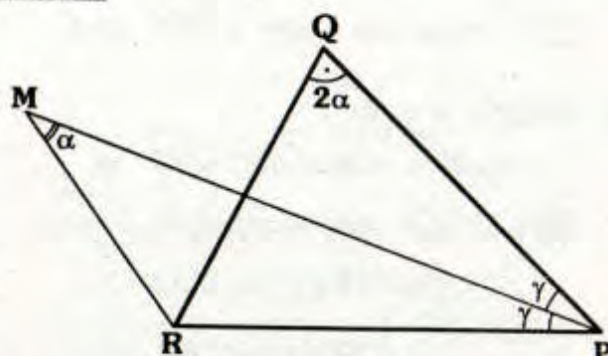
Demostración:

Paso 1



- Ubicamos S en \overline{PM} tal que: $m\angle RQS = \alpha$.
- Como $m\angle RMP = m\angle RQS = \alpha$, al trazar RS el $\triangle MQSR$ es inscriptible.
 $\Rightarrow m\angle QRS = m\angle QMS = \beta$
- Por el criterio principal \overline{PS} es bisectriz interior del $\triangle PQR$.

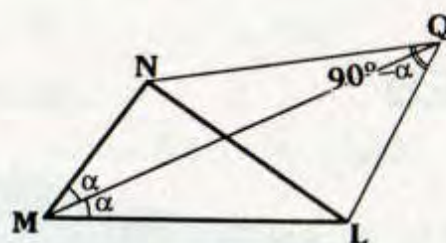
Paso 2



- Dado que: $m\angle QPM = m\angle MPR = \gamma$, por el criterio 7.5

$\therefore M$ es excentro del $\triangle PQR$.

7.9



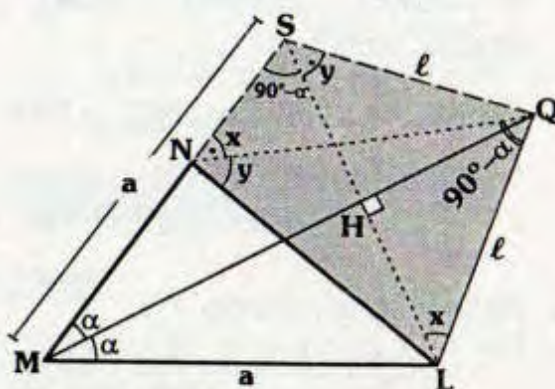
Si $m\angle NQL = 90^\circ - \frac{m\angle NML}{2} = 90^\circ - \alpha$

y $m\angle NMQ = m\angle QML = \alpha$

\Rightarrow **Q: Excentro del $\triangle MNL$**

Demostración:

Método 1



- Trazamos $\overline{LH} \perp \overline{MQ}$ y prolongamos \overline{LH} hasta que corte a \overline{MN} en S.

- Debido a que:

$$m\angle NSL = m\angle NQL = 90^\circ - \alpha$$

El $\triangle NSQL$ es inscriptible:

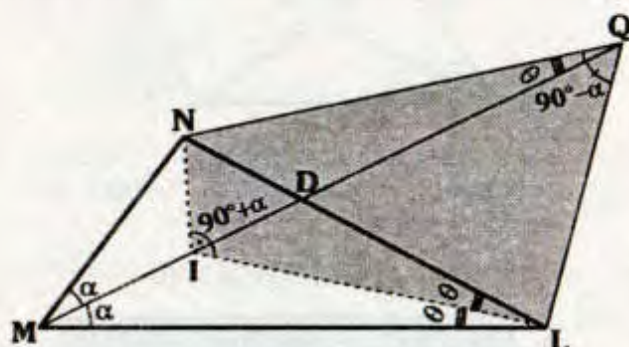
$$\Rightarrow m\angle SNQ = m\angle SLQ = x$$

$$m\angle LSQ = m\angle QNL = y$$

- En $\triangle MSL$: \overline{MH} es altura y bisectriz
 \overline{MH} es mediana, con lo cual el $\triangle SQL$ es isósceles $\Rightarrow x = y$

$\therefore Q$ es excentro del $\triangle MNL$.

Método 2



- Por el criterio principal sabemos que el incentro I del $\triangle MNL$ se encuentra en \overline{MD} .

- En $\triangle MNL$: $m\angle MLI = m\angle ILN = \theta$ y $m\angle NIL = 90^\circ + \alpha$

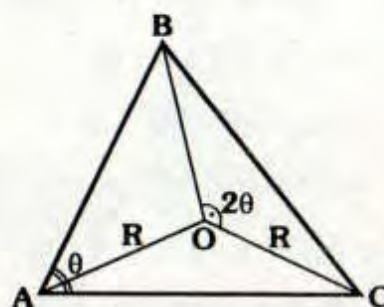
- Como $m\angle NIL + m\angle NQL = 180^\circ$ el $\triangle NILQ$ es inscriptible.

$$\Rightarrow m\angle ILN = m\angle IQN = \theta$$

- Aplicando el criterio 7.5.

$\therefore Q$ es excentro del $\triangle MNL$.

7.10

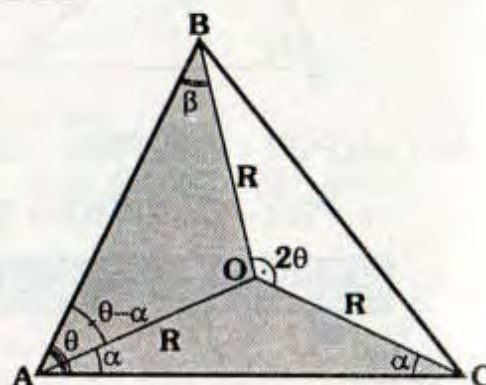


$$\text{Si: } m\angle BOC = 2(m\angle BAC) = 2\theta \text{ y}$$

$$AO = OC = R$$

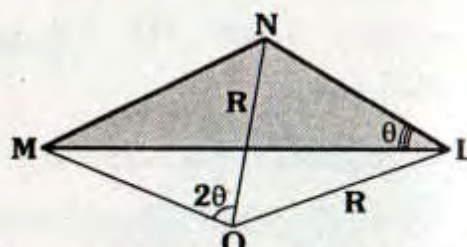
\Rightarrow **O: Circuncentro del $\triangle ABC$**

Demostración:



- $\triangle \alpha + \beta + \theta = 2\theta \Rightarrow \beta = \theta - \alpha$
- Con lo cual el $\triangle AOB$ es isósceles $\Rightarrow BO = R$
- Puesto que $AO = BO = CO = R$, por el criterio principal.
 $\therefore O$ es circuncentro del $\triangle ABC$.

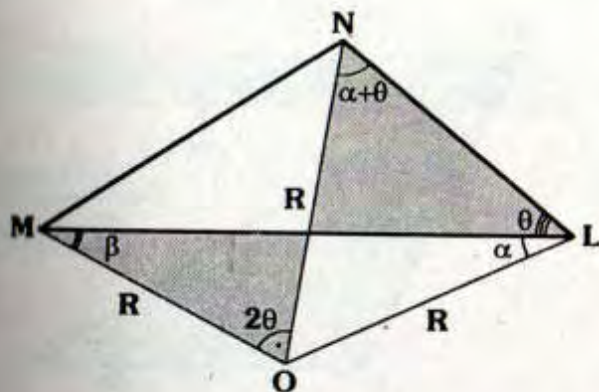
7.11



$$\text{Si: } m\angle MON = 2(m\angle MLN) = 2\theta \text{ y}$$

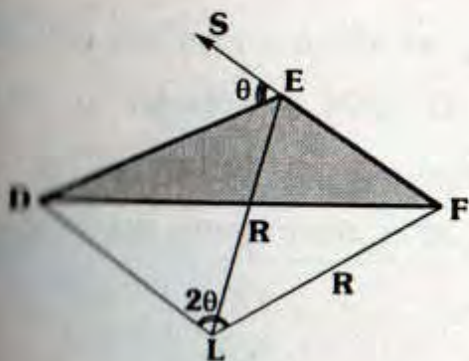
$$ON = OL = R$$

\Rightarrow **O: Circuncentro del $\triangle MNL$**

Demostración:

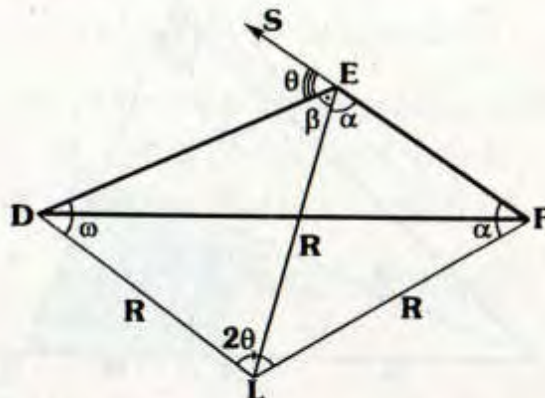
- $\triangle NOL$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle ONL = m\angle OLN = \alpha + \theta$
- $\triangle MNL$: $\beta + 2\theta = \alpha + \theta + \theta \Rightarrow \beta = \alpha$
- Con lo cual el $\triangle MOL$ es isósceles.
 $\Rightarrow MO = R$
- Ya que $MO = NO = LO = R$, podemos asegurar.
 $\therefore O$ es circuncentro del $\triangle MNL$.

7.12



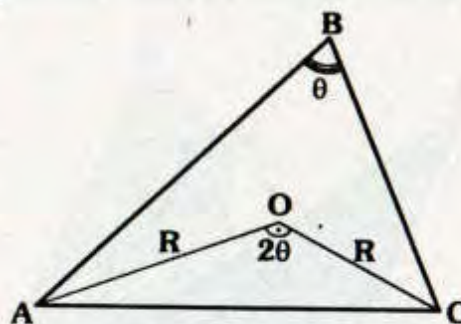
En $m\angle DLF = 2(m\angle DES) = 2\theta$ y
 $LE = LF = R$

$\therefore L$ es Circuncentro del $\triangle DEF$

Demostración:

- Debido a que $EL = LF = R$ el $\triangle LFE$ es isósceles.
 $\Rightarrow m\angle LEF = m\angle LFE = \alpha$
- En "S": $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \dots (I)$
- $\triangle DEFL$:
 $\omega + \alpha + \beta + \alpha + 2\theta = 360^\circ \dots (II)$
- De (I) y (II): $\beta = \omega$, con lo cual $DL = R$.
 $\therefore L$ es circuncentro del $\triangle DEF$.

7.13



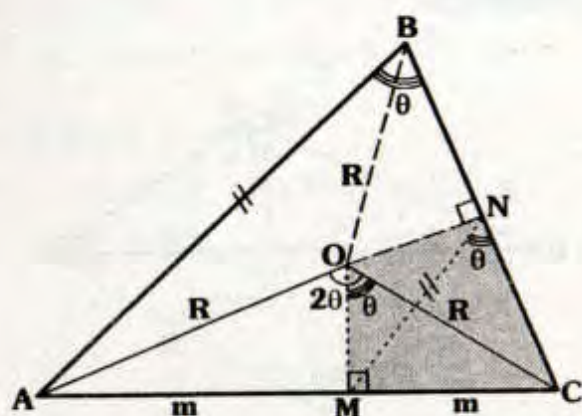
Si: $m\angle AOC = 2(m\angle ABC) = 2\theta$ y

$AO = OC = R$

$\Rightarrow O$: Circuncentro del $\triangle ABC$

Demostración

- Trazamos \overline{OB} y la altura \overline{OM} del \triangle isósceles AOC .



$$\Rightarrow AM = MC = m \text{ y } m\angle MOC = \theta$$

- Luego al trazar la altura ON del $\triangle BOC$, nos damos cuenta que el $\triangle OMCN$ es inscriptible.

$$\Rightarrow m\angle MOC = m\angle MNC = \theta$$

- Como: $AM = MC = m$ y

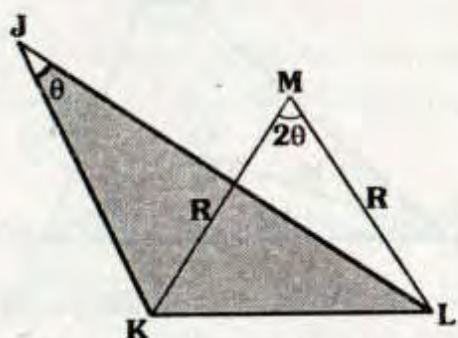
$$\overline{MN} \parallel \overline{AB} \Rightarrow BN = NC$$

- Por lo cual el $\triangle BOC$ es isósceles:

$$\Rightarrow OB = R$$

$\therefore O$ es circuncentro del $\triangle ABC$.

7.14

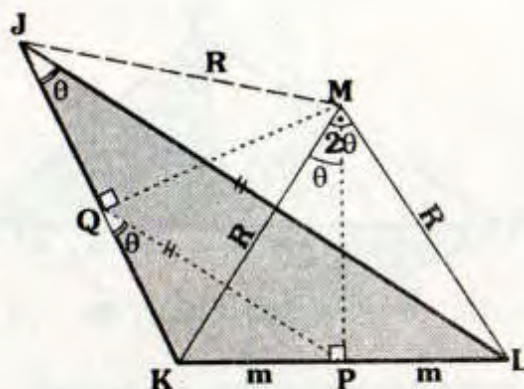


$$\text{Si : } m\angle KML = 2(m\angle KJL) = 2\theta \text{ y}$$

$$KM = ML = R$$

\Rightarrow **M: Circuncentro del $\triangle JKL$**

Demostración:



- Trazamos \overline{MJ} y la altura MP del \triangle isósceles KML.

- Con lo cual:

$$m\angle KMP = \theta \text{ y } KP = PL = m$$

- Luego al trazar la altura MQ del $\triangle JKM$, con lo cual el $\triangle KQMP$ es inscriptible.

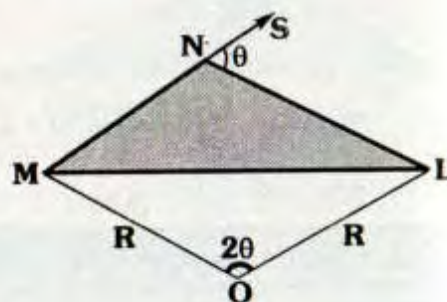
$$\Rightarrow m\angle KQP = m\angle KMP = \theta$$

- Dado que $KP = PL = m$ y $\overline{QP} \parallel \overline{JL}$
 $\Rightarrow JQ = QK$ (por el teorema de los puntos medios).

- \overline{MQ} es altura y mediana del $\triangle JKM$
 \Rightarrow el $\triangle JKM$ es isósceles $\Rightarrow JM = R$.

- Puesto que: $JM = KM = LM = R$
 $\therefore M$ es circuncentro del $\triangle JKL$.

7.15



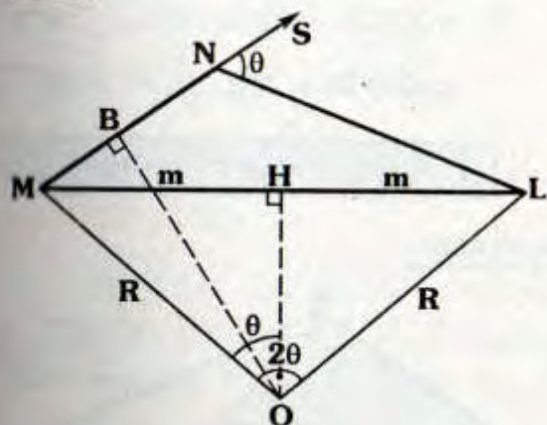
Si: $m\angle MOL = 2(m\angle SNL) = 2\theta$ y

$MO = OL = R$

\Rightarrow **O: Circuncentro del $\triangle MNL$**

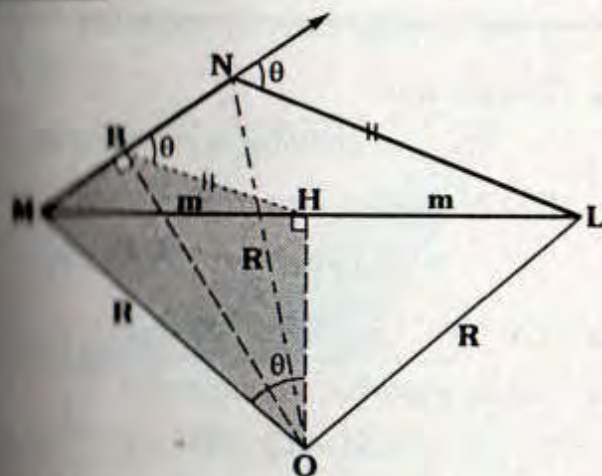
Demostración:

Paso 1



- Se traza la altura OH del \triangle isósceles MOL.
- Por teorema: $MH = HL = m$ y $m\angle MOH = \theta$
- Luego ubicamos el punto B en \overline{MN} , tal que $m\angle MBO = 90^\circ$.

Paso 2



- Debido a que:
 $m\angle MBO = m\angle MHO = 90^\circ$

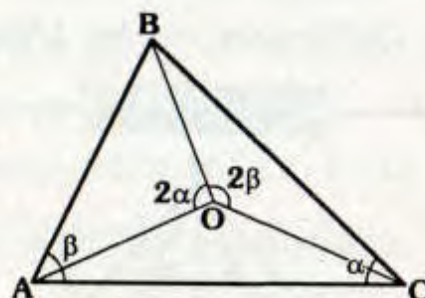
El $\triangle MBHO$ es inscriptible.

$\Rightarrow m\angle NBH = m\angle MOH = \theta$

- Por el teorema de los puntos medios en el $\triangle MNL \Rightarrow MB = BN$, con lo cual el $\triangle MNO$ es isósceles, es decir $ON = R$.

\therefore O: Circuncentro del $\triangle MNL$.

7.16

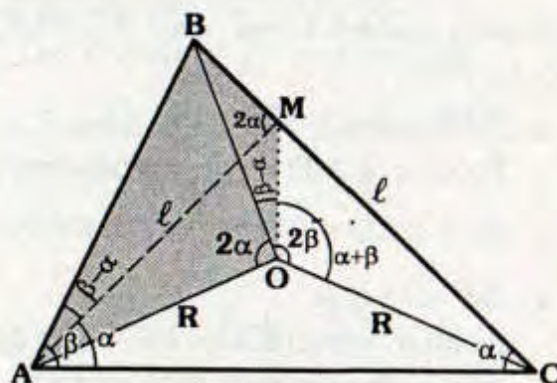


Si $m\angle BOA = 2(m\angle ACB) = 2\alpha$ y

$m\angle BOC = 2(m\angle BAC) = 2\beta$

\Rightarrow **O: Circuncentro del $\triangle ABC$**

Demostración:



- Se ubica M en \overline{BC} tal que $AM = MC = l$, con ello $m\angle MAC = \alpha$ y por ángulo exterior $m\angle AMB = 2\alpha$.

- Dado que:

$$m\angle BMA = m\angle BOA = 2\alpha$$

El $\triangle ABMO$ es inscriptible.

$$\Rightarrow m\angle BOM = m\angle BAM = \beta - \alpha$$

- En "O": $m\angle AOM = m\angle MOC = \alpha + \beta$

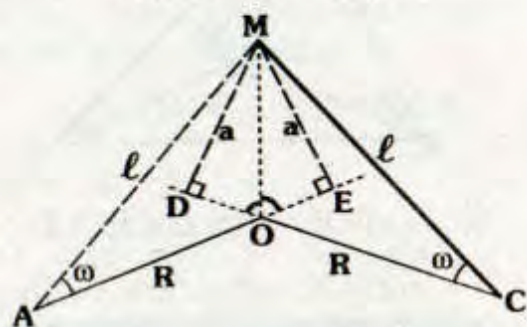
- De la observación posterior:

$$AO = OC = R$$

- Como $AO = OB = OC$

\therefore O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

Observación



Si:

$$m\angle AOM = m\angle MOC = \alpha + \beta \text{ y}$$

$$AM = MC = \ell,$$

vamos a demostrar que $AO = OC$, para ello:

- Prolongamos \overline{AO} y \overline{CO} hasta E y D, tal que \overrightarrow{MD} y \overrightarrow{ME} perpendiculares a \overrightarrow{CO} y \overrightarrow{AO} respectivamente.

- Se nota que:

$$m\angle MOE = m\angle MOD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

por el teorema de la bisectriz.

$$\Rightarrow MD = ME = a$$

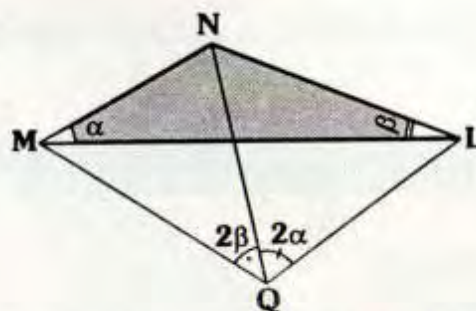
- $\triangle MDC \cong \triangle MAE$

$$\Rightarrow m\angle MAE = m\angle MCD = \omega$$

- $\triangle AMO \cong \triangle MOC$ (LAL)

$$\therefore AO = OC = R$$

7.17

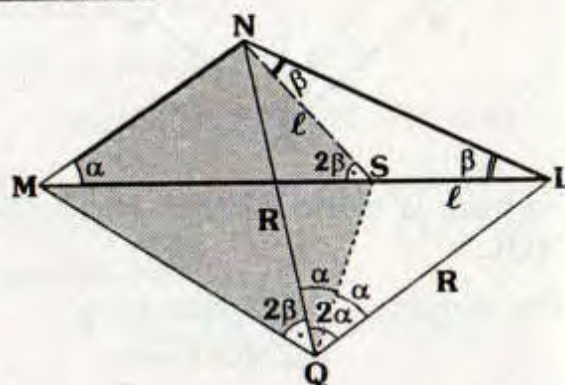


$$\text{Si: } m\angle NQL = 2(m\angle NML) = 2\alpha \text{ y}$$

$$m\angle MON = 2(m\angle NLM) = 2\beta$$

\Rightarrow **Q: Circuncentro del $\triangle MNL$**

Demostración:



- Se ubica el punto S en \overline{ML} , tal que $NS = SL = \ell$

$$\Rightarrow m\angle SNL = m\angle SLN = \beta$$

y por ángulo exterior $m\angle NSM = 2\beta$.

- Puesto que:

$$m\angle NSM = m\angle NQM = 2\beta$$

El $\triangle MNSQ$ es inscriptible.

$$\Rightarrow m\angle NQS = m\angle NMS = \alpha$$

- En "Q": $m\angle SQL = \alpha$

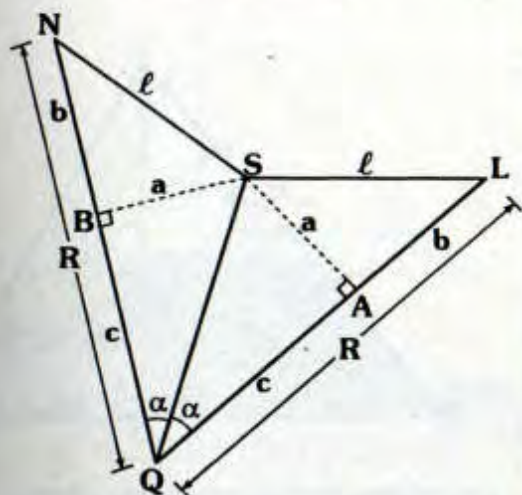
- De la observación siguiente:

$$NQ = QL = R$$

- Por el criterio 7.14 se concluye.

\therefore Q: Circuncentro del $\triangle MNL$

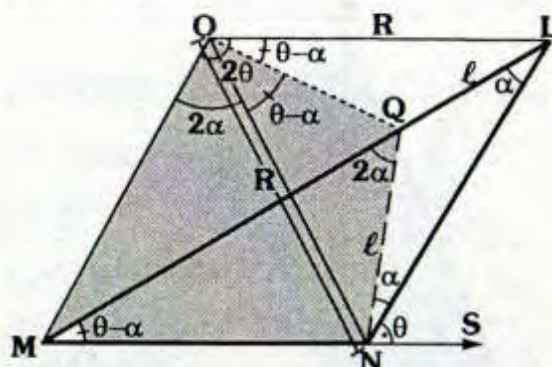
Observación



Se sabe que $m\angle NQS = m\angle SQL = \alpha$ y $NS = SL = l$, con lo cual demostraremos que $NQ = QL$, para ello.

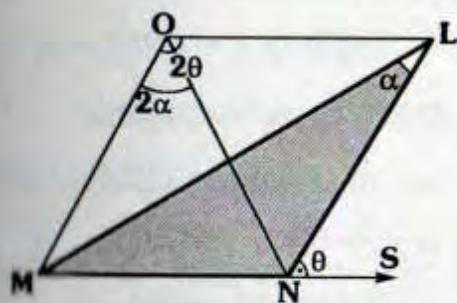
- Trazamos \overline{SB} y \overline{SA} perpendiculares a \overline{NQ} y \overline{QL} .
- Por el teorema de la bisectriz $\Rightarrow BS = SA = a$ y $BQ = QA = c$.
- $\triangle NBS \cong \triangle SAL$
 $\Rightarrow NB = AL = b$
- Con lo cual se nota: $NQ = QL = R$

Demostración:



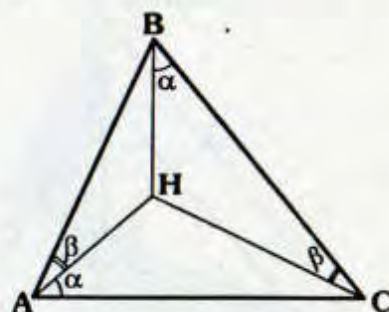
- Se ubica Q en \overline{ML} , tal que:
 $NQ = QL = l \Rightarrow m\angle QNL = \alpha$
y $m\angle NQM = 2\alpha$
- Como $m\angle MON = m\angle MQN = 2\alpha$
 $\Rightarrow \triangle MOQN$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle QON = m\angle QMN = \theta - \alpha$
- En "O": $m\angle QOL = \theta - \alpha$
- Dado que:
 $m\angle NOQ = m\angle QOL = \theta - \alpha$
y $NQ = QL = l$
de la observación del criterio 7.16 tenemos que $ON = OL = R$.
- Del criterio 7.11 se concluye:
 $\therefore O$: circuncentro de $\triangle MNL$.

7.19



- b) $m\angle MON = 2(\angle MLN) = 2\alpha$ y
 $m\angle MOL = 2(m\angle LNS) = 2\theta$

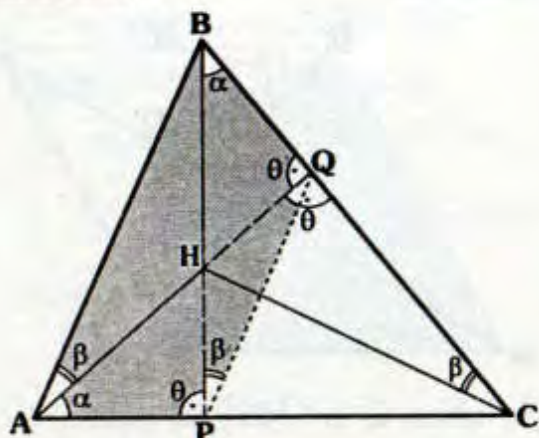
O: Circuncentro del $\triangle MNL$



- Si: $m\angle BAH = m\angle BCH = \beta$ y
 $m\angle HBC = m\angle HAC = \alpha$

H: Ortocentro del $\triangle ABC$

Demostración:



- Prolongamos \overline{AH} y \overline{BH} hasta que corten a \overline{BC} y \overline{AC} en Q y P.

- Debido a que:

$$m\angle QAP = m\angle QBP = \alpha$$

El $\triangle ABQP$ es inscriptible:

$$\Rightarrow m\angle BAQ = m\angle BPQ = \beta \quad \text{y}$$

$$m\angle APB = m\angle AQB = \theta$$

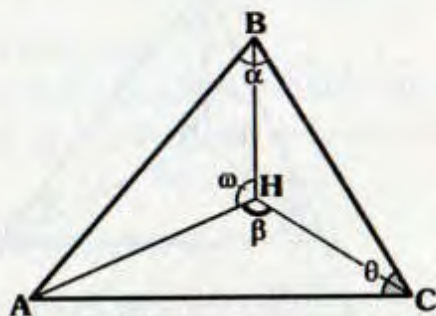
- Como $m\angle HPQ = m\angle HCQ = \beta \Rightarrow$ el $\triangle PHQC$ es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle HPA = m\angle HQC = \theta$$

- En "Q": $\theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$, con lo cual \overline{AQ} y \overline{BP} son alturas del $\triangle ABC$, entonces se concluye.

\therefore H: Ortocentro del $\triangle ABC$.

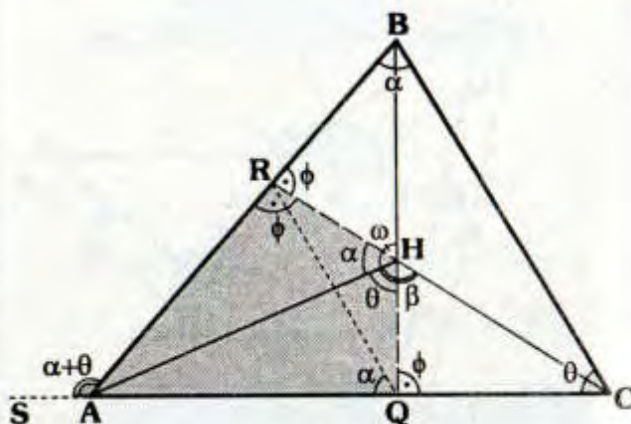
7.20



$$\text{Si : } \alpha + \beta = \theta + \omega = 180^\circ$$

\Rightarrow **H: Ortocentro del $\triangle ABC$**

Demostración



- Prolongamos \overline{BH} y \overline{CH} hasta que corten a \overline{AC} y \overline{AB} en Q y R.

- En "H", de las condiciones :

$$m\angle RHA = \alpha \quad \text{y} \quad m\angle AHQ = \theta$$

- Puesto que:

$$m\angle RAS = m\angle RHQ = \alpha + \theta$$

El $\triangle ARHQ$ es inscriptible:

$$\Rightarrow m\angle ARH = m\angle HQC = \phi \quad \text{y}$$

$$m\angle RQA = m\angle RHA = \alpha$$

- Luego ya que:

$$m\angle RQA = m\angle RBC = \alpha,$$

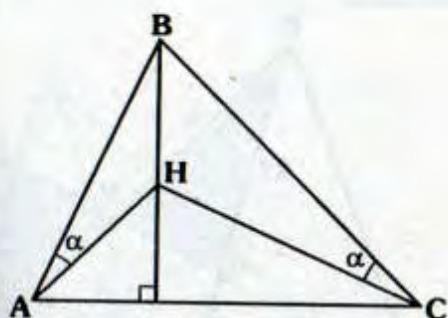
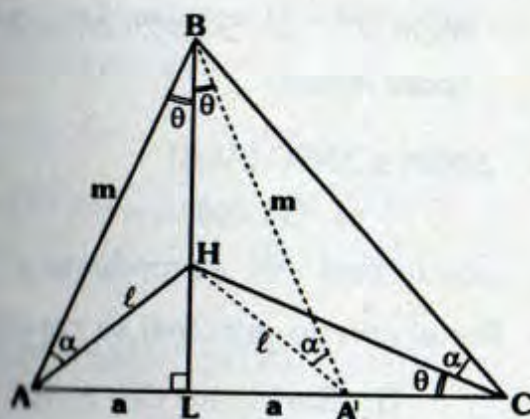
El $\triangle RBCQ$ es inscriptible:

$$\Rightarrow m\angle BRC = m\angle BQC = \phi$$

- En "R": $\phi + \phi = 180^\circ \Rightarrow \phi = 90^\circ$, con lo cual \overline{BQ} y \overline{CR} son alturas del $\triangle ABC$.

\therefore H: Ortocentro del $\triangle ABC$.

7.21

Si $\triangle ABC$:Escaleno, \overline{BL} es altura del $\triangle ABC$
y $m\angle BAH = m\angle BCH = \alpha$. \Rightarrow **H: Ortocentro del $\triangle ABC$** DemostraciónSe ubica A' en \overline{LC} , tal que:

$$AL = A'L = a$$

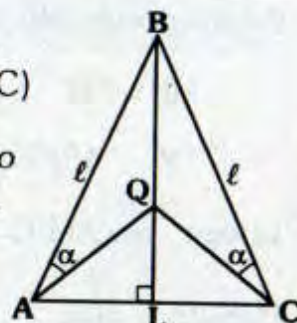
Con lo cual: $AH = HA' = \ell$
y $AB = A'B = m$. $\triangle ABH \cong \triangle A'BH$ (LLL)

$$\Rightarrow m\angle BA'H = m\angle BAH = \alpha \quad \text{y} \\ m\angle ABH = m\angle A'BH = \theta$$

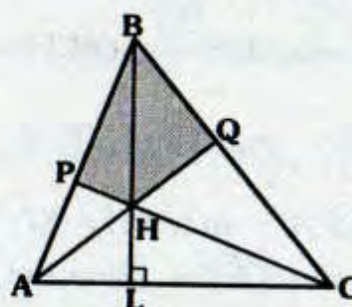
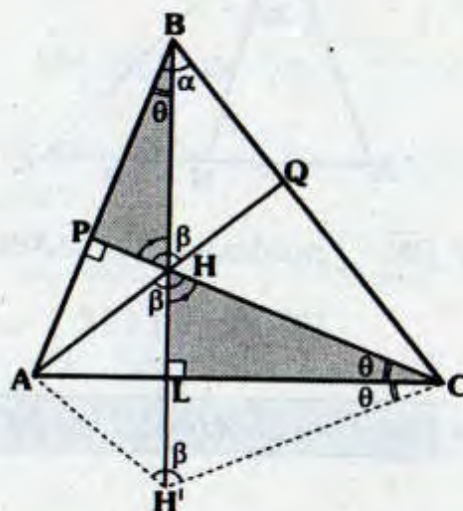
Ya que: $m\angle HA'B = m\angle HCB = \alpha$ El $\triangle BCA'H$ es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle HBA' = m\angle HCA' = \theta$$

• Luego por el criterio 7.19.

 \therefore H: Ortocentro del $\triangle ABC$.Cuidado:Si $\triangle ABC$:
Isósceles ($AB = BC$)Para todo punto
de la altura BL
del $\triangle ABC$, se
cumple que: $m\angle BAQ = m\angle BCQ = \alpha$, por lo tanto
Q no es ortocentro.

7.22

Si \overline{BL} es altura del $\triangle ABC$ y el
 $\triangle PBQH$ es inscriptible. \Rightarrow **H: Ortocentro del $\triangle ABC$** Demostración:

- Como el $\triangle PBQH$ es inscriptible:

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

- Prolongamos \overline{BL} hasta H' tal que:

$$HL = LH' \Rightarrow m\angle LCH' = \theta$$

$$\text{y } \triangle AHC \cong \triangle AH'C$$

$$\text{Luego: } m\angle AH'C = \beta$$

- Debido a que:

$$m\angle ABC + m\angle AH'C = 180^\circ$$

El $\triangle ABCH'$ es inscriptible:

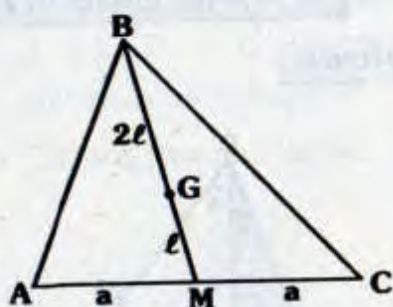
$$\Rightarrow m\angle ABH' = m\angle ACH' = \theta$$

- $\triangle HLC$: $m\angle LHC = 90^\circ - \theta$

- En $\triangle BPH$: $m\angle APH = 90^\circ$ con ello tendremos \overline{CP} es altura del $\triangle ABC$.

$\therefore H$ es el ortocentro del $\triangle ABC$.

7.23

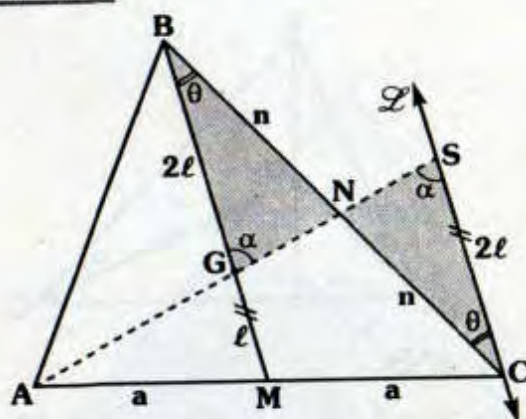


Si \overline{BM} : mediana del $\triangle ABC$ y

$$BG = 2(GM) = 2l$$

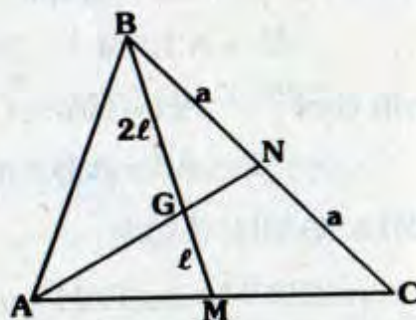
\Rightarrow **G: Baricentro del $\triangle ABC$**

Demostración



- Trazamos $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{MG}$.
- Luego la prolongación de \overline{AG} corta a \overline{BC} y \overleftrightarrow{L} en N y S .
- Dado que: $AM = MC = a$ y $\overline{MG} \parallel \overline{SC} \Rightarrow SC = 2(GM) = 2l$ (base media).
- $\triangle BGN \cong \triangle NSC$ (ALA)
 $\Rightarrow BN = NC = n$,
con lo cual \overline{AN} es mediana.
- Por el criterio principal se concluye.
 $\therefore G$: Baricentro del $\triangle ABC$.

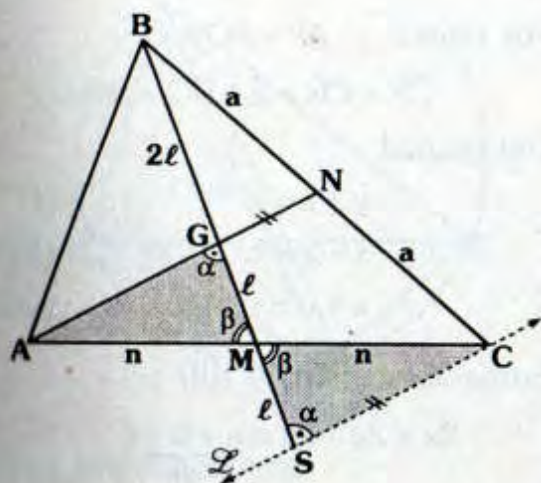
7.24



$$\text{Si: } BG = 2(GM) = 2l \text{ y}$$

$$BN = NC = a$$

\Rightarrow **G: Baricentro del $\triangle ABC$**

Demostración:

- Por C trazamos $\overleftrightarrow{CS} \parallel \overline{AN}$.
- Luego prolongamos \overline{BM} hasta que corte a \overleftrightarrow{CS} en S.
- Puesto que:

$$BN = NC = a \quad \text{y} \quad \overline{SC} \parallel \overline{GN}$$

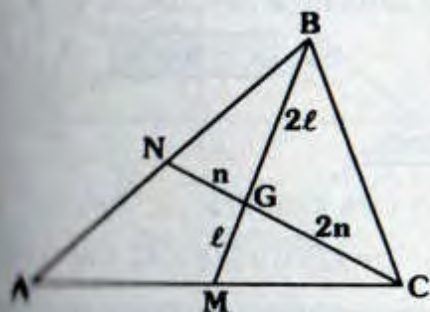
$$\Rightarrow BG = GS = 2\ell.$$

- $\triangle AGM \cong \triangle MSC$ (ALA)

$$\Rightarrow AM = MC = n$$

por lo cual \overline{BM} es mediana.

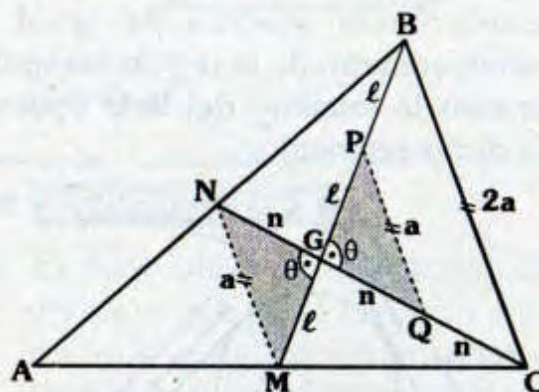
$\therefore G$: Baricentro del $\triangle ABC$



$$\text{Si: } BG = 2(GM) = 2\ell \quad \text{y}$$

$$CG = 2(GN) = 2n$$

\Rightarrow **G: Baricentro del $\triangle ABC$**

Demostración:

- Se traza la base media \overline{PQ} del $\triangle BGC$:

$$\Rightarrow BC = 2(PQ) = 2a$$

$$\text{y } \overline{BC} \parallel \overline{PQ}$$

- $\triangle MGN \cong \triangle GPQ$ (LAL)

$$\Rightarrow MN = a \quad \text{y} \quad \overline{MN} \parallel \overline{PQ}$$

- Como:

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \quad \text{y} \quad MN = \frac{BC}{2} = a$$

entonces \overline{MN} es base media del $\triangle ABC$:

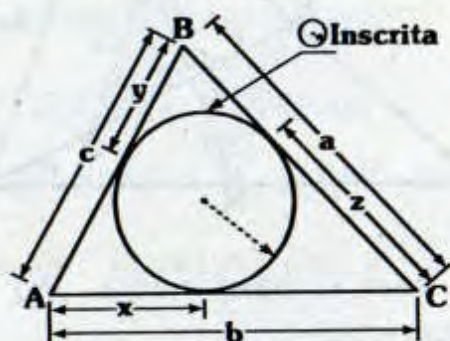
$$\Rightarrow AN = NB \quad \text{y} \quad AM = MC$$

$\therefore G$: Baricentro del $\triangle ABC$.

8. TEOREMAS

8.1. ASOCIADOS AL INCENTRO

- (A) En todo triángulo la longitud del segmento contenido en un lado cuyos extremos son un vértice y un punto de tangencia determinado por la circunferencia inscrita es igual al semiperímetro de la región triangular menos la longitud del lado opuesto a dicho segmento.

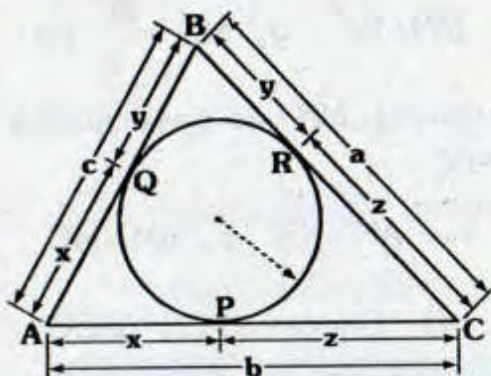


Se cumple:

$$\begin{aligned} x &= p - a \\ y &= p - b \\ z &= p - c \end{aligned}$$

Donde : $p = \frac{a+b+c}{2}$

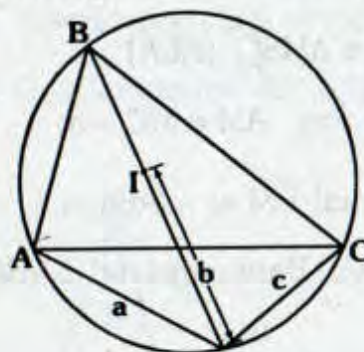
Demostración:



- Sean P, Q y R los puntos de tangencia.

- Por teorema: $AP = AQ = x$;
 $CP = CR = z$; $BQ = BR = y$
- Del gráfico :
 $y + z = a \quad \dots (I)$
 $x + z = b \quad \dots (II)$
 $x + y = c \quad \dots (III)$
- Sumando (I), (II) y (III) :
 $2x + 2y + 2z = \underbrace{a+b+c}_{2p}$
 $\Rightarrow x + y + z = p$
- De (I), (II) y (III) :
 $x = p - a$; $y = p - b$ y $z = p - c$

- (B) En todo triángulo el punto de intersección entre la bisectriz de un ángulo interior y la circunferencia circunscrita equidista de los otros vértices y del incentro de dicho triángulo.

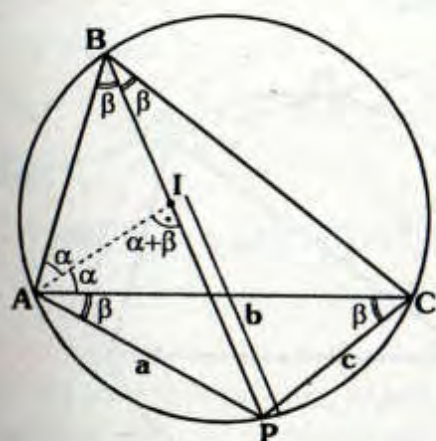


Si I: Incentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow a = b = c$$

Demostración:

- Como I es incentro.
 $\Rightarrow m\angle BAI = m\angle CAI = \alpha$ y
 $m\angle ABI = m\angle IBC = \beta$



- Por ángulo inscrito:

$$m\angle CAP = m\angle ACP = \beta$$

$$\Rightarrow \Delta APC \text{ isósceles} \Rightarrow a = c$$

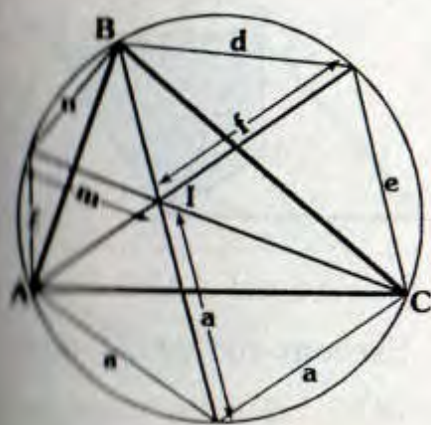
- ΔABI : Por ángulo exterior

$m\angle AIP = \alpha + \beta$, entonces el ΔAIP es isósceles $\Rightarrow a = b$

$$\therefore a = b = c$$

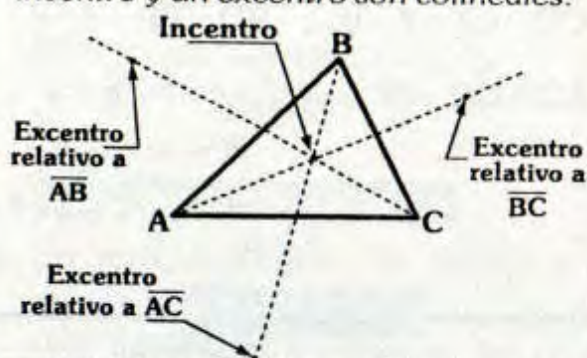
Observación

también se cumple: $m = n = \ell$ y $d = e = f$



Importante:

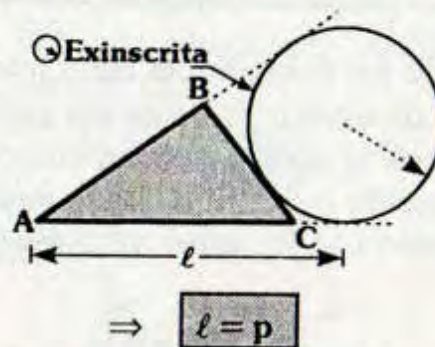
En todo triángulo un vértice, el incentro y un excentro son colineales.



8.2 ASOCIADOS AL EXCENTRO

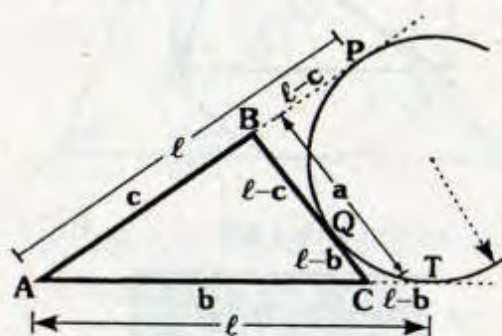
- Ⓐ En todo triángulo la distancia de un vértice al punto de contacto entre la circunferencia exinscrita, relativa al lado opuesto al vértice mencionado, y la prolongación de un lado es igual al semiperímetro de la región triangular en mención.

p: semiperímetro de la región ABC.



$$\Rightarrow \ell = p$$

Demostración

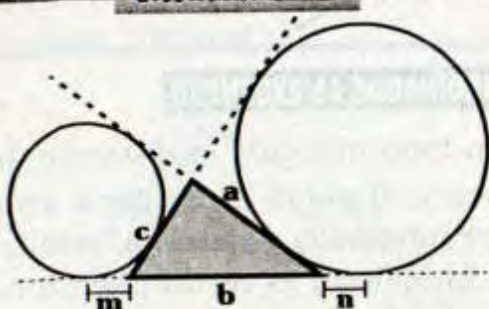


- Sean los puntos de tangencia P, Q y T.
- Por teorema: $AP = AT = \ell$
 $CQ = CT = \ell - b$; $BQ = BP = \ell - c$
- $BQ + QC = BC \Rightarrow \ell - c + \ell - b = a$

$$2\ell = \underbrace{a + b + c}_{2p}$$

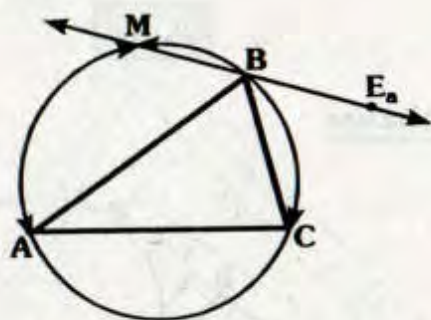
$$\therefore \ell = p$$

Observación



Esto ocurre por que: $b + n = p$
 $b + m = p$
 $\therefore m = n$

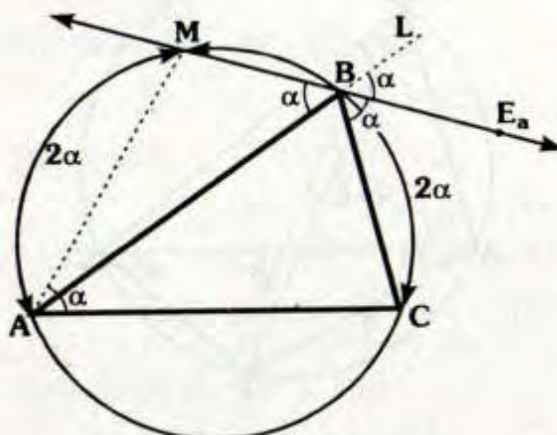
- (B)** Dado un triángulo, la recta que pasa por un vértice y uno de sus excentros biseca al arco de circunferencia circunscrita a dicho triángulo cuyos extremos son los otros vértices.



Si E_a es excentro relativo a \overline{BC} .

$$\Rightarrow m\widehat{AM} = m\widehat{MBC}$$

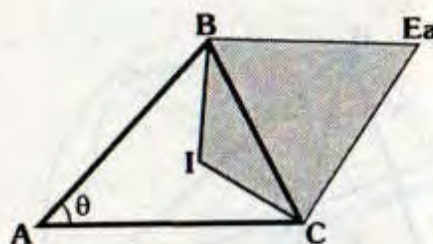
Demostración:



- $\overline{BE_a}$: Bisectriz del $\angle LBC$
 $m\angle LBE_a = m\angle CBE_a = \alpha$
- $\triangle AMBC$: Inscrito $\Rightarrow m\angle MAC = \alpha$
- Por ángulo inscrito:
 $\therefore m\widehat{AM} = m\widehat{MBC} = 2\alpha$

8.3 ASOCIADOS AL INCENTRO Y EXCENTRO

- (A)** En todo triángulo, el cuadrilátero cuyos vértices son el incentro, excentro y los extremos del lado al cual es relativo el excentro, es inscriptible.



Si I: Incentro del $\triangle ABC$

E_a : Excentro del $\triangle ABC$ relativo a \overline{BC} .

$$\Rightarrow \triangle BICE_a : \text{Inscriptible}$$

Demostración

- Por teoremas básicos:

$$m\angle BIC = 90^\circ + \frac{\theta}{2}; \quad m\angle BE_aC = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

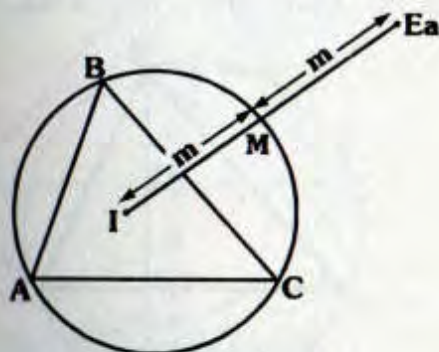
- Puesto que:

$$m\angle BIC + m\angle BE_aC = 180^\circ$$

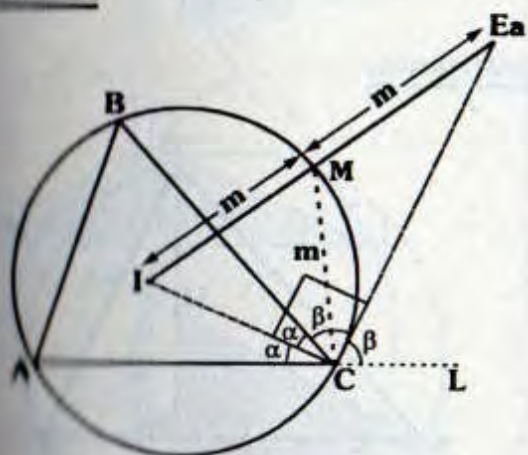
$\therefore \triangle BICE_a$: Inscriptible.

- II La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento cuyos extremos son el incentro y excentro de dicho triángulo.

Si I: incentro y E_a : excentro



$$\Rightarrow \boxed{IM = ME = m}$$

Demostración:

- Por el teorema 8.1-B: $IM = MC = m$

- Como \overline{CI} y $\overline{CE_a}$ son bisectrices:

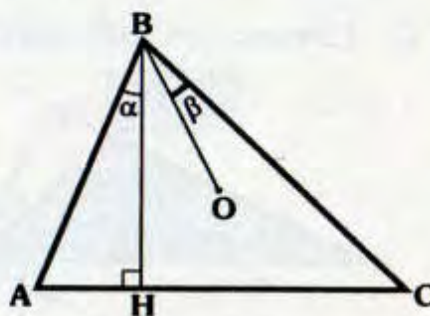
$$m\angle BCE_a = m\angle E_aCL = \beta$$

$$m\angle ACI = m\angle BCI = \alpha$$

- En "C": $m\angle ICE_a = 90^\circ$.
- $\triangle ICE_a$: por teorema en el \triangle
 $\therefore IM = ME = m$

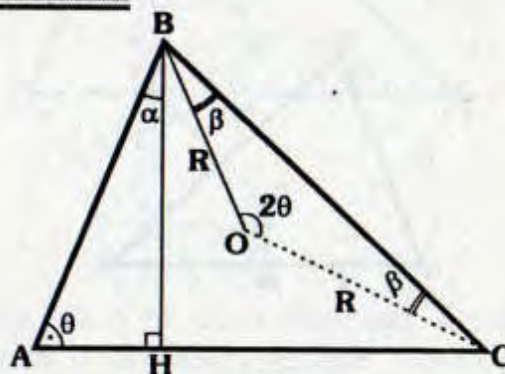
8.4 ASOCIADOS AL CIRCUNCENTRO

- A En todo triángulo, la altura y el circunradio trazadas del mismo vértice determinan ángulos de igual medida con los lados adyacentes de dicho triángulo.



Si \overline{BH} es altura del $\triangle ABC$ del circuncentro O.

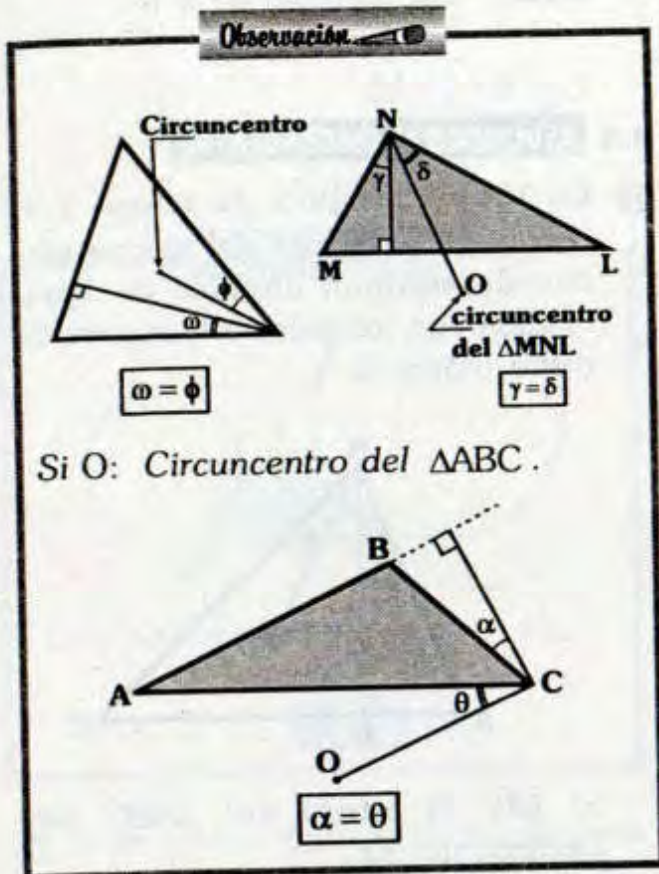
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

Demostración:

- Se sabe: $OB = OC = R$
- Por teorema:
 $m\angle BOC = 2(m\angle BAH) = 2\theta$

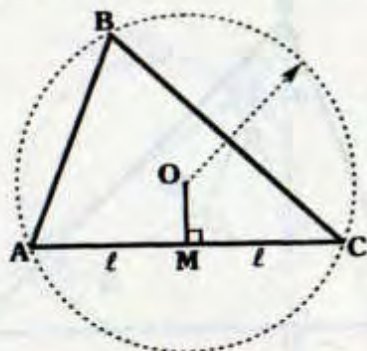
- $\triangle ABH$: $\alpha + \theta = 90^\circ$
- $\triangle BOC$: $\beta + \beta + 2\theta = 180^\circ \Rightarrow \beta + \theta = 90^\circ$
 $\therefore \alpha = \beta$

Observación



Si O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

- Ⓑ La proyección ortogonal del circuncentro de un triángulo hacia un lado es el punto medio de dicho lado.



Si O: Circuncentro del $\triangle ABC$ y $OM \perp AC$.

$\Rightarrow AM = MC = l$

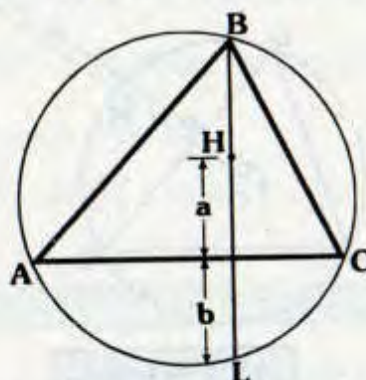
Demostración

- Como \overline{AC} es cuerda y $OM \perp AC$, por teorema de circunferencia.
 $\therefore AM = MC = l$

8.5 ASOCIADOS AL ORTOCENTRO

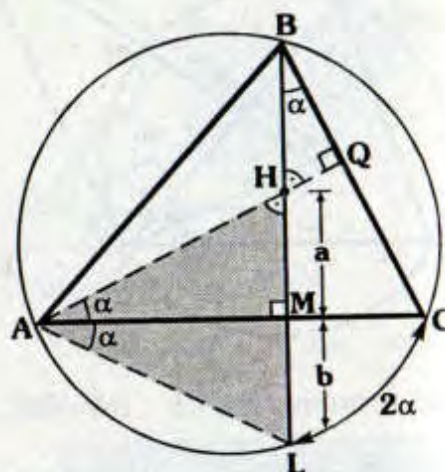
- Ⓐ El segmento cuyos extremos son el ortocentro y el punto de corte entre la altura o su prolongación con la circunferencia circunscrita, es bisecado por el lado al cual es relativa dicha altura.

Si H: Ortocentro del $\triangle ABC$.



$\Rightarrow a = b$

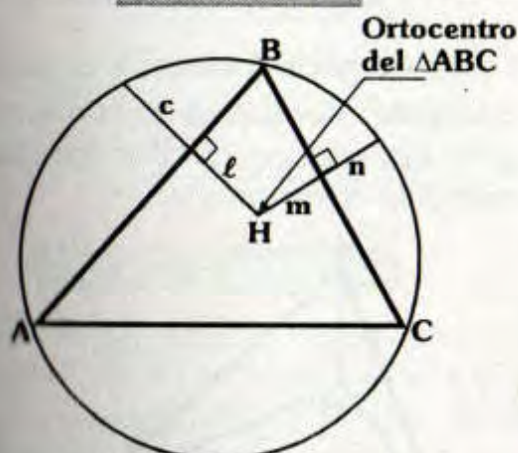
Demostración:



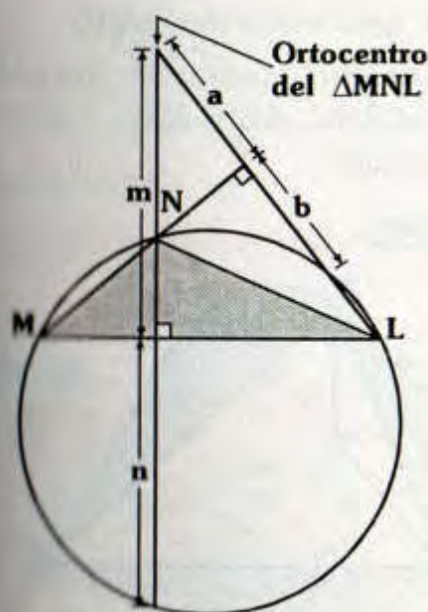
- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AQ}$ y \overline{BM} son alturas.
- Se observa: $m\angle HBQ = m\angle HAM = \alpha$
- Por ángulo inscrito: $m\angle LAC = \alpha$
- Puesto que \overline{AM} es altura y bisectriz del $\triangle AHL$, podemos afirmar que \overline{AM} es mediana.

$$\therefore a = b$$

Observación



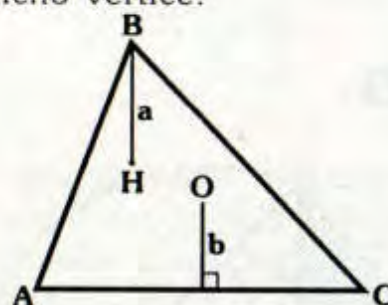
$$\Rightarrow a = \ell \text{ y } m = n$$



$$\Rightarrow a = b \text{ y } m = n$$

8.6. ASOCIADOS AL CIRCUNCENTRO Y ORTOCENTRO

- (A) La distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro hacia el lado opuesto a dicho vértice.



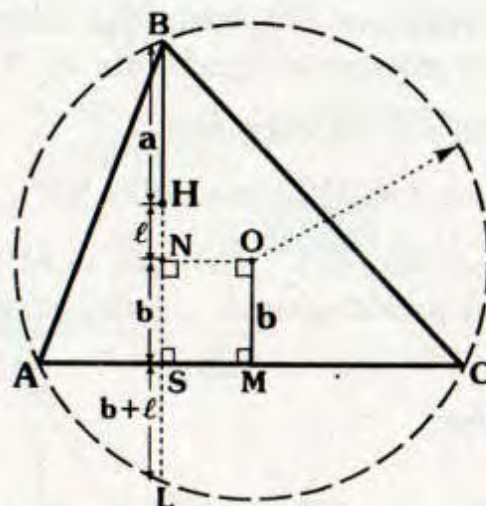
Si H: Ortocentro y

O: Circuncentro

$$\Rightarrow a = 2b$$

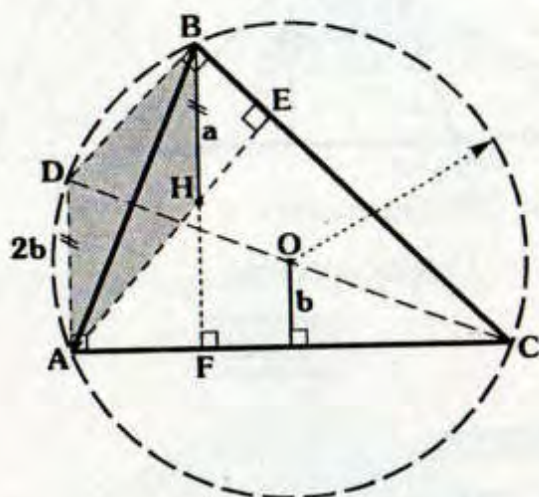
Demostración:

Método 1

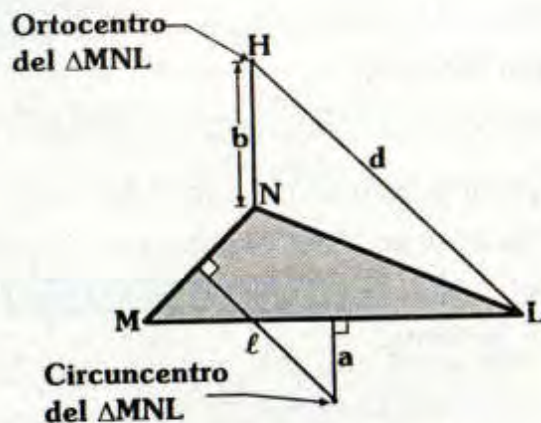
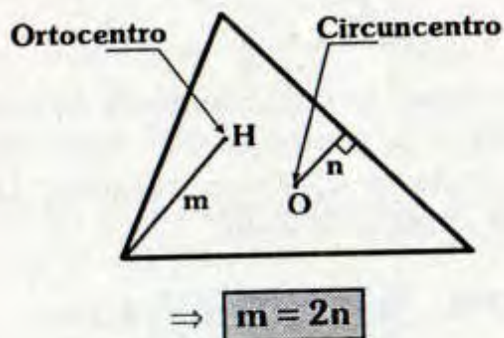


- Se traza la circunferencia circunscrita y se prolonga \overline{BH} hasta que la corte el L, luego trazamos \overline{ON} perpendicular a \overline{BL} .
- MONS: Rectángulo $\Rightarrow NS = b$

- ## Método 2

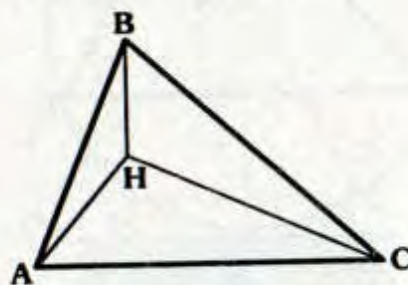


- También:**



$$\Rightarrow \boxed{b = 2a \text{ y } d = 2\ell}$$

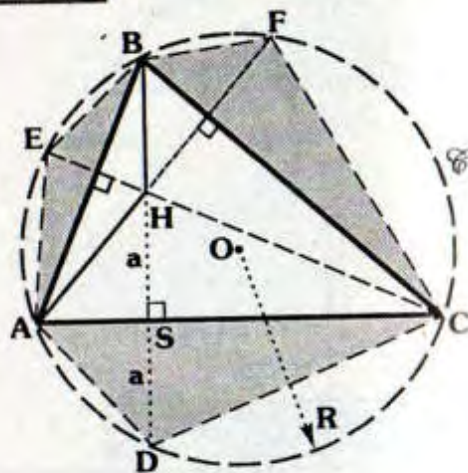
- Ⓑ Los triángulos formados al unir el ortocentro con los vértices del triángulo tienen circunradios iguales al triángulo mencionado.



Si H: ortocentro del $\triangle ABC$.

⇒ Los circunradios de los triángulos ABC, ABH, BHC y AHC son iguales.

Demostración:

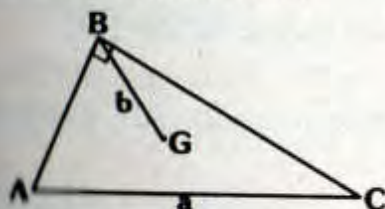


- Trazamos la circunferencia circunscrita y ubicamos el circuncentro O.
- Luego prolongamos \overline{BH} hasta D ($D \in \mathcal{C}$), entonces $HS = SD = a$.
- Se observa que los triángulos ABC y ADC tienen el mismo circunradio R.
- $\triangle AHC \cong \triangle ADC$ (LLL) \Rightarrow por circunradios homólogos; R es el circunradio del $\triangle AHC$.
- Análogamente para $\triangle AEB$ y $\triangle BFC$.

$$R: \begin{cases} \text{Circunradio del } \triangle ABC. \\ \text{Circunradio del } \triangle AHC. \\ \text{Circunradio del } \triangle AEB. \\ \text{Circunradio del } \triangle BFC. \end{cases}$$

8.9. ASOCIADOS AL BARICENTRO

- En todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es el triple de la distancia del baricentro hacia el vértice del ángulo recto.

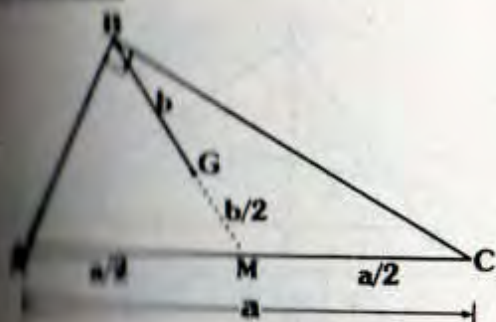


(i) $m\angle ABC = 90^\circ$ y

(ii) Baricentro del $\triangle ABC$

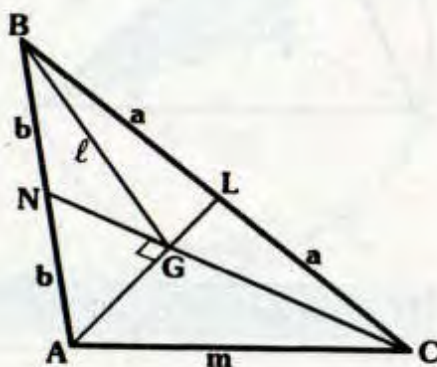
$$\Rightarrow a = 3b$$

Demostración:



- Por definición: $AM = MC = a/2$
- Por el teorema $\triangle \Rightarrow BM = a/2$
- Por teorema básico: $GM = b/2$
- $BM = BG + GM \Rightarrow \frac{a}{2} = b + \frac{b}{2}$
 $\therefore a = 3b$

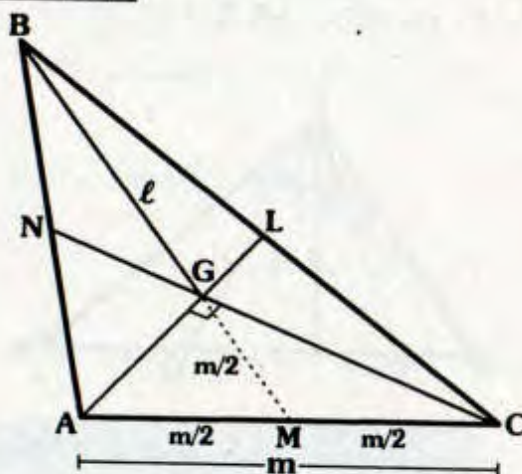
- (B) Si dos medianas son perpendiculares, la distancia del baricentro al vértice desde el cual no se ha trazado la mediana, es igual a la longitud del lado opuesto al vértice mencionado.



Si: \overline{AL} y \overline{CN} son medianas perpendiculares.

$$\Rightarrow m = l$$

Demostración:

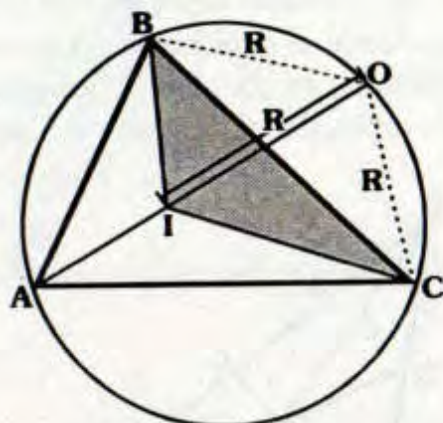


- Sabemos: $AM = MC = m/2$
- Por el teorema \triangle : $GM = m/2$
- Por teorema básico: $\ell = 2(m/2)$

$$\therefore \ell = m$$

8.8 TEOREMAS ADICIONALES

(A) Si I: incentro del $\triangle ABC$

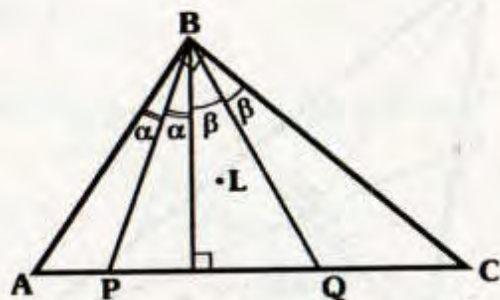


\Rightarrow **O: Circuncentro del $\triangle BIC$**

Demostración:

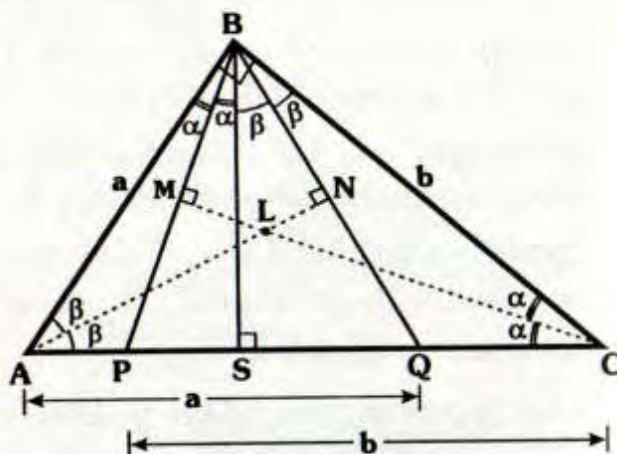
- Por el teorema 8.1.
 $BO = IO = CO = R$
 \therefore O: Circuncentro del $\triangle BIC$.

(B) Si L: Incentro del $\triangle ABC$.



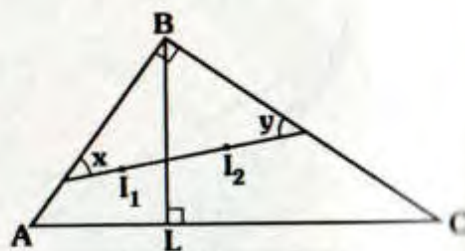
\Rightarrow **L: Circuncentro del $\triangle PBQ$**

Demostración:



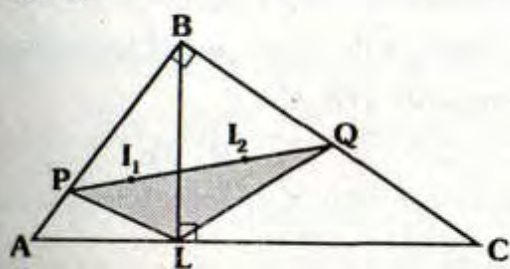
- En B: $m\angle PBC = 90^\circ - \alpha$.
- $\triangle PBS$: $m\angle BPS = 90^\circ - \alpha$.
- Con lo cual el $\triangle PBC$ es isósceles.
 $\Rightarrow BC = PC = b$
- Análogamente: $AB = AQ = a$
- \overline{CL} es bisectriz pues L es incentro del $\triangle ABC$. Como el $\triangle PBC$ es isósceles, \overline{CM} es altura y mediana, con lo cual
 \Leftrightarrow CM es mediatriz de \overline{PB} .
- Del mismo modo: \overline{AN} es mediatriz de \overline{BQ} .
 \therefore L es circuncentro del $\triangle PBQ$.

(C) Si I_1 : Incentro del $\triangle ABL$ e
 I_2 : Incentro del $\triangle BLC$.



\Rightarrow **$x = y = 45^\circ$**

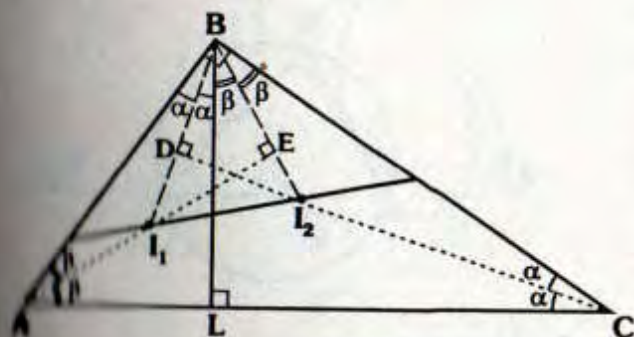
Además:



⇒ **B: Circuncentro del $\triangle PLQ$**

Demostración:

Paso 1



• Como I_1 e I_2 son incentros:

$$m\angle ABI_1 = m\angle I_1 BL = \alpha$$

$$m\angle BAI_1 = m\angle I_1 AL = \beta$$

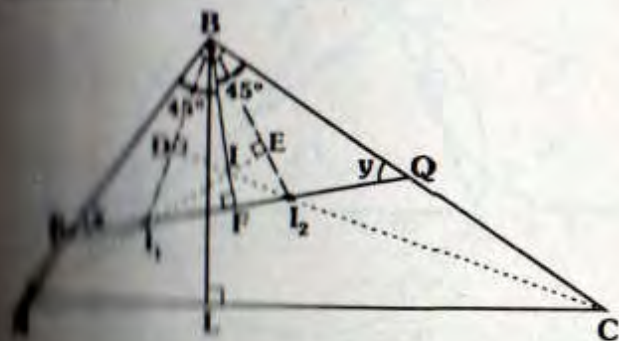
$$m\angle BCI_2 = m\angle I_2 CL = \alpha$$

$$m\angle CBI_2 = m\angle I_2 BC = \beta$$

• De la demostración anterior:

$$m\angle BDC = m\angle BEA = 90^\circ$$

Paso 2



• Se observa que:

I : Incentro del $\triangle ABC$

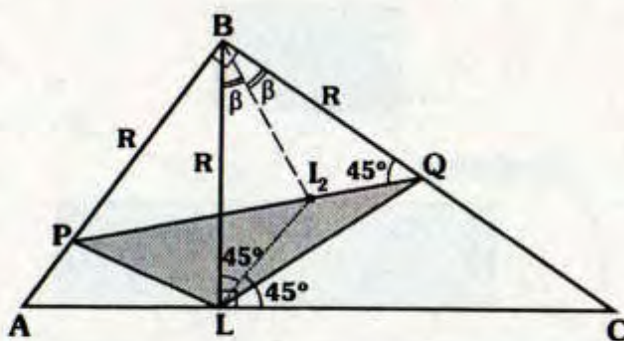
I : Ortocentro del $\triangle BI_1I_2$

⇒ $m\angle ABI = m\angle CBI = 45^\circ$ y \overline{BI} es altura del $\triangle BI_1I_2$

• Luego en el $\triangle PFB$:

$$x = y = 45^\circ$$

Paso 3



• Como $m\angle BQP = 45^\circ$

$$\Rightarrow PB = BQ = R$$

• En $\triangle BLC$: I_2 es incentro

$$\Rightarrow m\angle BLI_2 = m\angle I_2 LC = 45^\circ$$

• $\triangle BLI_2 \cong \triangle BQI_2$ (ALA)

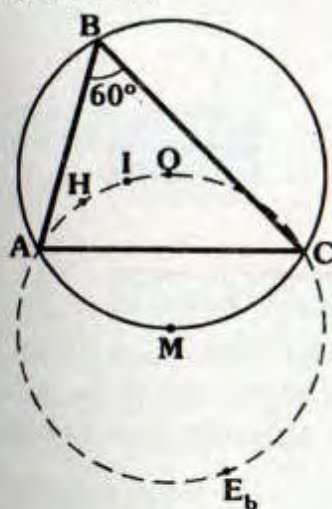
$$\Rightarrow BL = BQ = R$$

∴ B es el circuncentro del $\triangle PLQ$.

- Por el teorema 8.2(B): $m\widehat{AN} = m\widehat{NC}$
- Por el teorema 8.2(A): $AT = CQ = \ell$
- Como $\overline{OM} \perp \overline{AC} \Rightarrow AM = MC = m$
- Con lo cual N, O y M son colineales
- \overline{MN} , base media del trapecio TE_cE_aQ .

$$\therefore R + b = \frac{R_a + R_c}{2}$$

II Si $m\angle ABC = 60^\circ$



En el gráfico, A, C, el ortocentro (H), el incentro (I), el circuncentro (O) y el excentro (E_b) pueden ubicar en una circunferencia, cuyo centro será punto medio M del arco AC.

Demostración:

• Por teoremas básicos:

$$m\angle AHC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

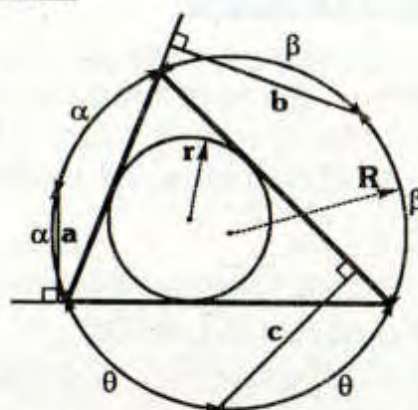
$$m\angle AIC = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ;$$

$$m\angle AOC = 2(60^\circ) = 120^\circ \quad y$$

$$m\angle AE_bC = 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = 60^\circ$$

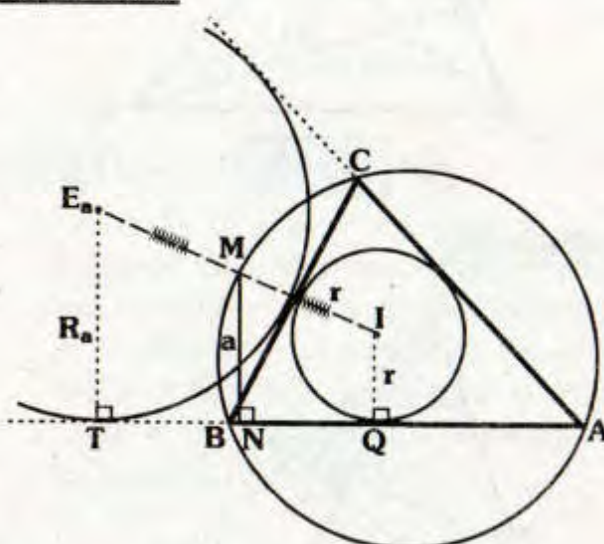
• A, H, I, O, C y E_b son concíclicos.

Aplicación:



Se cumple: $a + b + c = 2(R + r)$

Demostración:



- Se ubica el excentro (E_a).
- Por teorema 8.3(B) $E_aM = MI$
- \overline{MN} : Base media del trapecio E_aTQI

$$a = \frac{R_a + r}{2}$$
- De igual modo:

$$b = \frac{R_b + r}{2} \quad y \quad c = \frac{R_c + r}{2}$$

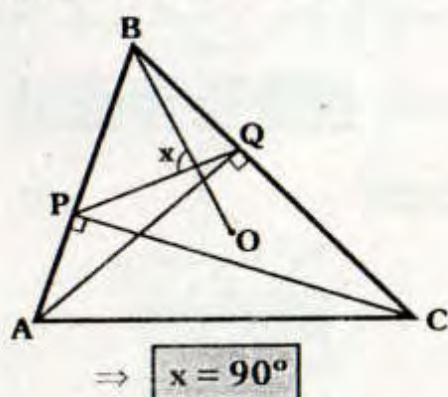
$$\Rightarrow a + b + c = \frac{R_a + R_b + R_c + 3r}{2}$$
- Pero: $R_a + R_b + R_c = 4R + r$ (Ver 8.10)

$$\therefore a + b + c = 2(R + r)$$

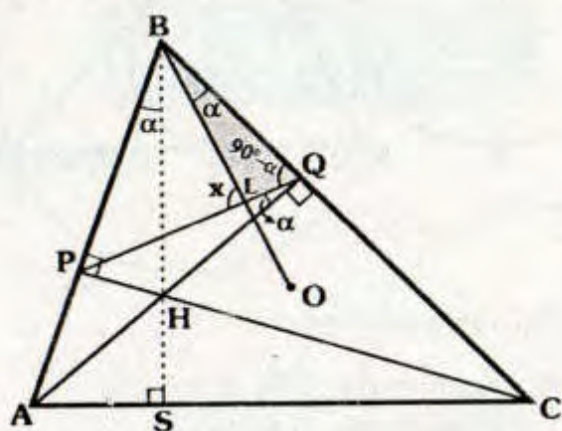
8.9 TEOREMA DE NAGEL

El segmento que une los pies de dos alturas es perpendicular al circunradio correspondiente al vértice desde el cual no se ha trazado la altura.

Si \overline{AQ} y \overline{CP} son alturas y O es el circuncentro del $\triangle ABC$.



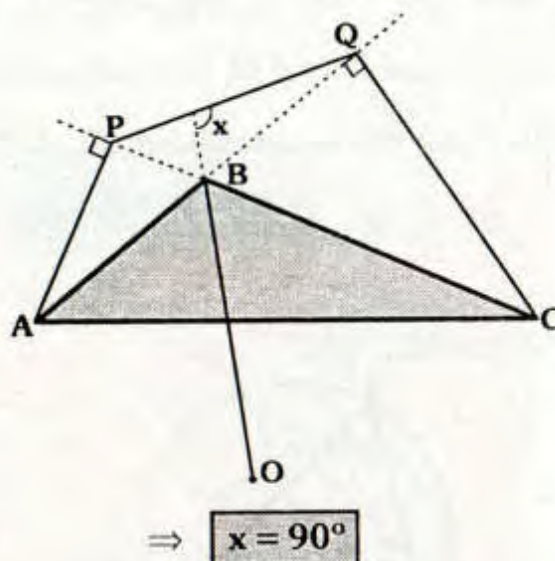
Demostración:



- Por el teorema 8.4.:
 $m\angle ABS = m\angle OBC = \alpha$
- $\triangle PBQH$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle PQH = \alpha$
- En "Q": $m\angle BQL = 90^\circ - \alpha$
- Luego en el $\triangle BLQ$:
 $x = \alpha + 90^\circ - \alpha$
 $\therefore x = 90^\circ$

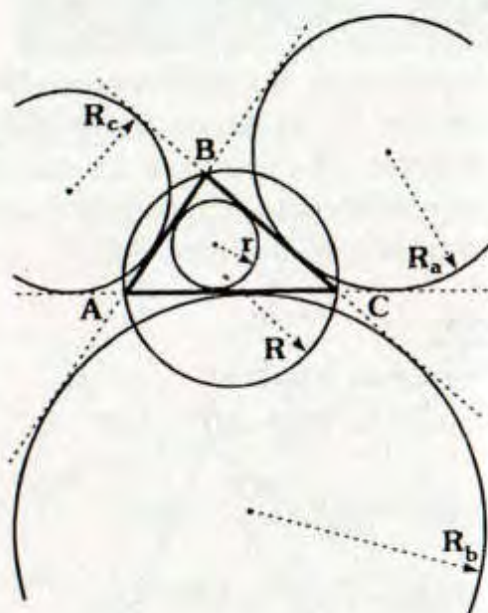
También:

Si \overline{AP} y \overline{CQ} son alturas y O es circuncentro del triángulo obtusángulo ABC.



8.10 TEOREMA DE STEINER

En todo triángulo, la suma de los tres exradios es igual a la suma del inradio y cuatro veces el circunradio.



Se cumple:

$$R_a + R_b + R_c = 4R + r$$

Demostración:

- Si "b" es la distancia del circuncentro hacia \overline{AC} .

- Por el teorema 8.8 (D):

$$R - b = \frac{R_b - r}{2}$$

- Por el teorema 8.8 (E):

$$R + b = \frac{R_a + R_c}{2}$$

$$\therefore R_a + R_b + R_c = 4R + r$$

- Por el teorema 8.8 (D):

$$R - a = \frac{R_a - r}{2}; \quad R - b = \frac{R_b - r}{2};$$

$$R - c = \frac{R_c - r}{2}$$

- Sumando las expresiones:

$$R - a + R - b + R - c = \frac{R_a - r}{2} + \frac{R_b - r}{2} + \frac{R_c - r}{2}$$

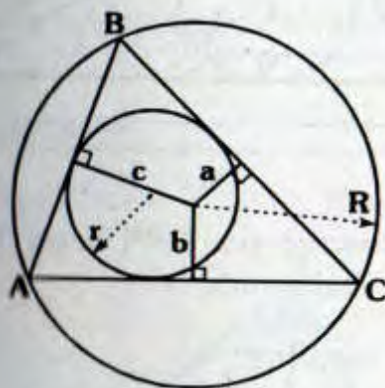
$$\Rightarrow 6R + 3r = \underbrace{R_a + R_b + R_c}_{4R+r} + 2(a + b + c) \quad (\text{T. Steiner})$$

$$\therefore R + r = a + b + c$$

8.11 TEOREMAS DE CARNOT**CARNOT 1****Caso 1**

En todo triángulo acutángulo la suma de las distancias del circuncentro hacia los lados es igual a la suma del inradio y circunradio.

Si $\triangle ABC$: Acutángulo



$$\Rightarrow a + b + c = R + r$$

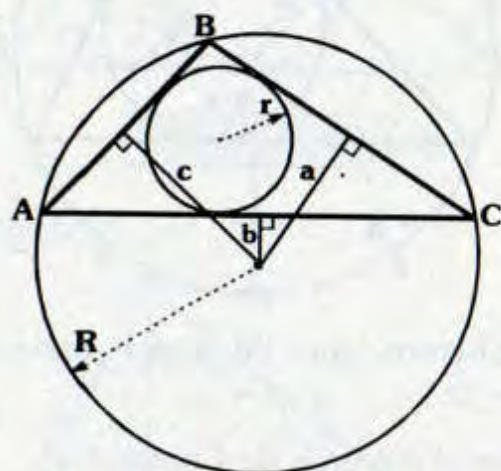
Demostración:

- Se observa que: $R - a$, $R - b$ y $R - c$ son las longitudes de las sagitas \overline{BC} , \overline{AC} y \overline{AB} .

Caso 2

En todo triángulo obtusángulo la suma de las distancias del circuncentro hacia los lados que determinan el ángulo obtuso menos la distancia hacia el otro lado es igual a la suma entre el circunradio con el inradio.

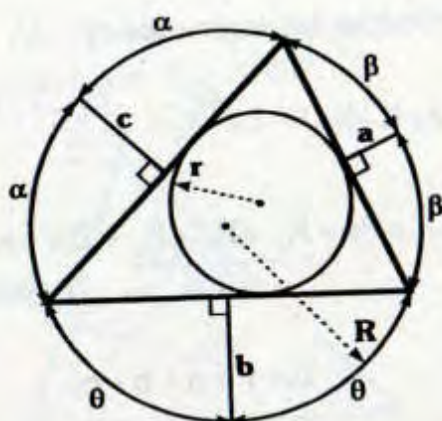
Si $\triangle ABC$: Obtusángulo



$$\Rightarrow a + c - b = R + r$$

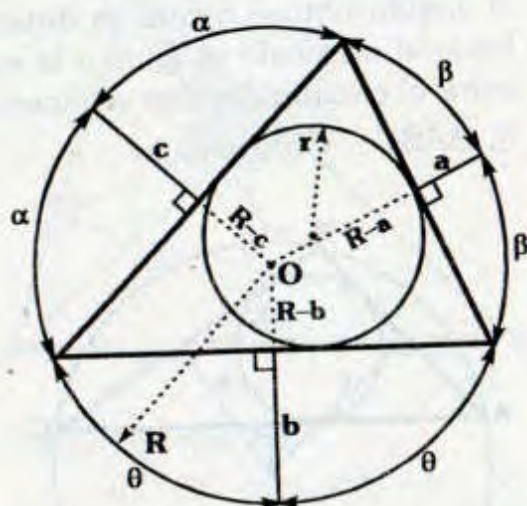
CARNOT 2

La suma de las longitudes de las sagitas correspondientes a los lados de un triángulo, tal que se encuentren en la región exterior, es igual al doble del circunradio menos el inradio.



$$a + b + c = 2R - r$$

Demostración:



- Sabemos que las sagitas concurren en O.

- Por el teorema de Carnot 1:

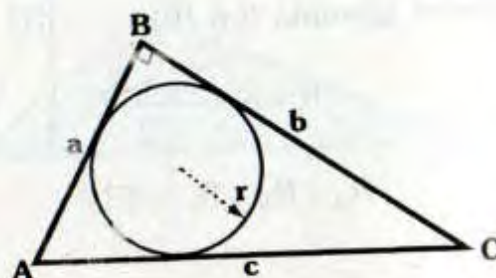
$$R - a + R - b + R - c = R + r$$

$$\therefore 2R - r = a + b + c$$

8.12 TEOREMA DE PONCELET

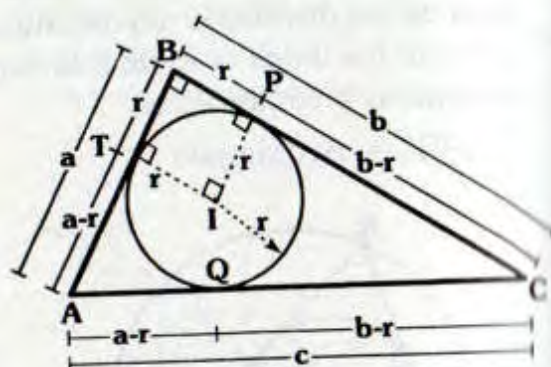
En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la longitud de la hipotenusa y el doble del inradio.

Si: $m\angle ABC = 90^\circ$ e I : inradio



$$\Rightarrow a + b = c + 2r$$

Demostración:



- Se observa que TBPI es un cuadrado cuyo lado mide "r".

- Por teorema:

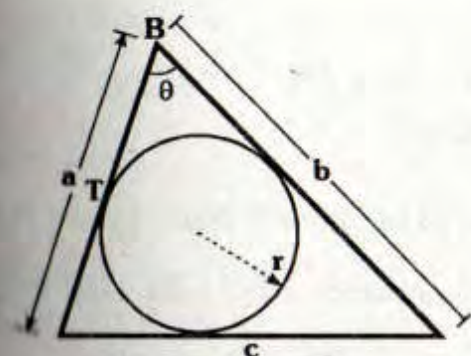
$$AT = AQ = a - r$$

$$CP = CQ = b - r$$

- $AC = AQ + QC \Rightarrow c = a - r + b + r$

$$\therefore c + 2r = a + b$$

Generalizando:



$$a + b = c + 2r \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

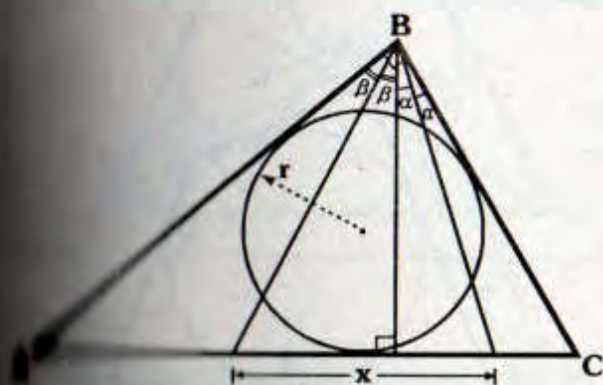
Para su demostración debemos aprovechar que $BT = r \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$, luego debemos proceder del mismo modo en el teorema anterior.

Nota

(Recíproco) Si en un triángulo la suma de las longitudes de dos lados es igual a la longitud del tercer lado y el doble del inradio, entonces se trata de un triángulo rectángulo.

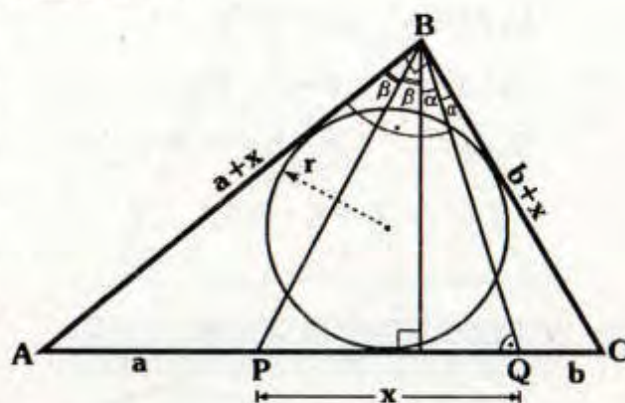
Aplicaciones:

● Si $m\angle ABC = 90^\circ$ y r : inradio



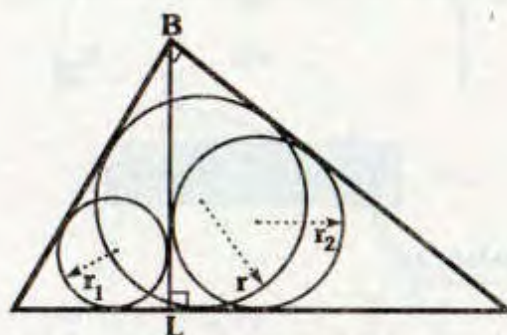
$$x = 2r$$

Demostración:



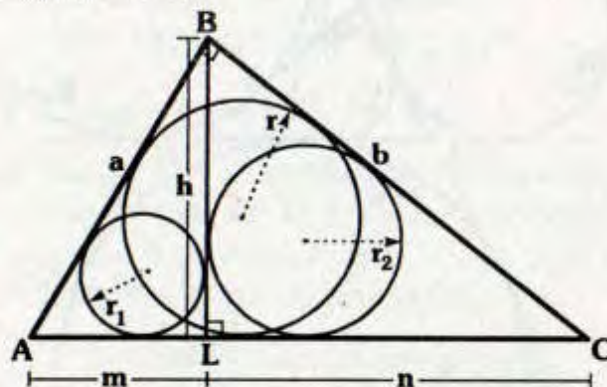
- $\triangle ABQ$: Isósceles $\Rightarrow AB = a + x$
- $\triangle PBC$: Isósceles $\Rightarrow BC = b + x$
- Por el teorema de Poncelet:
 $\Rightarrow a + x + b + x = a + x + b + 2r$
 $\therefore x = 2r$

(B)



$$BL = r + r_1 + r_2$$

Demostración:



- Por Teorema de Poncelet:

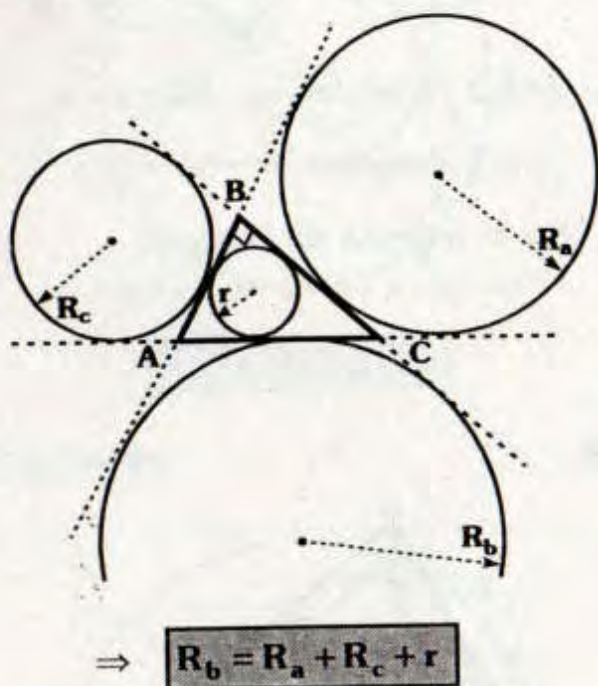
$$\triangle ABL: m+h=a+2r_1$$

$$\triangle CBL: n+h=b+2r_2$$

$$\triangle ABC: a+b=m+n+2r$$

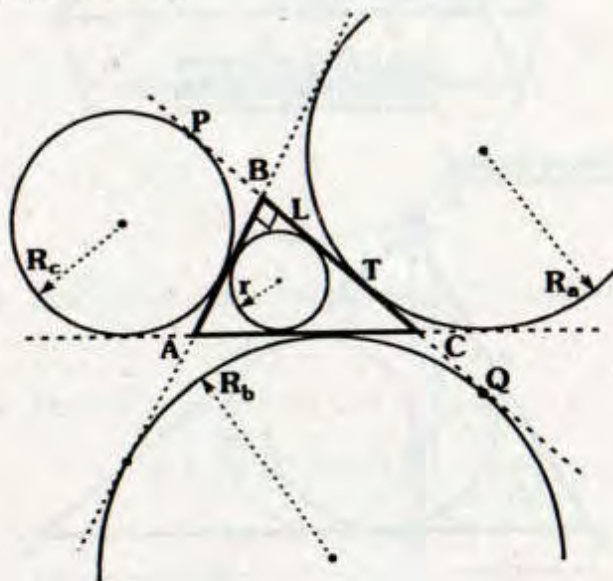
$$\therefore h=r_1+r_2+r$$

© Si $m\angle ABC = 90^\circ$



$$\Rightarrow R_b = R_a + R_c + r$$

Demostración:



- Por teoremas de circunferencia, se tiene:

$$BP = R_c, \quad BL = TC = r, \quad BT = R_a \quad \text{y}$$

$$BQ = R_b$$

- Por el teorema 8.2 (B): $PB = CQ = R_c$.

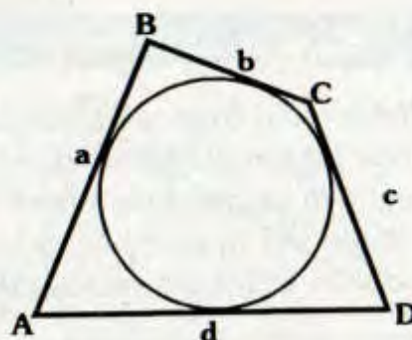
- Del gráfico: $BQ = BT + TC + CQ$

$$\therefore R_b = R_a + r + R_c$$

8.13 TEOREMA DE PITOT

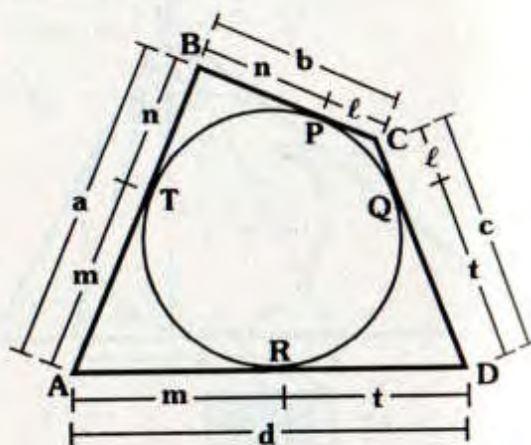
Para todo cuadrilátero circunscrito o circunscriptible las sumas de las longitudes de los lados opuestos son iguales.

$\triangle ABCD$: Cuadrilátero circunscrito.



$$\Rightarrow a + c = b + d$$

Demostración:

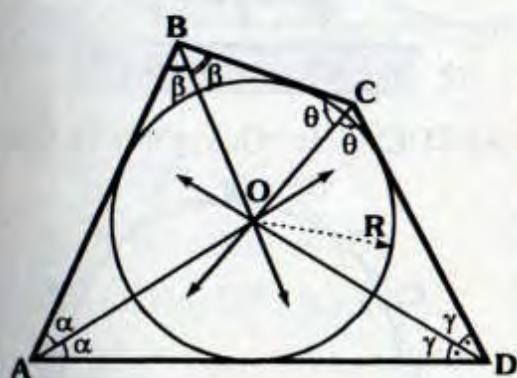


- Por teorema de circunferencia:
 $AT = AR = m$, $BT = BP = n$,
 $CP = CQ = \ell$, $DQ = DR = t$
- Se observa: $a = m + n$, $b = n + \ell$,
 $c = \ell + t$ y $d = m + t$
- $a + c = m + n + \ell + t$ y
 $b + d = n + \ell + m + t$
 $\therefore a + c = b + d$

Nota

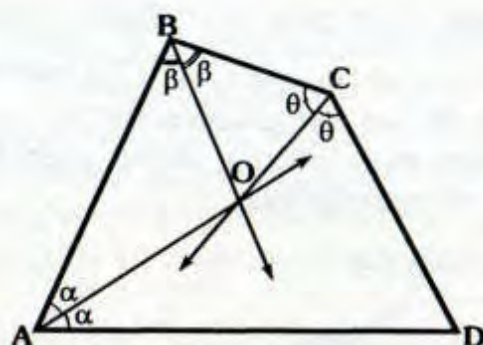
- El semiperímetro de la región limitada por un cuadrilátero circunscrito es igual a la suma de las longitudes de cualquier par de lados opuestos.
- En todo cuadrilátero circunscrito las bisectrices interiores pasan por el centro de la circunferencia inscrita.
- Las bisectrices internas concurren en O.

R: Inradio del $\triangle ABCD$.



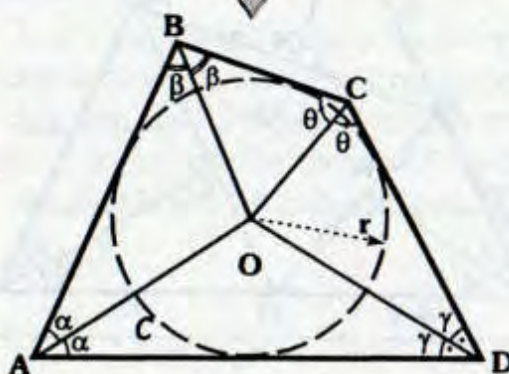
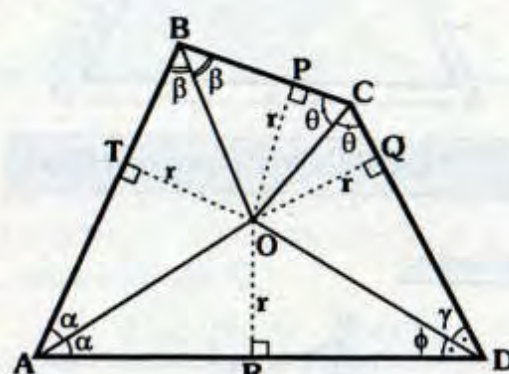
TEOREMA:

Si en un cuadrilátero convexo tres bisectrices interiores son concurrentes, dicho cuadrilátero es circunscriptible.



$\Rightarrow \triangle ABCD$: Circunscriptible

Demostración:



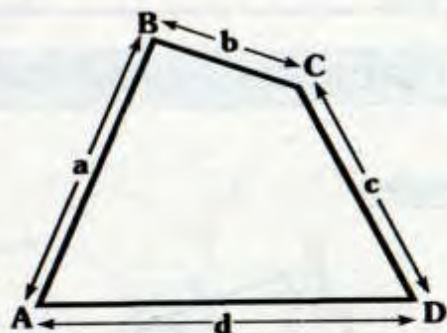
- Por teorema de la bisectriz:
 $OR = OT = OP = OQ = r$
- Como: $OR = OQ \Rightarrow \phi = \gamma$
- Luego por el postulado de Euclides, con centro en O y radio r podemos trazar la circunferencia \mathcal{C} , la cual es tangente a los cuatro lados.

$\therefore \triangle ABCD$: Circunscriptible

TEOREMA:

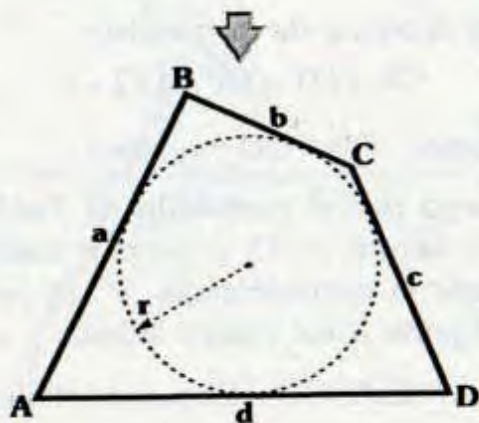
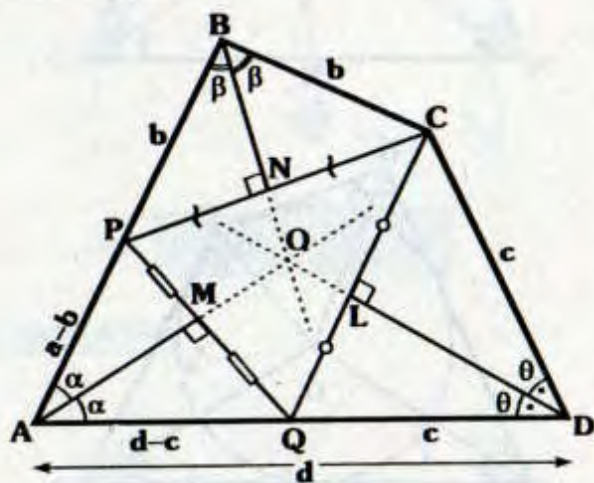
Si en un cuadrilátero convexo la suma de las longitudes de los lados opuestos es la misma, dicho cuadrilátero es circunscriptible.

Si $a+c=b+d$



⇒ **ΔABCD: Circunscriptible**

Demostración:

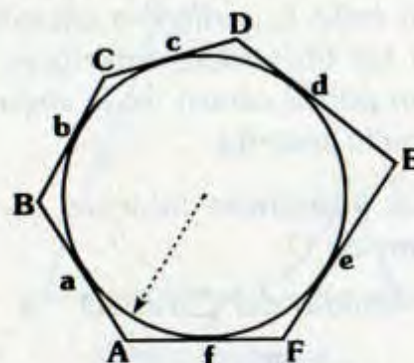


- Se ubican P y Q en \overline{AB} y \overline{AD} , tal que: $BP=b$ y $DQ=c$.
- De la condición del teorema se tiene $a-b=d-c$.
- Luego trazamos las alturas AM y BN las cuales se cortan en O, el cual es circuncentro del ΔPQC .
- Para el ΔPQC \overleftrightarrow{AM} , \overleftrightarrow{BN} y \overleftrightarrow{DL} son concurrentes.
- Puesto que las bisectrices AM, BN y DL son concurrentes, por el teorema anterior.

∴ $\Delta ABCD$: Circunscriptible.

Generalizando:

Si ABCDEF: Hexágono circunscrito



⇒ **$a+c+e=b+d+f$**

Si ABCDEFGH: Octógono circunscrito

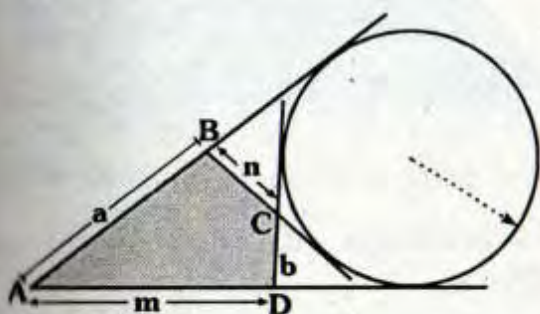


⇒ **$a+c+e+g=b+d+f+h$**

8.14. TEOREMA DE STEINER

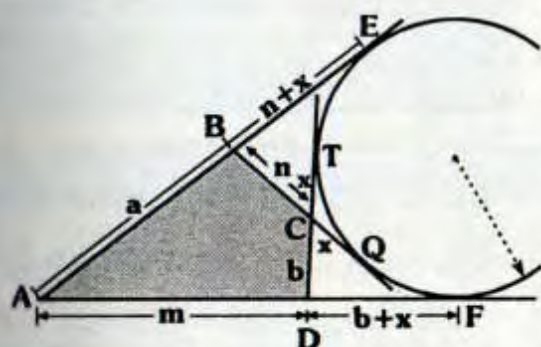
En todo cuadrilátero exinscrito o exinscriptible, las diferencias entre las longitudes de los lados opuestos son iguales.

$\triangle ABCD$: Cuadrilátero exinscrito



$$\Rightarrow \boxed{a - b = m - n}$$

Demostración:



• Por teorema:

$$CT = CQ = x$$

$$BQ = BE = n + x$$

$$DT = DF = b + x$$

• Finalmente:

$$AE = AF$$

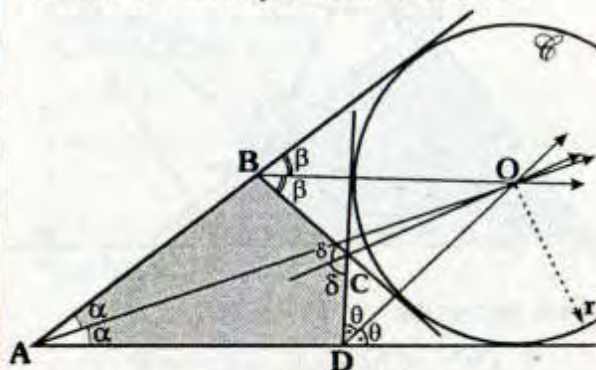
$$a + n + x = m + b + x$$

$$\Rightarrow a + n = m + b$$

$$\therefore a - b = m - n$$

Nota

En todo cuadrilátero exinscrito las bisectrices de dos ángulos exteriores opuestos y las bisectrices de los otros ángulos interiores concurren en el centro de la circunferencia exinscrita.



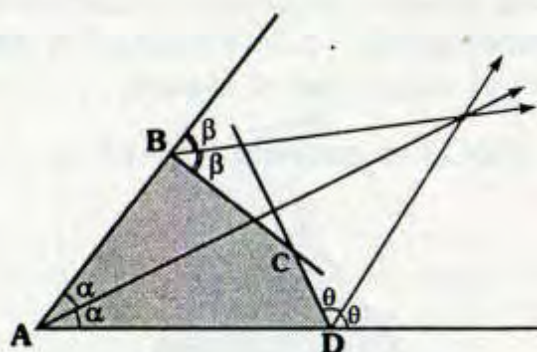
En el gráfico las bisectrices exteriores trazadas de B y D con las bisectrices trazadas desde A y C concurren en O.

r: Exradio del $\triangle ABCD$

TEOREMA:

Si en un cuadrilátero convexo las bisectrices exteriores de dos ángulos opuestos concurre con la bisectriz interior trazada desde cualquiera de los otros vértices opuestos, el cuadrilátero es **Exinscriptible**.

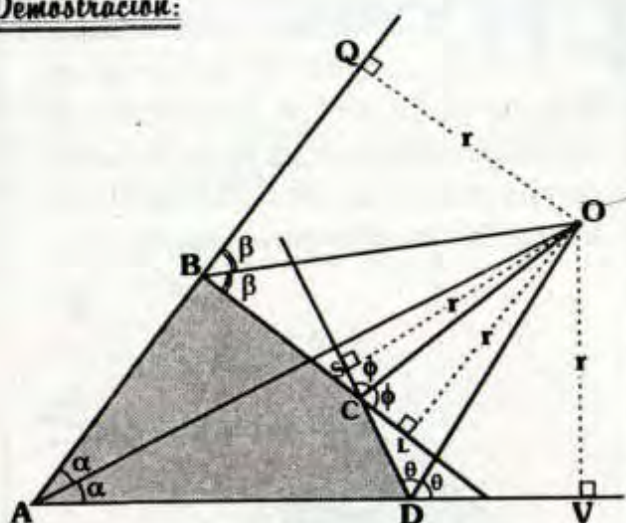
En el gráfico:



Se cumple:

$\triangle ABCD$: Exinscriptible

Demostración:

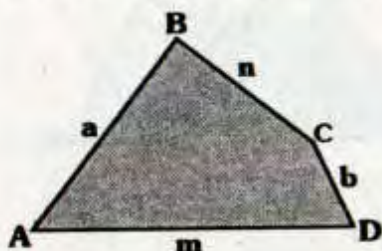


- Por teorema de la bisectriz:
 $OQ = OV = OL = OS = R$
 Se concluirá: $m\angle SCO = m\angle OCL = \phi$
 debido a $OS = OL$ (Recíproco) del teorema de la bisectriz.
- Luego se tendrá: O equidista de \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} , entonces es centro de una circunferencia tangente a dichos lados.
 $\therefore \triangle ABCD$ es exinscriptible

TEOREMA:

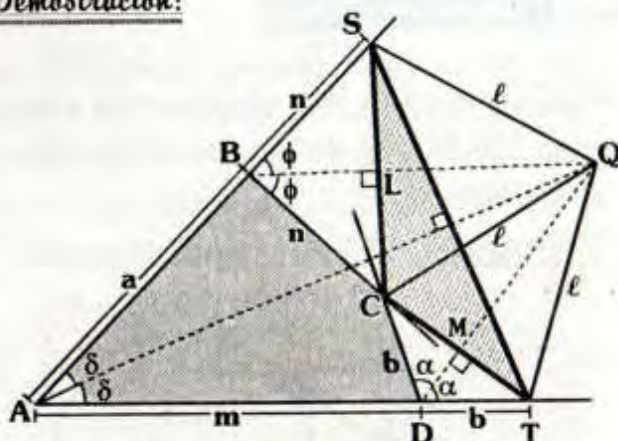
Si en un cuadrilátero convexo la diferencia de longitudes de los lados opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es exinscriptible. (Considerando la diferencia el mayor con el menor).

Si $\triangle ABCD$ es convexo y $a - b = m - n$

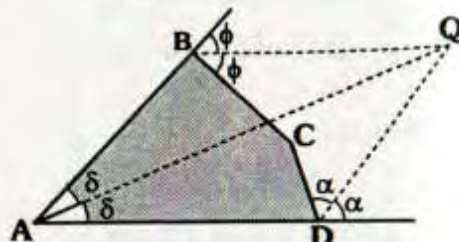


$\Rightarrow \triangle ABCD$ es exinscriptible

Demostración:



- Por dato: $a - b = m - n \Rightarrow a + n = b + m$
- Se prolonga \overline{AB} hasta S, tal que: $BS = n$.
- Se prolonga \overline{AD} hasta T, tal que $DT = b \Rightarrow \triangle CBS$ y $\triangle CDT$: Isósceles.
- Debido a que $AS = a + n$ y $AT = m + b \Rightarrow AS = AT$
 Se concluye: $\triangle AST$: Isósceles
- Se trazan \overline{AL} y \overline{DM} alturas de los triángulos SBC y CDT , las cuales son bisectrices y medianas.
 $\Rightarrow \overline{BQ}$ y \overline{DQ} son mediatrices de \overline{CS} y \overline{CT} , luego Q es circuncentro del:
 $ATCS \Rightarrow QS = QC = QT = \ell$
- $\triangle ASQT$: es trapezoide simétrico
 $\Rightarrow m\angle SAQ = m\angle QAT = \delta$
- Se tendrá entonces:



- Por el teorema anterior, se deduce:
 $\triangle ABCD$ es exinscriptible.

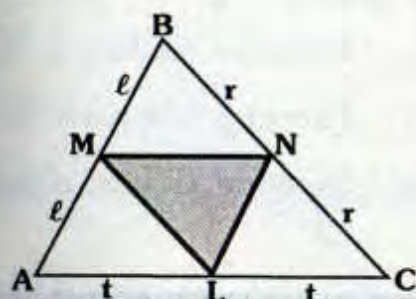
9. TRIÁNGULOS ESPECIALES

En este capítulo estudiaremos aquellos triángulos cuyos vértices tienen la misma característica respecto a un triángulo dado.

A un nivel preuniversitario se estudia a los triángulos mediano, órtico y exincentral, pero veremos que existen muchos más.

9.1 TRIÁNGULO MEDIANO, MEDIAL O COMPLEMENTARIO

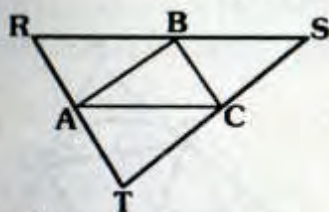
Es aquel triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado.



$\triangle MNL$: Triángulo mediano, medial o complementario del $\triangle ABC$.

Nota

El triángulo antimediano del triángulo $\triangle ABC$ es el triángulo $\triangle RST$ tal que el triángulo $\triangle ABC$ es triángulo mediano del triángulo $\triangle RST$.



En el gráfico:

El $\triangle ABC$ es triángulo mediano del $\triangle RST$.

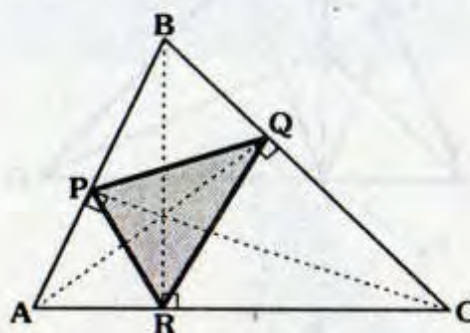
$\triangle RST$: Triángulo antimediano, antimedial o anticomplementario del $\triangle ABC$.

9.2 TRIÁNGULO ÓRTICO

Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo.

En el gráfico:

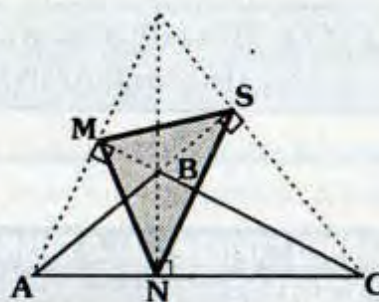
$\triangle ABC$: Acutángulo



$\triangle PQR$: Triángulo órtico del $\triangle ABC$.

En el gráfico

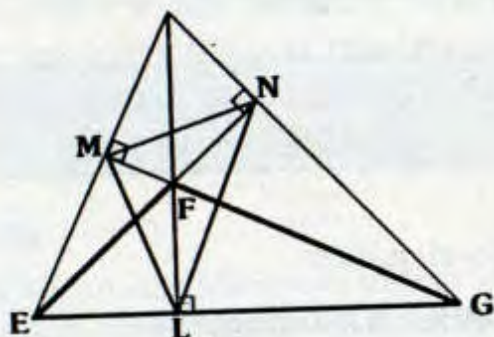
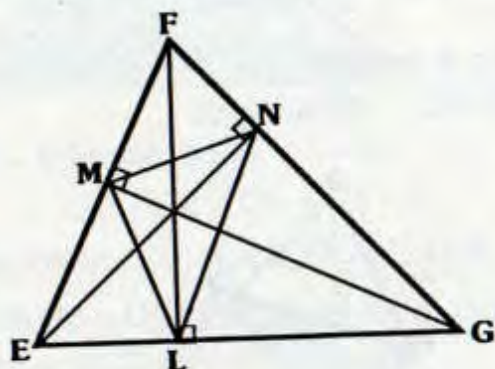
$\triangle ABC$: Obtusángulo



$\triangle MNS$: Triángulo órtico del $\triangle ABC$.

Nota

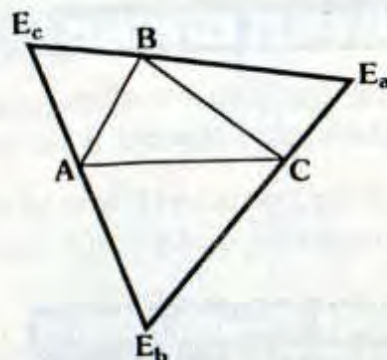
- Todos los triángulos presentan triángulo órtico, excepto el triángulo rectángulo.
- El triángulo EFG es antiórtico del triángulo MNL, si el triángulo MNL es triángulo órtico del triángulo EFG.



$\triangle EFG$: Triángulo antiórtico del $\triangle MNL$.

9.3 TRIÁNGULO EXINCENRAL O TRIÁNGULO DE LOS EXCENTROS

Es aquel triángulo cuyos vértices son los excentros relativos a cada lado.



$\triangle E_a E_b E_c$: \triangle Exincentral del $\triangle ABC$

En el gráfico:

E_a : Excentro relativo a \overline{BC} .

E_c : Excentro relativo a \overline{AB} .

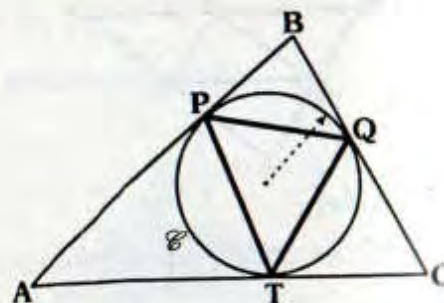
E_b : Excentro relativo a \overline{AC} .

9.4 TRIÁNGULO DE CONTACTO INTERIOR

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados de un triángulo.

En el gráfico:

\mathcal{C} : Circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.



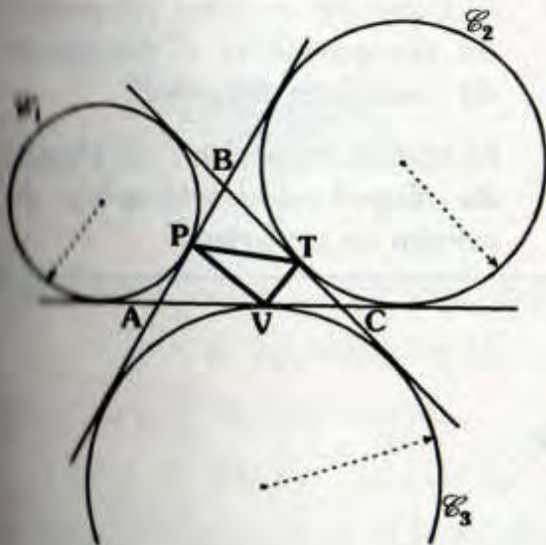
$\triangle PQT$: \triangle de contacto interior del $\triangle ABC$.

9.6 TRIÁNGULO DE CONTACTO EXTERIOR

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados de un triángulo.

En el gráfico:

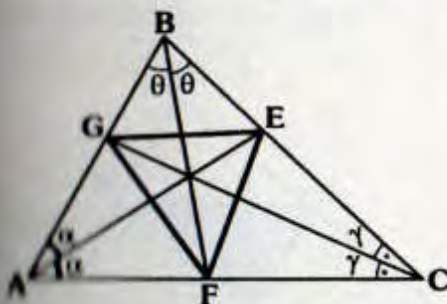
\mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , y \mathcal{C}_3 : Circunferencias exinscritas relativas a los lados del $\triangle ABC$.



$\triangle VPT$: \triangle de contacto exterior del $\triangle ABC$.

9.8 TRIÁNGULO INCÉNTRICO

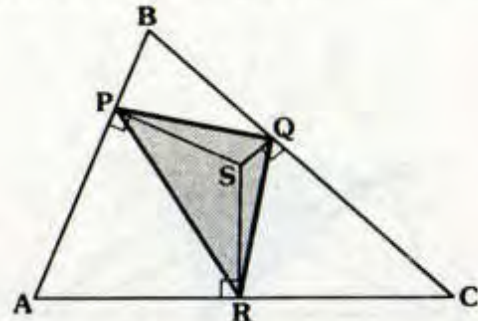
Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las bisectrices interiores.



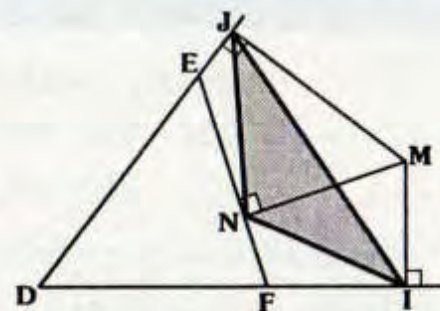
$\triangle GEF$: Triángulo incentrico del $\triangle ABC$.

9.7 TRIÁNGULO PEDAL O PODAR

Es el triángulo cuyos vértices son las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo.



$\triangle PQR$: Triángulo pedal o podar del $\triangle ABC$ respecto a S.



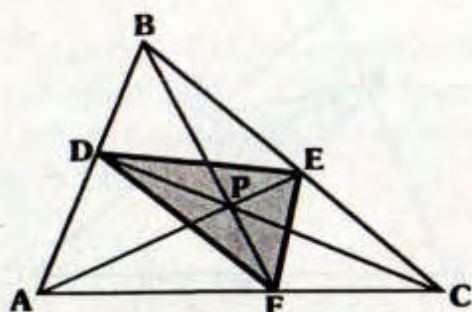
$\triangle INJ$: Triángulo pedal o podar del $\triangle EFD$ respecto de M.

Nota

- El triángulo pedal de circuncentro es el **triángulo mediano**.
- El triángulo pedal del **ortocentro** es el **triángulo órtico**.
- El triángulo pedal del **incentro** es el triángulo de contacto interior.
- Si el punto pertenece a la circunferencia circunscrita, los pies de las perpendiculares sobre los lados o prolongaciones son colineales (ver recta de Simson) no habría triángulo pedal.

9.8 TRIÁNGULO CEVIANO

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las cevianas concurrentes en un punto dado.



$\triangle DEF$: Triángulo ceviano del $\triangle ABC$ respecto de P.

Nota

- El triángulo ceviano del **baricentro** es el **triángulo mediano**.
- El triángulo ceviano del **ortocentro** es el **triángulo órtico**.
- El triángulo ceviano del **incentro** es el **triángulo incentrico**.
- El triángulo ceviano del **punto de Gergonne** es el **triángulo de contacto interior**.
- El triángulo ceviano de **Punto de Nagel** es el **triángulo de contacto exterior**.

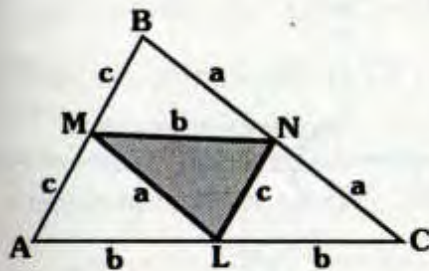


10. TEOREMAS SOBRE LOS TRIÁNGULOS ESPECIALES

10.1 Si el triángulo MNL es triángulo mediano del triángulo ABC (M en \overline{AB} y N en \overline{BC}) se cumple:

$$\triangle AML \equiv \triangle MBN \equiv \triangle LNC \equiv \triangle MLN$$

Demostración:



En el gráfico: $\triangle MNL$ es triángulo mediano del triángulo ABC.

Por teorema de la base media:

$$MN = b, \quad ML = a \quad \text{y} \quad LN = c$$

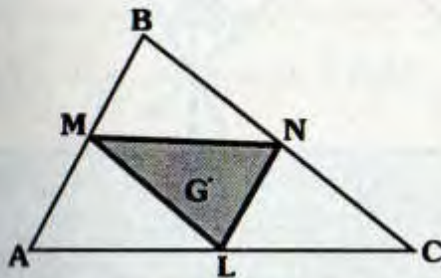
Por caso de congruencia LLL, se tiene:

$$\triangle AML \equiv \triangle MBN \equiv \triangle LNC \equiv \triangle MLN$$

10.2 El baricentro de todo triángulo es baricentro de su triángulo mediano.

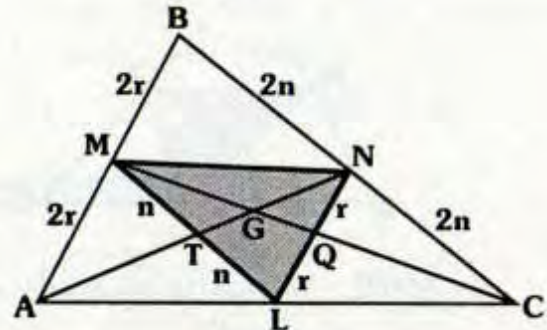
Si $\triangle MNL$:

Triángulo mediano del $\triangle ABC$; y
G: Baricentro del $\triangle ABC$.



⇒ **G: Baricentro del $\triangle MNL$**

Demostración:



En el gráfico:

- $\triangle MNL$: Triángulo mediano del $\triangle ABC$
G: Baricentro del $\triangle ABC$.

- Se tiene entonces:

$$AM = MB = 2r, \quad BN = NC = 2n \quad \text{y} \quad AL = LC$$

- Por teorema de la base media:

$$ML = 2n \quad \text{y} \quad \overline{ML} \parallel \overline{BC}$$

$$NL = 2r \quad \text{y} \quad \overline{NL} \parallel \overline{AB}$$

- En $\triangle ABN$ se tiene $AM = MB$ y $\overline{MT} \parallel \overline{BN} \Rightarrow \overline{MT}$ es base media.

- Luego: $MT = n$

- De los anterior, se tendrá:

$$MT = TL = n$$

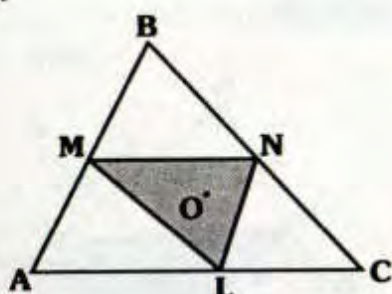
$$\Rightarrow \overline{NT} \text{ es mediana de } \triangle MNL.$$

- En forma análoga se verifica \overline{MQ} es mediana del $\triangle MNL$.

- Del criterio principal, como \overline{NT} y \overline{MQ} son medianas:

$$\therefore G \text{ es baricentro del } \triangle MNL.$$

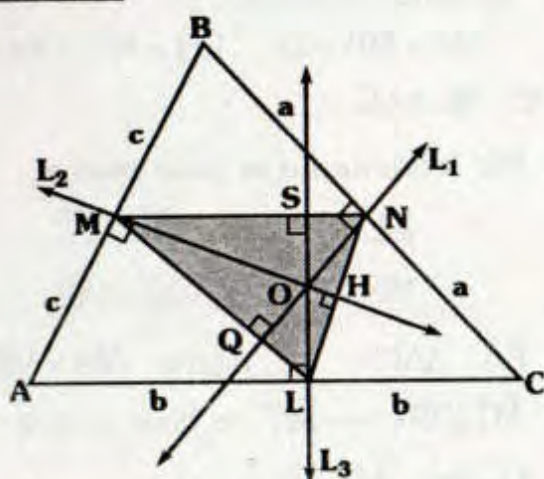
- 10.3** El circuncentro de todo triángulo es ortocentro de su triángulo mediano.



Si $\triangle MNL$: Triángulo mediano del $\triangle ABC$.
y O : Circuncentro del $\triangle ABC$.

\Rightarrow **O: Ortocentro del $\triangle MNL$**

Demostración:



En el gráfico:

- $\triangle MNL$ es el triángulo mediano del $\triangle ABC$.
- Se sabe entonces:
 $AM = MB$, $AL = LC$ y $CN = NB$
- Se trazan \vec{L}_1 , \vec{L}_2 y \vec{L}_3 mediatrices de \overline{BC} , \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente.
- Luego: O es circuncentro del $\triangle ABC$.

- También se sabe: \overline{MN} , \overline{NL} y \overline{ML} son las bases medias para el $\triangle ABC$, entonces:

$$\overline{MN} \parallel \overline{AC}, \overline{NL} \parallel \overline{AB} \text{ y } \overline{ML} \parallel \overline{BC}$$

- Luego se tendrá por propiedad de las paralelas:

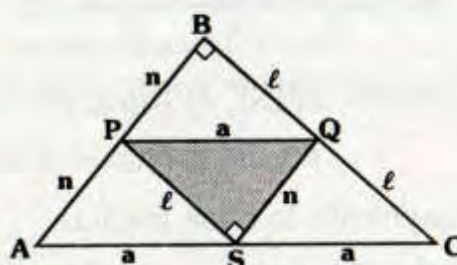
$$\vec{L}_1 \perp \overline{ML}, \vec{L}_2 \perp \overline{NL} \text{ y } \vec{L}_3 \perp \overline{MN}$$

$\Rightarrow \overline{MH}$, \overline{NQ} y \overline{LS} : alturas del $\triangle MNL$.

$\therefore O$ es ortocentro de $\triangle MNL$.

Observación

$\triangle ABC$: Triángulo rectángulo

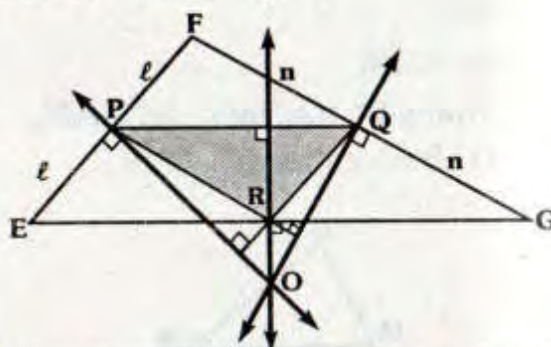


$\triangle PQS$: Es el triángulo mediano de $\triangle ABC$

S : Circuncentro del $\triangle ABC$.

S : Ortocentro del $\triangle PQS$.

$\triangle EFG$: Obtusángulo

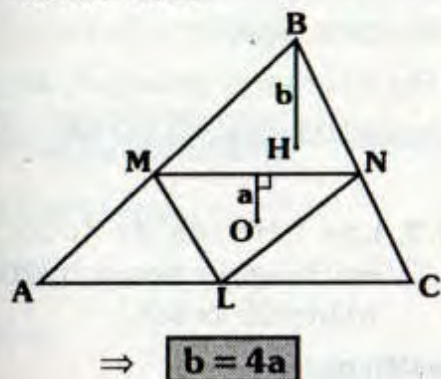


$\triangle PQR$: Triángulo mediano del $\triangle EFG$.

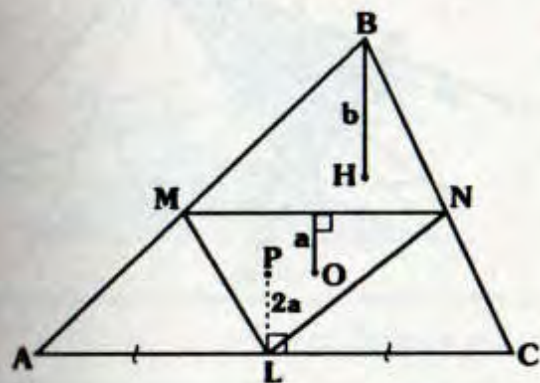
O : Circuncentro del $\triangle EFG$.

O : Ortocentro del $\triangle PQR$.

- 10.4** En todo triángulo la distancia de su ortocentro a un vértice es igual a cuatro veces la distancia del circuncentro de su triángulo mediano al lado paralelo al lado opuesto al vértice mencionado.
- Si H: Ortocentro del $\triangle ABC$ y
O: Circuncentro del triángulo mediano MNL.

Demostración:

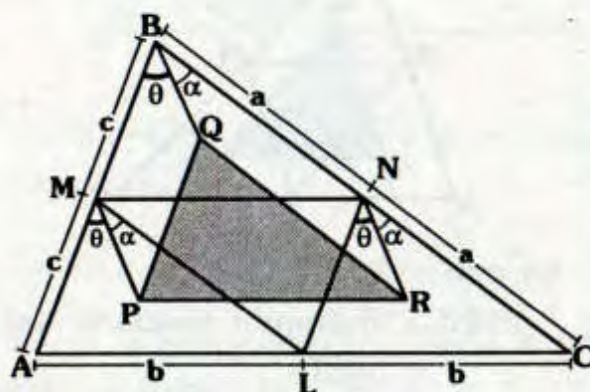
- Se ubica el circuncentro P del $\triangle ABC$, por el teorema anterior P es ortocentro del $\triangle MNL$.



- $\triangle MNL$: Por el teorema 8.6(A):
 $\Rightarrow PL = 2a$
- Análogamente en el $\triangle ABC$, se tiene:
 $\therefore b = 4a$

- 10.5** Si el triángulo MNL es triángulo mediano del triángulo ABC (M en \overline{AB} y N en \overline{BC}). Sean P, Q y R punto homólogos de los triángulos AML, MBN y LNC respectivamente, se cumple.

$$\triangle PQR \cong \triangle MLN$$

Demostración:

- Sea $\triangle MNL$, triángulo mediano del $\triangle ABC$.
- Por teorema:

$$\triangle AML \cong \triangle MBN \cong \triangle LNC \cong \triangle MLN$$

- Entonces: $MN = b$, $NL = c$, $ML = a$
- Por condición, P, Q y R son puntos homólogos, entonces:

$$MP = BQ = NR$$

$$m\angle AMP = m\angle MBQ = m\angle LNR = \theta$$

$$m\angle PML = m\angle QBN = m\angle RNC = \alpha$$

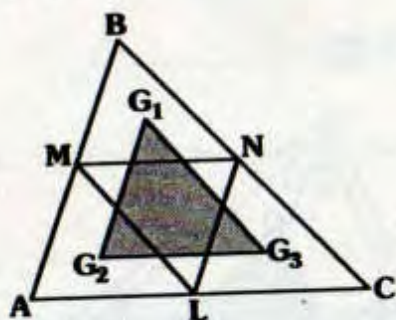
- Luego, se tendría:
PMBQ, QBNR y PMNR son paralelogramos.
- Entonces: $PQ = c$, $QR = a$ y $PR = b$
- Finalmente por caso de congruencia LLL.

$$\triangle PQR \cong \triangle MLN$$

Observación

Del teorema anterior podemos considerar casos particulares, cuando los puntos homólogos son algunos de los puntos notables.

Por ejemplo:



En este caso:

$\triangle MNL$: Triángulo mediano del $\triangle ABC$.

G_1 : Baricentro del $\triangle MBN$.

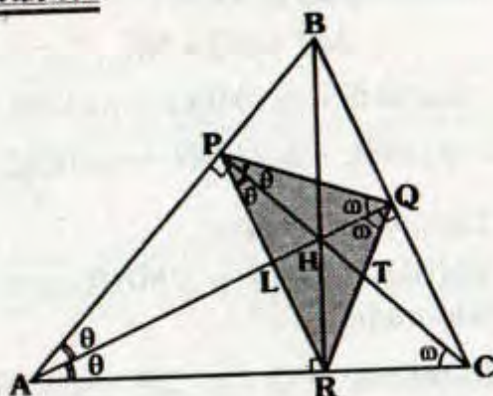
G_2 : Baricentro del $\triangle AML$.

G_3 : Baricentro del $\triangle LNC$.

$$\Rightarrow \triangle G_1G_2G_3 \equiv \triangle LMN$$

10.6 El ortocentro de todo triángulo acutángulo es incentro de su respectivo triángulo órtico.

Demostración:



En el gráfico:

$\triangle ABC$: Acutángulo

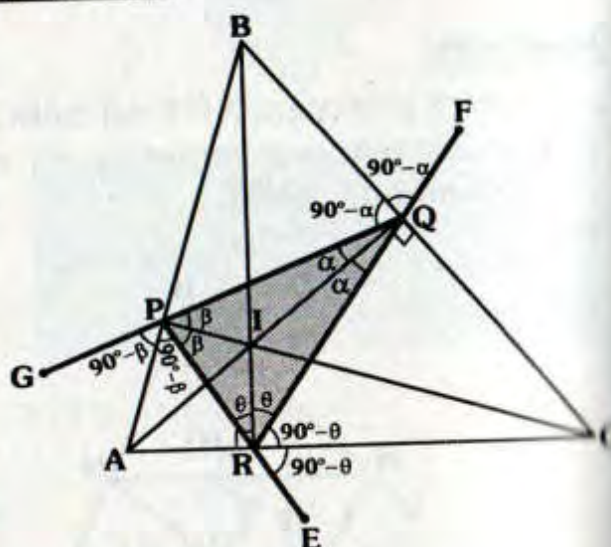
H: Ortocentro del $\triangle ABC$

- $\triangle RHQC$ y $\triangle APQC$: Inscriptibles
 $\Rightarrow m\angle RCH = m\angle RQA = \omega$
y $m\angle ACP = m\angle AQP = \omega$

- En $\triangle PQR$ (triángulo órtico del $\triangle ABC$).
- Se tiene \overline{QL} es bisectriz interior.
- En forma análoga, se verifica \overline{PT} es bisectriz interior.
- Por el criterio principal, se tendrá entonces H es incentro del $\triangle PQR$.

10.7 Los vértices de todo triángulo acutángulo son excentros de su triángulo órtico.

Demostración:



- En el gráfico:
 $\triangle PQR$: Triángulo órtico del $\triangle ABC$
- Por el teorema anterior I es incentro de $\triangle PQR$.
- Luego al prolongar \overline{QP} , \overline{PR} y \overline{RQ} tendrá:

$$m\angle GPA = m\angle APR = 90^\circ - \beta$$

$$m\angle ERC = m\angle CRQ = 90^\circ - \theta$$

$$m\angle FQB = m\angle BQP = 90^\circ - \alpha$$

- Se concluye entonces para el ΔPQR

A es excentro relativo a \overline{PR} .

B es excentro relativo a \overline{PQ} .

C es excentro relativo a \overline{RQ} .

Observación

ΔABC : Obtusángulo.

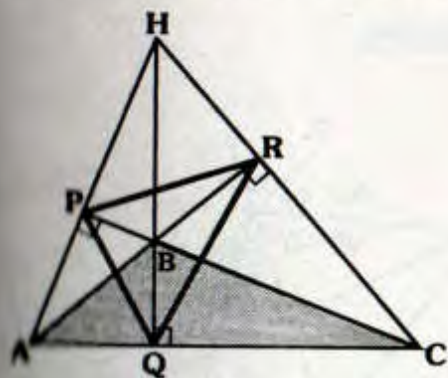
ΔPQR : Triángulo órtico del ΔABC .

Se cumple:

B: es incentro del ΔPQR .

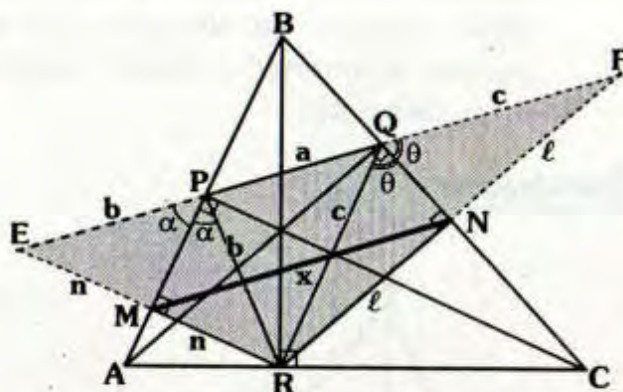
H: ortocentro del ΔABC .

A, H y C: Excentros del ΔPQR .



- 10.8** La distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas del pie de una de las alturas de un triángulo acutángulo hacia los lados adyacentes de dicha altura es igual al semiperímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

Demostración:



- En el gráfico: ΔPQR : Triángulo órtico del ΔABC .

- Se va a demostrar: $x = \frac{a+b+c}{2}$

- Por el teorema anterior se sabe A y C son excentros, entonces:

$$m\angle EPA = m\angle APR = \alpha$$

$$m\angle RQC = m\angle CQF = \theta$$

- Se prolonga \overline{RM} hasta E y \overline{RN} hasta F se tiene entonces que en los triángulos EPR y RQF : \overline{PM} y \overline{QN} son bisectrices y alturas.

$$\Rightarrow \Delta RQF \text{ y } \Delta RPA \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow EP = PR = b \text{ y } RQ = QF = c$$

- Además: $EM = MR$ y $RN = NF$

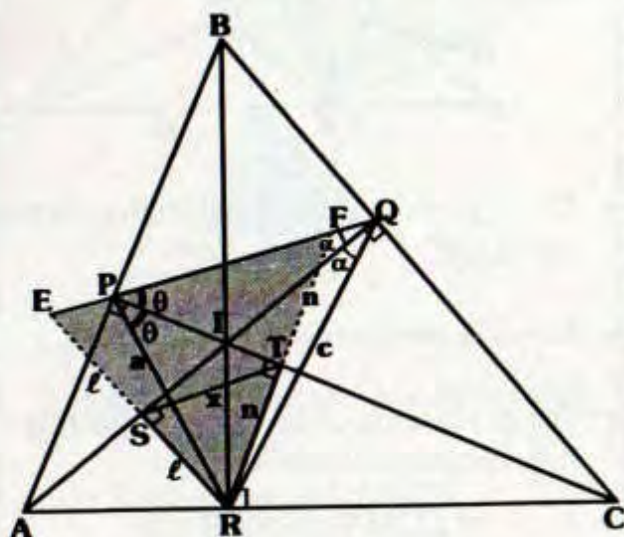
- En ΔERF , \overline{MN} es base media, por teorema:

$$x = \frac{b+a+c}{2}$$

- 10.9** En un triángulo acutángulo la longitud del segmento que tiene como extremos los pies de las perpendiculares trazadas desde el pie de

una de las alturas del triángulo hacia las otras alturas, es igual al semiperímetro del triángulo órtico menos la longitud del lado opuesto a dicho pie.

Demostración:



- Por teorema 10.5, I es incentro del $\triangle PQR$ al prolongar \overline{RS} y \overline{RT} hasta E y F respectivamente se tendrá:

$\triangle QRE$ y $\triangle PRF$ isósceles

$$\Rightarrow QR = QE = c \text{ y } PR = PF = a$$

- Además: $RS = SE$ y $RT = TF$

$\triangle REF$: \overline{ST} es base media.

$$\Rightarrow EF = 2x$$

- Se observa: $EP = EF - PF = 2x - a$

$$EP = EQ - PQ = c - b$$

$$\Rightarrow 2x - a = c - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + c - b$$

- En el segundo miembro:

$$2x = a + c + b - b - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + b + c - 2b$$

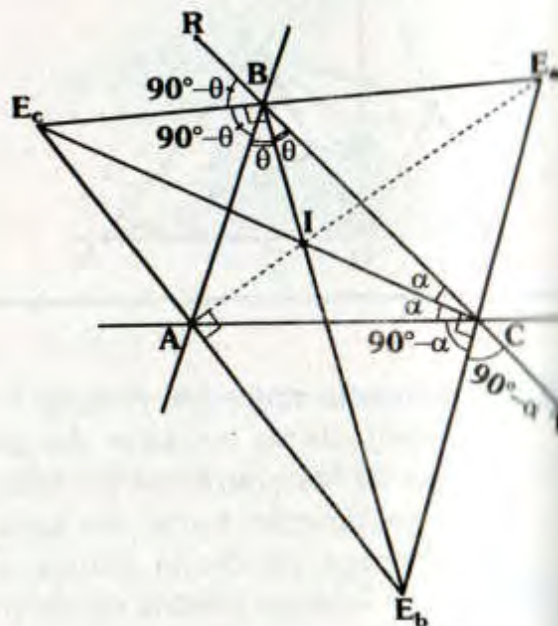
$$\therefore x = \frac{a + b + c}{2} - b$$

- 10.10** De todos los triángulos que se pueden trazar cuyos vértices estén sobre los lados o prolongaciones de un triángulo obtusángulo, el de menor perímetro es el triángulo órtico.

(ver Teorema de Fagnano)

- 10.11** El incentro de un triángulo es ortocentro del triángulo exincentral.

Demostración:



En el gráfico:

$$m\angle ERC = m\angle CRQ = 90^\circ - \theta$$

$$m\angle FQB = m\angle BQP = 90^\circ - \alpha$$

• Se concluye entonces para el $\triangle PQR$

A es excentro relativo a \overline{PR} .

B es excentro relativo a \overline{PQ} .

C es excentro relativo a \overline{RQ} .

Observación

$\triangle ABC$: Obtusángulo.

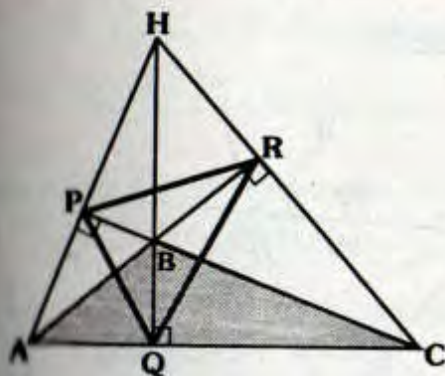
$\triangle PQR$: Triángulo órtico del $\triangle ABC$.

No cumple:

B: es incentro del $\triangle PQR$.

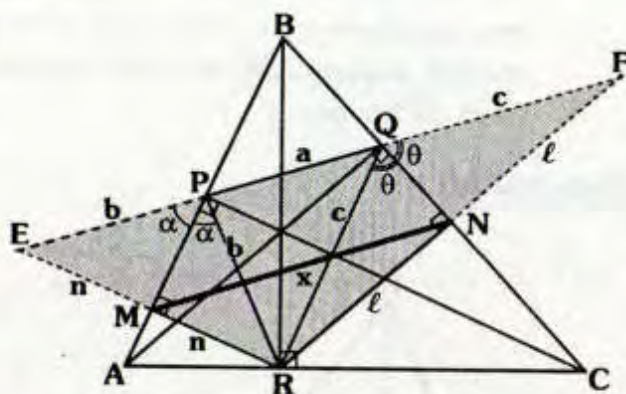
H: ortocentro del $\triangle ABC$.

A, H y C: Excentros del $\triangle PQR$.



■ ■ La distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas del pie de una de las alturas de un triángulo acutángulo hacia los lados adyacentes de dicha altura es igual al semiperímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

Demostración:



• En el gráfico: $\triangle PQR$: Triángulo órtico del $\triangle ABC$.

• Se va a demostrar: $x = \frac{a+b+c}{2}$

• Por el teorema anterior se sabe A y C son excentros, entonces:

$$m\angle EPA = m\angle APR = \alpha$$

$$m\angle RQC = m\angle CQF = \theta$$

• Se prolonga \overline{RM} hasta E y \overline{RN} hasta F se tiene entonces que en los triángulos $\triangle EPR$ y $\triangle RQF$: \overline{PM} y \overline{QN} son bisectrices y alturas.

$\Rightarrow \triangle RQF$ y $\triangle RPA$ son isósceles

$\Rightarrow EP = PR = b$ y $RQ = QF = c$

• Además: $EM = MR$ y $RN = NF$

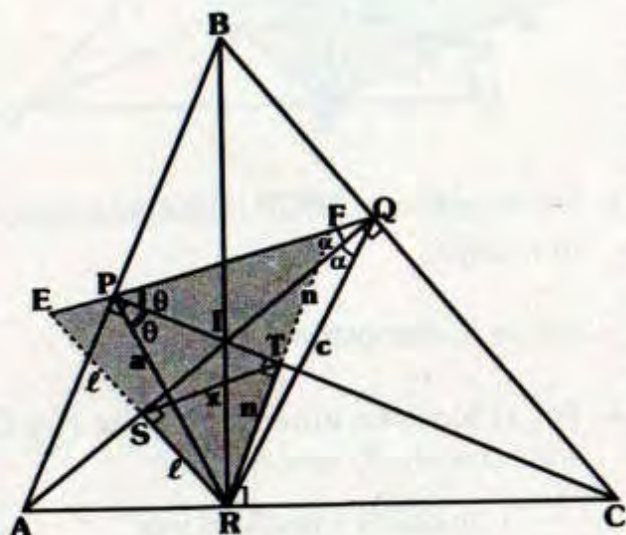
• En $\triangle ERF$, \overline{MN} es base media, por teorema:

$$x = \frac{b+a+c}{2}$$

10.9 En un triángulo acutángulo la longitud del segmento que tiene como extremos los pies de las perpendiculares trazadas desde el pie de

una de las alturas del triángulo hacia las otras alturas, es igual al semiperímetro del triángulo órtico menos la longitud del lado opuesto a dicho pie.

Demostración:



- Por teorema 10.5, I es incentro del ΔPQR al prolongar \overline{RS} y \overline{RT} hasta E y F respectivamente se tendrá:

ΔQRE y ΔPRF isósceles

$$\Rightarrow QR = QE = c \text{ y } PR = PF = a$$

- Además: $RS = SE$ y $RT = TF$

ΔREF : \overline{ST} es base media.

$$\Rightarrow EF = 2x$$

- Se observa: $EP = EF - PF = 2x - a$

$$EP = EQ - PQ = c - b$$

$$\Rightarrow 2x - a = c - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + c - b$$

- En el segundo miembro:

$$2x = a + c + b - b - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + b + c - 2b$$

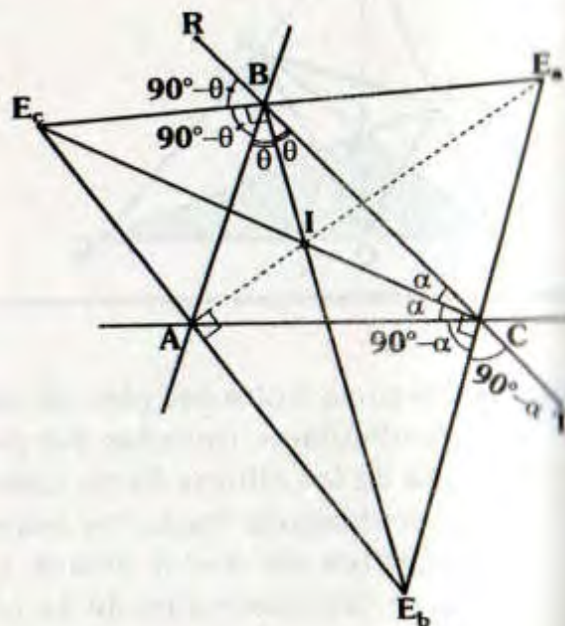
$$\therefore x = \frac{a + b + c}{2} - b$$

- 10.10** De todos los triángulos que se pueden trazar cuyos vértices estén sobre los lados o prolongaciones de un triángulo obtusángulo, el de menor perímetro es el triángulo órtico.

(ver Teorema de Fagnano)

- 10.11** El incentro de un triángulo es ortocentro del triángulo exincentral.

Demostración:



En el gráfico:

- $\Delta E_a E_b E_c$: Triángulo exincentral o triángulo de los excentros del ΔABC .

I: Incentro del ΔABC .

- Se observa:

$$m\angle ACE_b = m\angle E_b CT = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow m\angle E_c CE_b = 90^\circ$$

$$m\angle ABE_c = m\angle E_c BR = 90^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow m\angle E_b BE_c = 90^\circ$$

- Como: $\overline{E_c C}$ y $\overline{E_b B}$ son alturas entonces I es ortocentro del $\Delta E_a E_b E_c$.

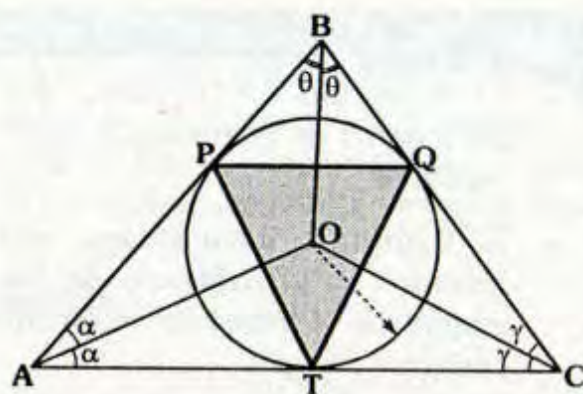
Observación

También se puede indicar:

- A, I y E_a : Colineales.
- $\Delta E_a E_b E_c$: Acutángulo.
- ΔABC es triángulo órtico del triángulo $E_a E_b E_c$.
- $\Delta E_a E_b E_c$ es triángulo antiórtico del ΔABC .

10.10 El circuncentro del triángulo de contacto interior es incentro del triángulo inicial.

Demstración:



En el gráfico:

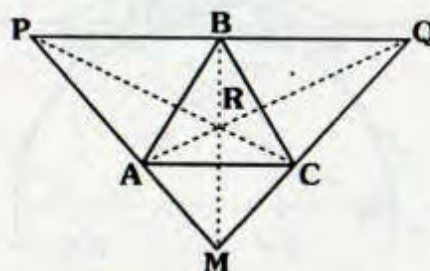
- ΔPQT es el triángulo de contacto interior del triángulo ABC .
- O es circuncentro del ΔPQT .
- Por teorema de circunferencia: \vec{AO} , \vec{CO} y \vec{BO} son bisectrices de los ángulos BAC , ACB y ABC respectivamente.

\therefore O es incentro del ΔABC .

10.13 OTROS TRIÁNGULOS ESPECIALES

TRIÁNGULO ANTICEVIANO

El triángulo anticeviano de un triángulo ABC es el triángulo PMQ tal que el triángulo ABC es triángulo ceviano del triángulo PQR .



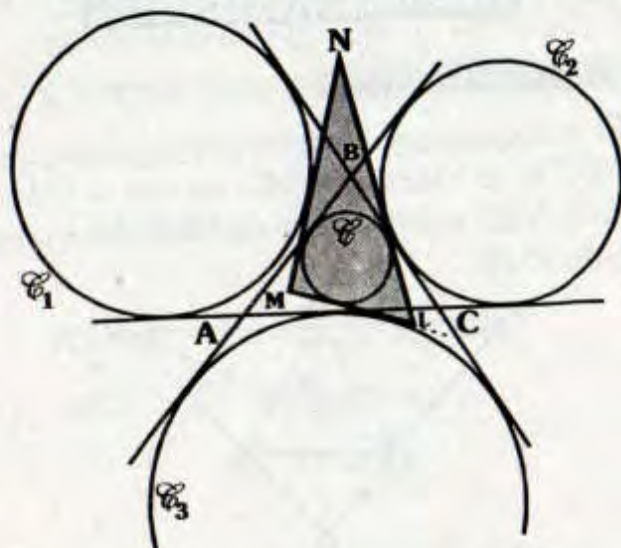
- El ΔPMQ es anticeviano del ΔABC respecto de R.
- El ΔABC es ceviano del ΔPMQ respecto de R.

Nota

- El triángulo anticeviano del baricentro es el triángulo anti-mediano.
- El triángulo anticeviano del incentro es el triángulo de los excentros o triángulo exincentral.
- El triángulo anticeviano del ortocentro es el triángulo anti-ortico.

TRIÁNGULO INTANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices resultan de la intersección de las tangentes interiores comunes a la circunferencia inscrita y a una de las circunferencias exinscritas que no corresponden a los lados.



En el gráfico:

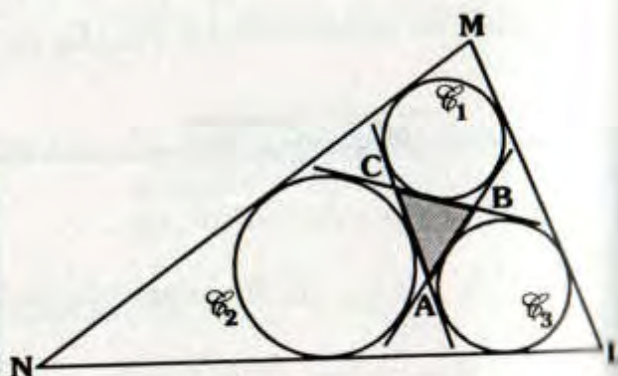
C_1, C_2 y C_3 : Circunferencias exinscritas

C : Circunferencia inscrita.

ΔMNL : Triángulo intangencial del ΔABC

TRIÁNGULO EXTANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices son las intersecciones de las tangentes exteriores comunes a las circunferencias exinscritas que no corresponden a las prolongaciones de los lados.



En el gráfico C_1, C_2 y C_3 son las circunferencias exinscritas del ΔABC .

ΔMNL : Triángulo extangencial del ΔABC .

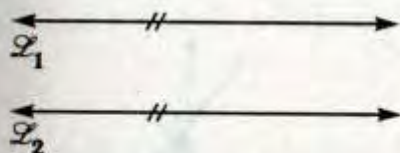
11. RECTAS NOTABLES

A continuación vamos a estudiar aquellas rectas contenidas en un mismo plano, determinado por dichas rectas o por alguna figura relacionada a las rectas (ángulo, triángulo, circunferencia, etc.) a las cuales llamaremos rectas notables.

11.1 RECTAS PARALELAS

Son aquellas que no tiene punto en común.

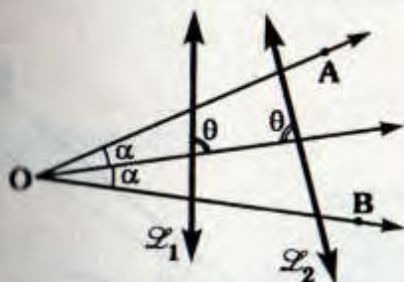
$$\text{Si: } \vec{\mathcal{L}}_1 \cap \vec{\mathcal{L}}_2 = \{ \}$$



$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$$

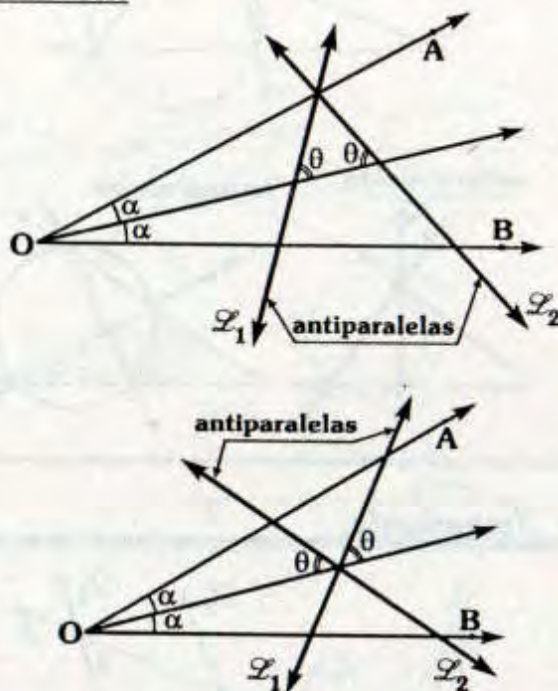
11.2 RECTAS ANTIPARALELAS

Dos rectas son antiparalelas con respecto a un ángulo, si la bisectriz de dicho ángulo es transversal y forma ángulos interiores al mismo lado de la transversal, de igual medida (y diferentes de 90°) con las rectas en mención.



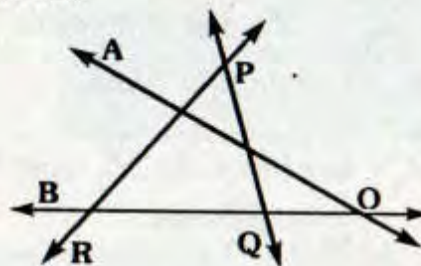
$\vec{\mathcal{L}}_1$ y $\vec{\mathcal{L}}_2$ son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.

También:



Nota

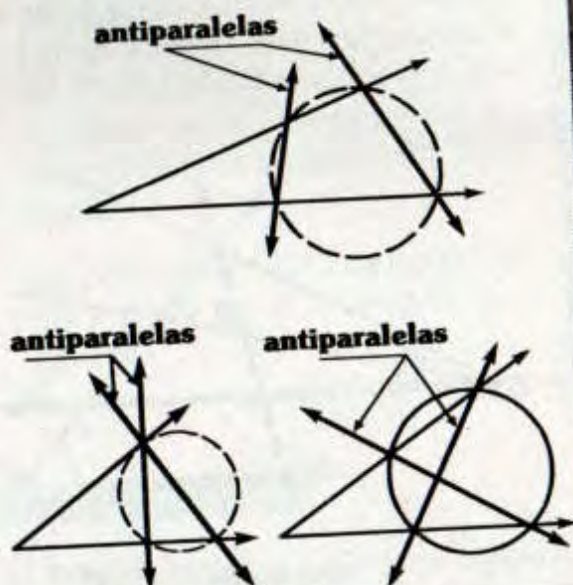
- Los lados del ángulo son antiparalelos con respecto al ángulo formado por las rectas antiparalelas.



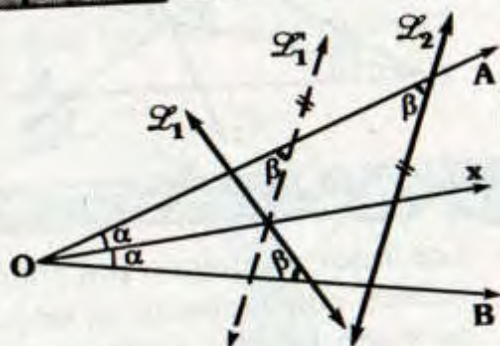
Si: \vec{PQ} y \vec{PR} son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.

$\Leftrightarrow \vec{OA}$ y \vec{OB} son antiparalelas con respecto al ángulo RPQ.

- Los puntos de corte entre los lados del ángulo y las rectas antiparalelas son concíclicos.



Importante:



Si: $\vec{L_1}$ y $\vec{L_2}$ son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.

y $\vec{L'_1}$: simétrica de $\vec{L_1}$ con respecto a \vec{OX} .

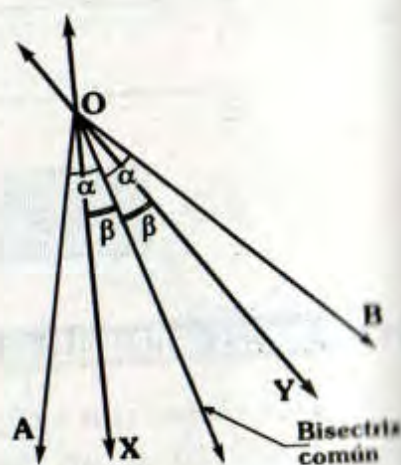
$$\Rightarrow \vec{L'_1} \parallel \vec{L_2}$$

Esta es la propiedad que sugiere el uso del término antiparalelo.

11.3 RECTAS ISOGONALES

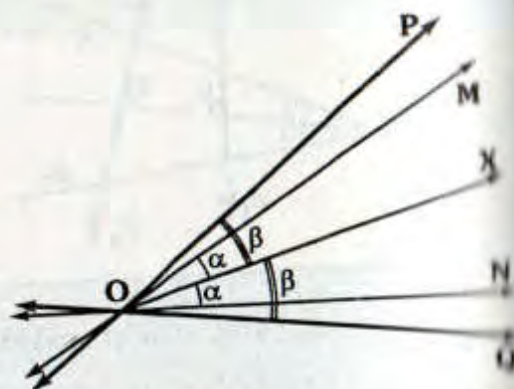
Dos rectas son conjugadas isogonales o simplemente isogonales respecto a un ángulo, cuando la bisectriz de dicho ángulo es también bisectriz del ángulo formado por las rectas en mención.

\vec{OX} y \vec{OY} son isogonales con respecto al $\angle AOB$.



También:

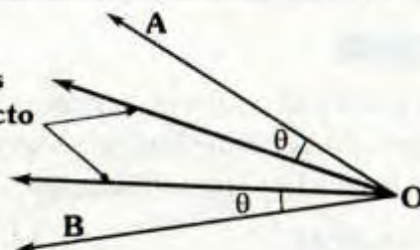
\vec{OP} y \vec{OQ} son isogonales con respecto al $\angle MON$.



Nota

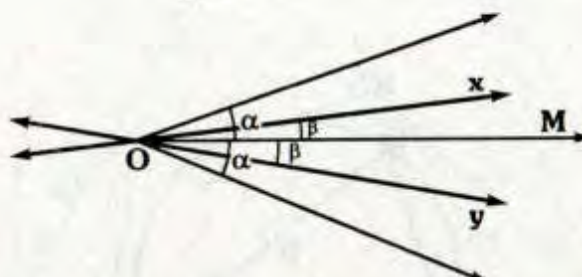
- Las isogonales con respecto a un ángulo forman ángulos de igual medida con los lados del ángulo.

Isogonales con respecto al $\angle AOB$



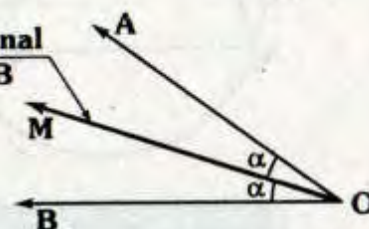
- Las isogonales con relación a un ángulo son simétricos con respecto a la bisectriz de dicho ángulo.

Las isogonales $\overset{\leftrightarrow}{OX}$ y $\overset{\leftrightarrow}{OY}$ son simétricas con respecto a la bisectriz OM .



- La bisectriz de un ángulo, también es conocida como la autoisogonal.

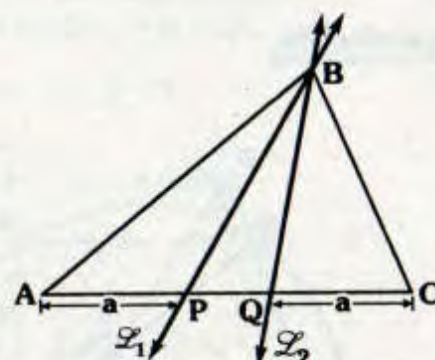
Autoisogonal del $\angle AOB$



11.4 RECTAS ISOTÓMICAS

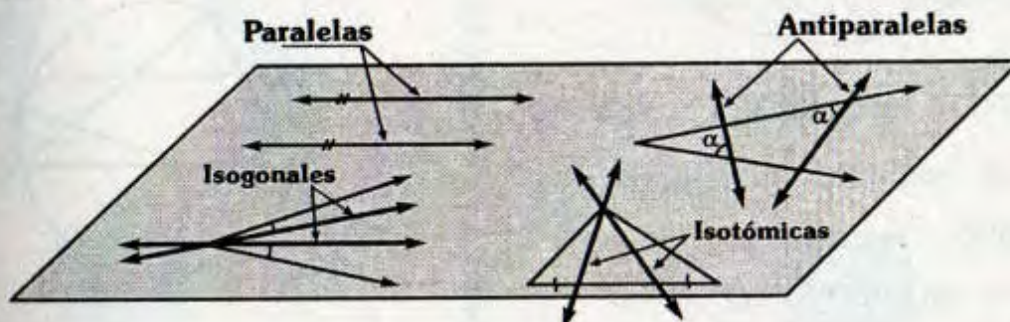
Dos rectas son isotómicas con respecto a un triángulo cuando pasando por un mismo vértice determinan en el lado opuesto dos segmentos extremos de igual longitud.

$$\text{Si } AP = QC = a$$



$\Rightarrow \overset{\leftrightarrow}{L_1} \text{ y } \overset{\leftrightarrow}{L_2} \text{ son isotómicas con respecto a } \triangle ABC.$

En resumen:

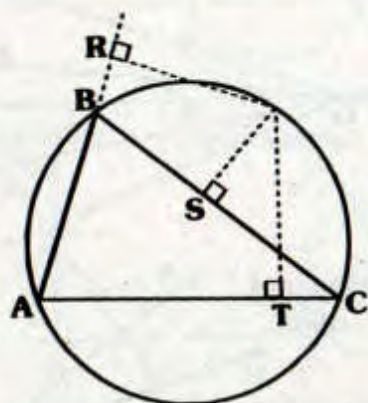


11.5 RECTA DE SIMSON - WALLACE

TEOREMA

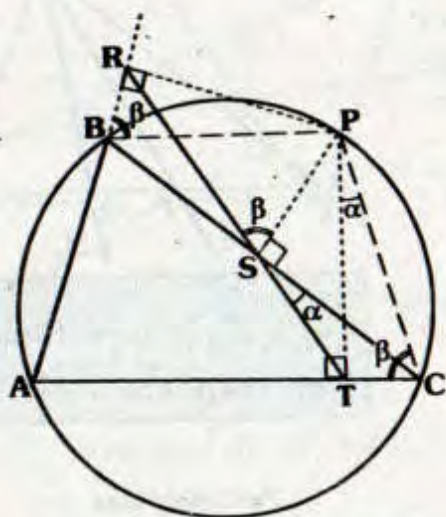
En todo triángulo las proyecciones de un punto de la circunferencia circunscrita hacia los lados son colineales.

Se cumple:



R, S y T: Colineales

Demostración:

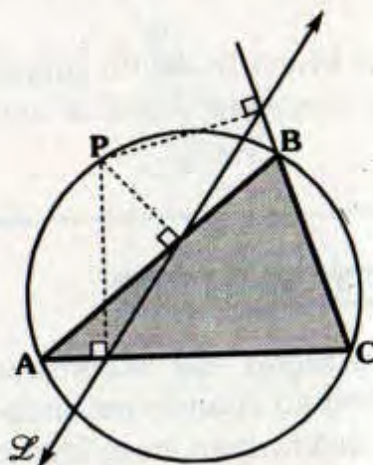


- $\triangle SPCT$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle TSC = m\angle TPC = \alpha$
- $\triangle ABPC$: Inscrito
 $\Rightarrow m\angle RBP = m\angle PCA = \beta$

- $\triangle BRPS$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle RBP = m\angle RSP = \beta$
- $\triangle PTC$: $\alpha + \beta = 90^\circ$, con lo cual en "S": $\alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$.
 \therefore R, S y T son colineales

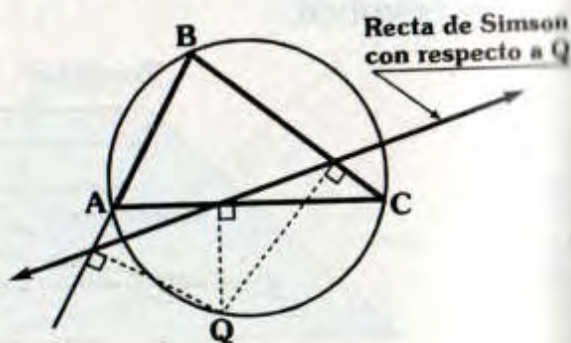
RECTA SIMSON

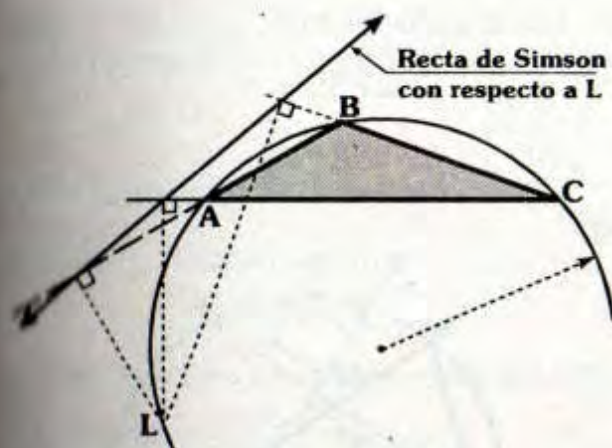
Es la recta que pasa por las proyecciones de un punto de la circunferencia circunscrita a los lados de un triángulo.



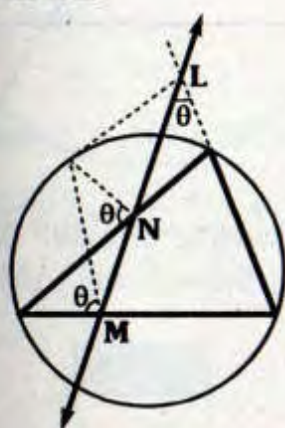
\mathcal{L} : Recta de Simson del $\triangle ABC$, con respecto a P.

También:





Generalizando:



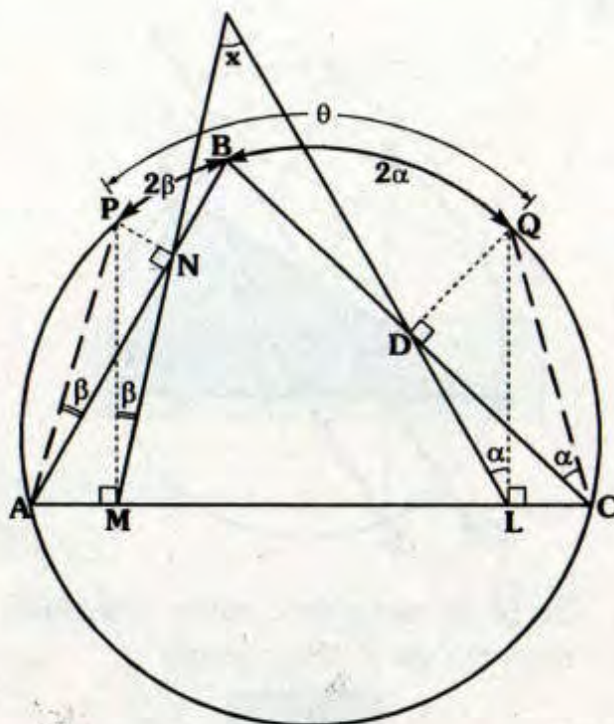
M, N, L son colineales

11.0.1 ÁNGULO ENTRE LAS RECTAS DE SIMSON



$$x = \frac{\theta}{2}$$

Demostración:



- Se observa que $\overline{PM} \parallel \overline{QL}$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = x$... (I)

- $\triangle APNM$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle PAN = m\angle PMN = \beta$

- $\triangle DQCL$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle DLQ = m\angle DCQ = \alpha$

- Por ángulo inscrito:
 $m\widehat{PB} = 2\beta$ y $m\widehat{BQ} = 2\alpha$

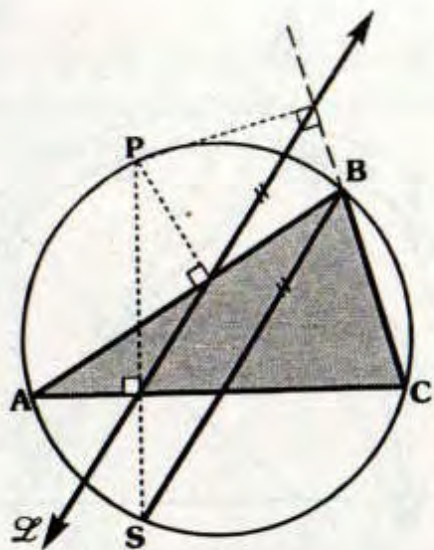
- Como: $2\alpha + 2\beta = \theta$... (II)

- De (I) y (II):

$$\therefore x = \frac{\theta}{2}$$

11.5.2 PROPIEDADES

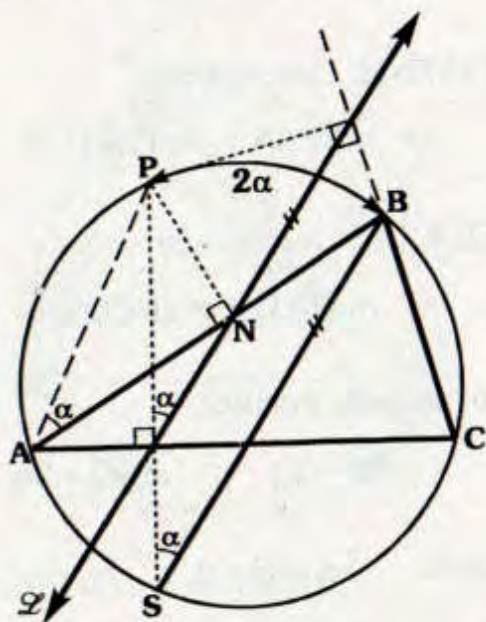
1



Si \vec{L} es recta de Simson del $\triangle ABC$, respecto de P. Se cumple :

$$\vec{L} \parallel \overline{BS}$$

Demostración:



- $\triangle APNL$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle PAN = m\angle PLN = \alpha$

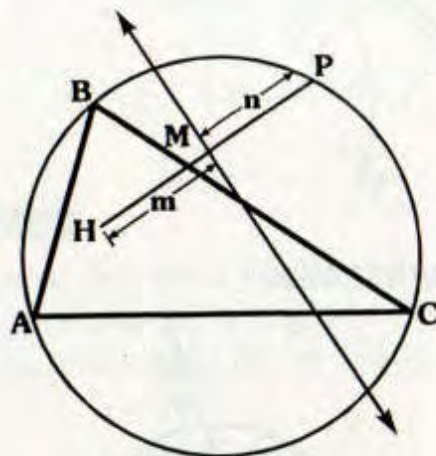


- Por ángulo inscrito:

$$m\angle PSB = \alpha$$

$$\therefore \vec{L} \parallel \overline{BS}$$

2

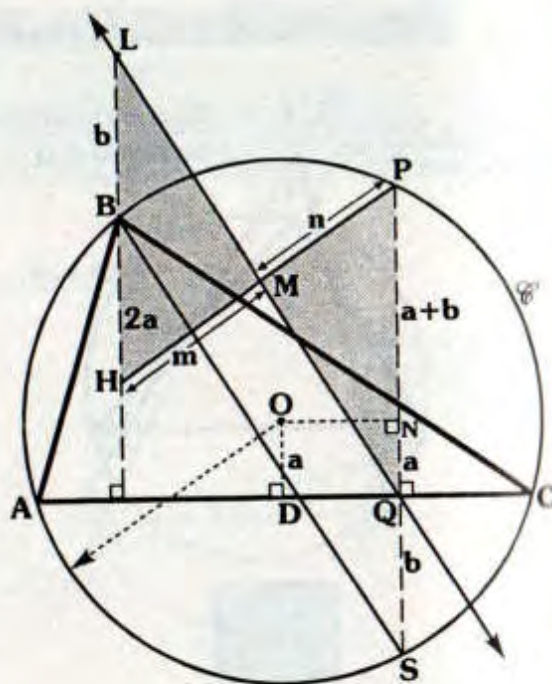


Si H : ortocentro del $\triangle ABC$ y \vec{L} recta de Simson del $\triangle ABC$, respecto a P.

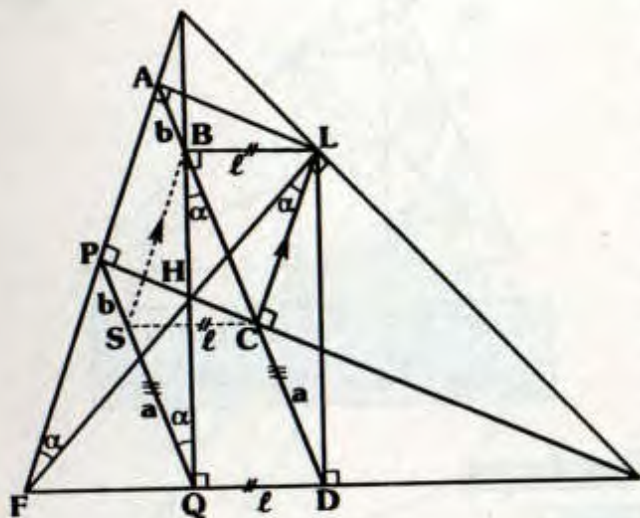
$$m = n$$

Demostración:

Método 1



Paso 2



• Como:

$$\overline{PF} \parallel \overline{LC} \Rightarrow m\angle PFL = m\angle FLC = \alpha$$

• $\triangle FPHQ$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle PQH = \alpha$

• $\triangle BLCH$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle HBC = \alpha$,
con lo cual $\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$.

• Luego ubicamos S en \overline{PQ} , tal que

$$\overline{SC} \parallel \overline{QD} \Rightarrow SC = QD = \ell \quad y$$

$$SQ = DC = a$$

(SCDQ paralelogramo)

• BLDQ: Rectángulo $\Rightarrow BL = QD = \ell$

• Puesto que $\overline{SC} \parallel \overline{BL}$ y $SC = BL = \ell$
 $\Rightarrow \overline{BS} \parallel \overline{CL}$ (SCLB: paralelogramo)

• ABSP: Paralelogramo

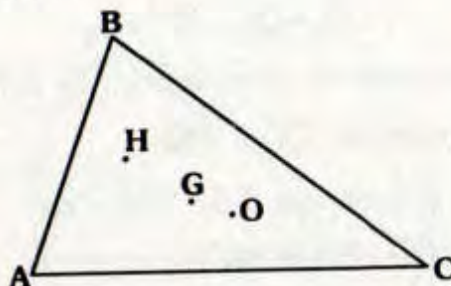
$$\Rightarrow PS = AB = b$$

$$\therefore PQ = AD - BC$$

11.6 RECTA DE EULER

TEOREMA

El ortocentro, baricentro y circuncentro, de un triángulo no equilátero, son colineales.

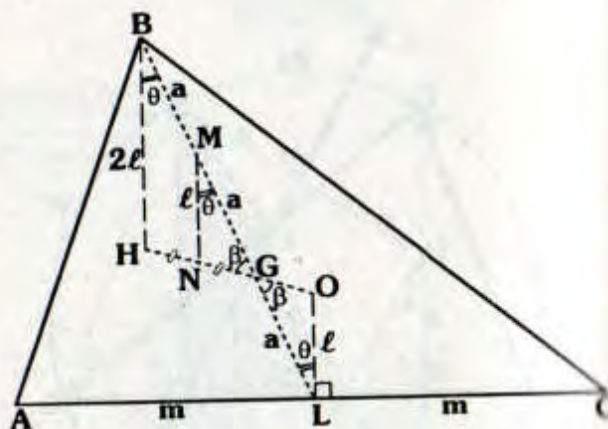


Para el $\triangle ABC$: H: Ortocentro

G: Baricentro ; O: Circuncentro

H, G y O son colineales

Demostración:



• Como G es baricentro, entonces BL es mediana, así tenemos:

$$AL = LC = m \quad y \quad BG = 2(GL) = 2a$$

• Por el teorema 8.4 (B):

$$m\angle OLC = 90^\circ$$

• Por el teorema 8.6 (A):

$$BH = 2(OL) = 2\ell$$

- Luego trazamos la base media MN del $\triangle BHG$ ($BM = MG = a$).

$$\Rightarrow MN = \ell \quad \text{y} \quad \overline{MN} \parallel \overline{BH}$$

- $\triangle MNG \cong \triangle GOL$ (LAL)

$$\Rightarrow m\angle MGN = m\angle LGO = \beta$$

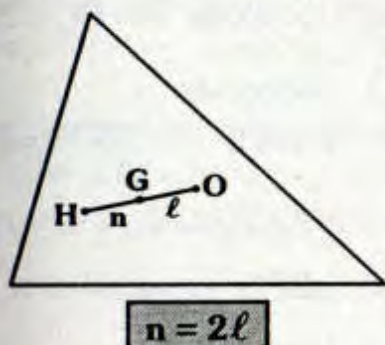
\therefore H, G y O son colineales

Además: $HG = 2(GO)$

CORDARIO

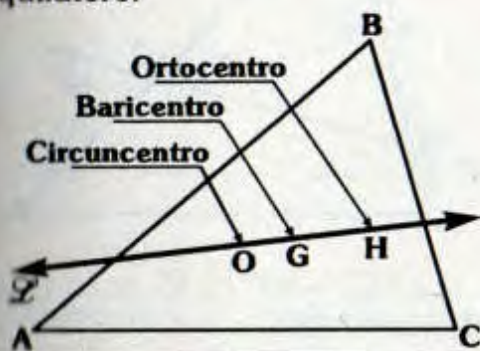
En todo triángulo no equilátero, la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del circuncentro al baricentro.

No cumple:



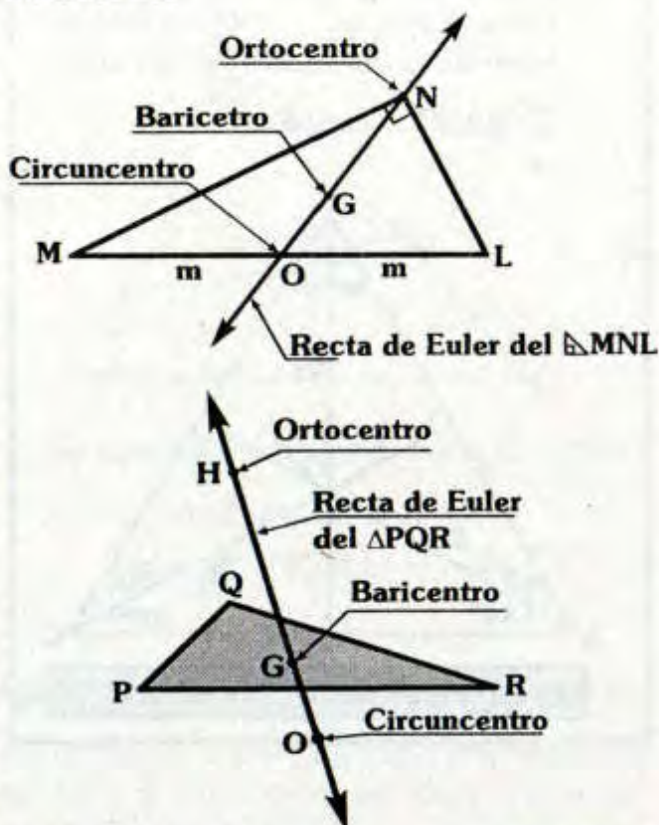
RECTA DE EULER

Es la recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo no equilátero.



L : Recta de Euler del $\triangle ABC$

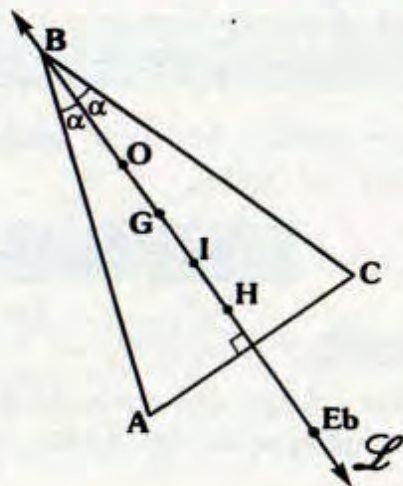
También:



Nota

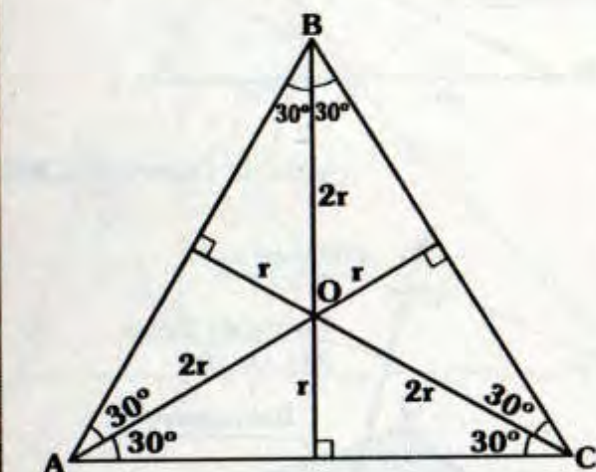
- En todo triángulo isósceles, el circuncentro, baricentro, incentro, ortocentro y el excentro relativo a la base, son colineales (recta de Euler).

L : Recta de Euler del triángulo isósceles ABC de base \overline{AC} .



- Para todo triángulo equilátero el circuncentro, baricentro, incentro y baricentro, coinciden.

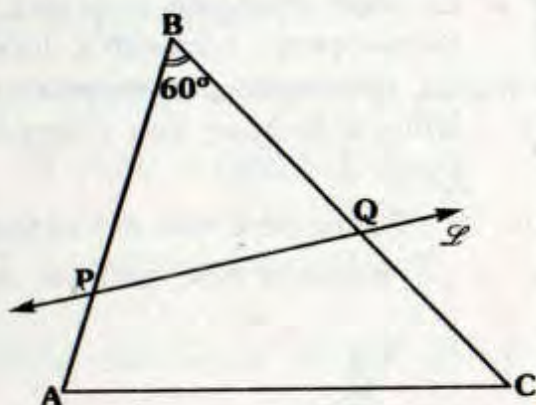
Si $\triangle ABC$: Equilátero



\Rightarrow O: Circuncentro, incentro, ...

PROPIEDADES

1

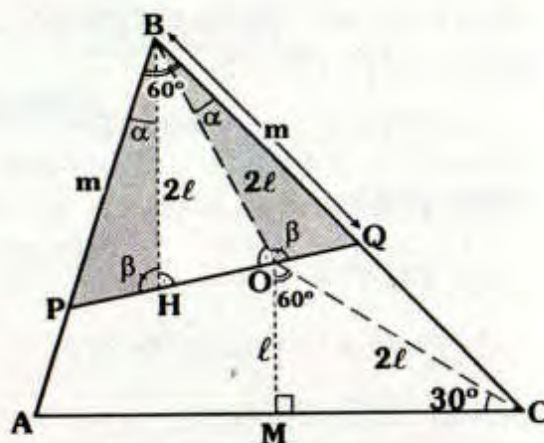


Si: $m\angle ABC = 60^\circ$ y \vec{l} es la recta de Euler del $\triangle ABC$.

\Rightarrow $\triangle PBQ$: Equilátero

Demostración:

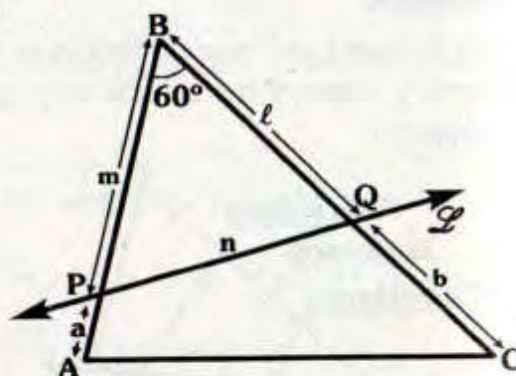
- Ubicamos el ortocentro H y circuncentro O del $\triangle ABC$.



- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por el teorema 8.6: $BH = 2(OM) = 2\ell$
- Puesto que O es circuncentro:
 $\Rightarrow m\angle MOC = m\angle ABC = 60^\circ$ y
 $OC = OB$
- $\triangle MOC$: Notable $\Rightarrow OC = 2\ell$
- $\triangle BHO$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle BHP = m\angle BOQ = \beta$
- $\triangle BHP \cong \triangle BOQ$ (ALA) $\Rightarrow BP = BQ = m$
 $\therefore \triangle BPQ$ es equilátero.

Además: $PH = OQ$

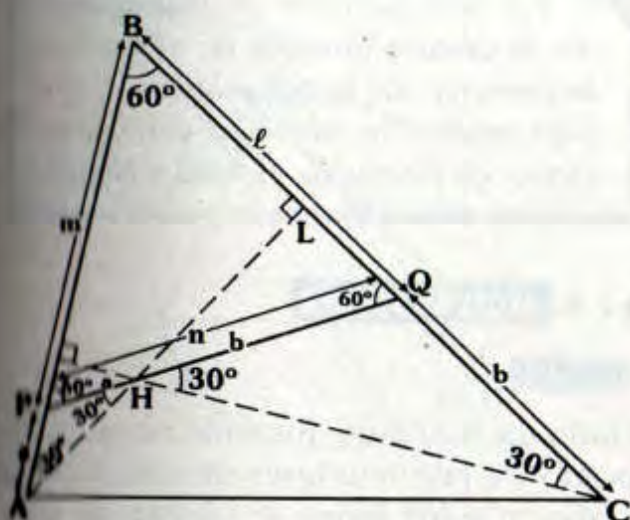
2



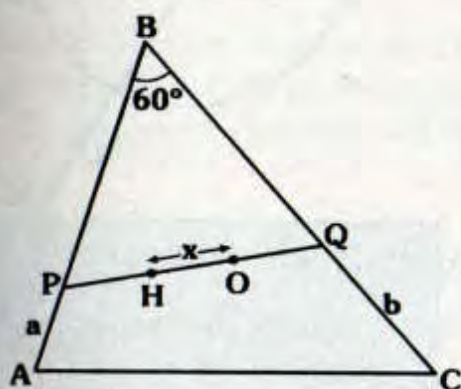
Si $m\angle ABC = 60^\circ$ y \vec{l} es la recta de Euler del $\triangle ABC$.

$\Rightarrow m = n = \ell = a + b$

Demostración:



- Por la propiedad anterior:
 $m = n = \ell$ y $m\angle BPQ = 60^\circ$
- Ubicamos el ortocentro H, con lo cual \overline{AL} es altura $\Rightarrow m\angle BAL = 30^\circ$.
- $\triangle APH$: Isósceles $\Rightarrow PH = a$, del mismo modo: $HQ = b$
 $\therefore m = \ell = n = a + b$

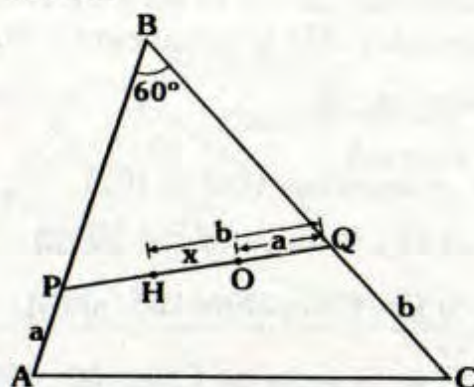


Si: $m\angle ABC = 60^\circ$,

H: Ortocentro y O: Circuncentro.

$\Rightarrow \boxed{x = b - a}$

Demostración:

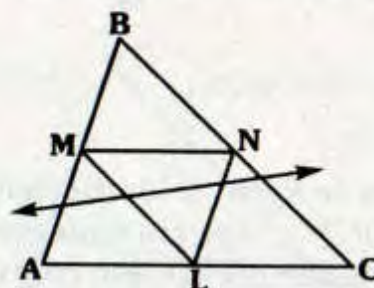


- Se sabe que \overleftrightarrow{HO} es la recta de Euler.
- De las propiedades anteriores
 $PH = a$, $HQ = b$ y $OQ = a$
 $\therefore x = b - a$

TEOREMA

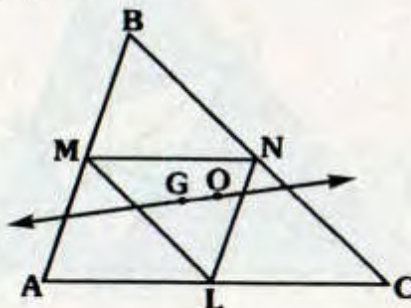
La recta de Euler de todo triángulo es también la recta de Euler de su respectivo triángulo mediano.

Si \overleftrightarrow{L} : Recta de Euler del $\triangle ABC$ y $\triangle MNL$: Triángulo mediano del $\triangle ABC$.



$\Rightarrow \overleftrightarrow{L}$ Recta de Euler del $\triangle MNL$.

Demostración:

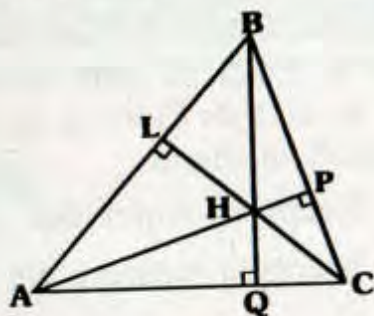


- Puesto que $\vec{\mathcal{L}}$ es la recta de Euler, el baricentro (G) y circuncentro (O) se ubican en $\vec{\mathcal{L}}$.
- Por el teorema 10.2 y 10.3:
 \Rightarrow G: Baricentro del $\triangle MNL$.
y O: Ortocentro del $\triangle MNL$.
 $\therefore \vec{\mathcal{L}}$ es la recta de Euler del $\triangle MNL$.

TEOREMA

Se cumple:

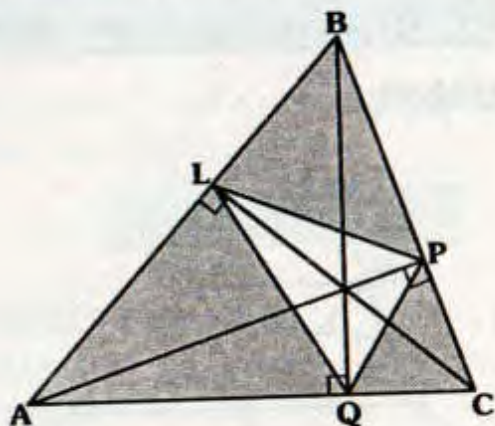
Las rectas de Euler de los triángulos ABH, BCH, ACH y ABC son concurrentes.



TEOREMA

Se cumple:

Las rectas de Euler de los triángulos AQL, BPL, CPQ y la circunferencia de Feuerbach del $\triangle ABC$, son concurrentes.



Nota

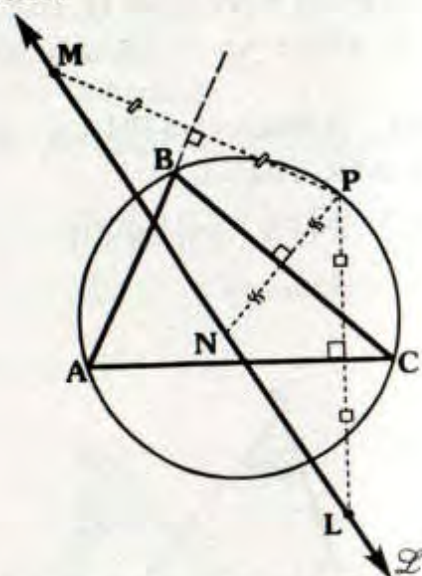
La demostración de este teorema la desarrollaremos en el capítulo denominado temas selectos. También estarán incluidos las demostraciones de Rectas de Housel y Nagel.

11.7 RECTA DE STEINER

TEOREMA

Dado un triángulo, los simétricos de un punto de la circunferencia circunscrita respecto a los lados se ubican en una recta denominada recta de Steiner.

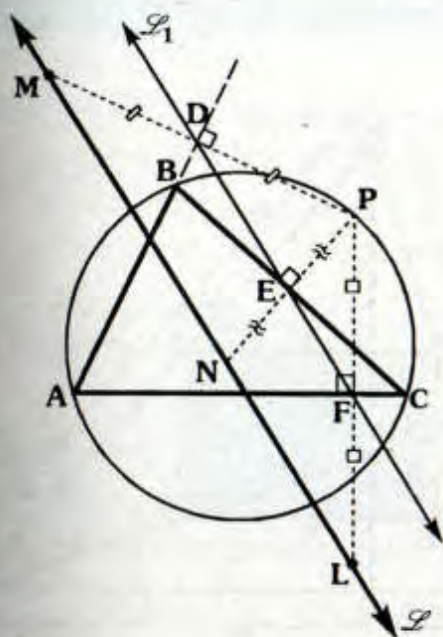
Si, M, N y L son simétricos de P respecto a los lados AB, BC y AC respectivamente.



\Rightarrow M, N y L colineales y
 $\vec{\mathcal{L}}$: Recta de Steiner, respecto a P.

Demostración:

- Sabemos: D, E y F son colineales
 $(\vec{\mathcal{L}}_1$: recta de Simson).

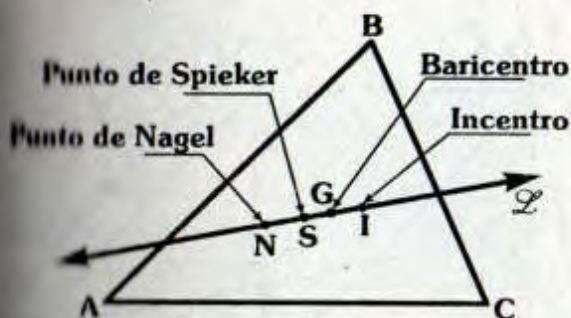


- EF: Base media $\triangle NPL \Rightarrow \overline{NL} \parallel L_1$
 - ED: Base media $\triangle MNP \Rightarrow \overline{MN} \parallel L_1$
 - Por postulado de N solo podemos trazar una recta paralela.
- \therefore M, N y L son colineales.

11.8 RECTA DE HOUSEL

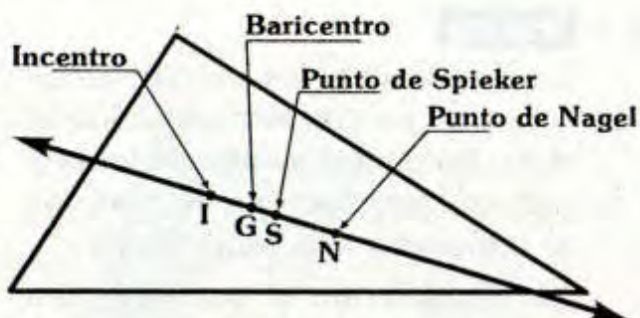
TEOREMA

El incentro, baricentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker, de un triángulo, se ubican en una recta denominada recta de Housel.



Recta de Housel del $\triangle ABC$

PROPIEDADES



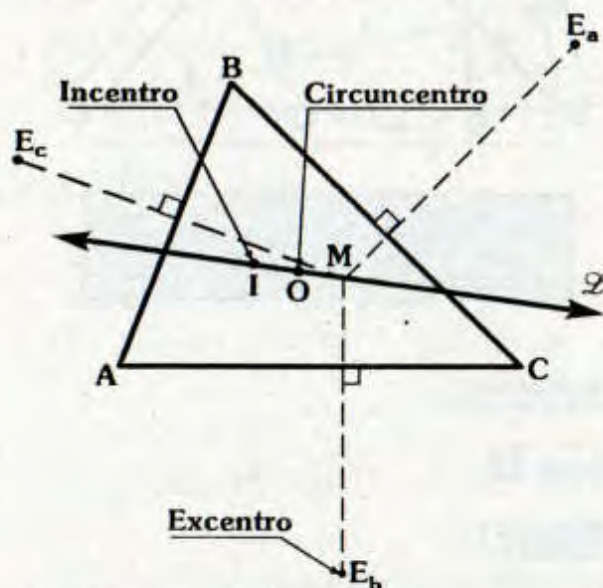
Se cumple:

$$IS = SN, \quad GN = 2(GI) \\ \text{y} \quad (IG)(SN) = (GS)(IN)$$

11.9 RECTA DE NAGEL

TEOREMA

El incentro, el circuncentro y el punto de concurrencia de las perpendiculares trazadas desde los excentros a los lados del triángulo, se encuentran en una recta conocida como la recta de Nagel.



$$\overleftrightarrow{L}: \text{Recta de Nagel del } \triangle ABC$$

Además: $IO = OM$

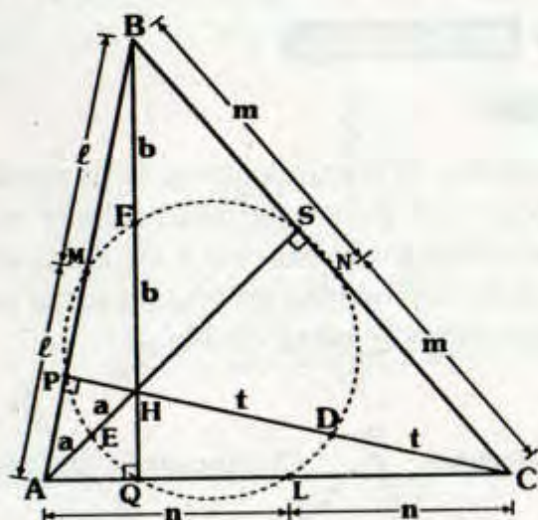
12. CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

12.1 TEOREMA

En un triángulo los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro son concíclicos.

La circunferencia que pasa por dichos puntos se denomina circunferencia de los nueve puntos, circunferencia de Euler o de Feuerbach.

En el gráfico:



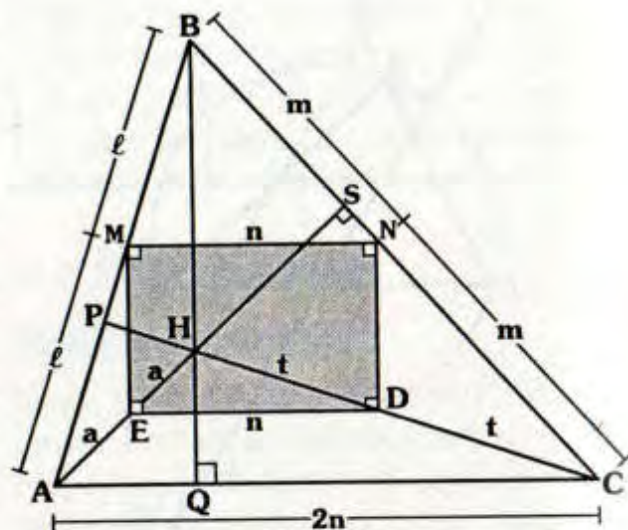
M, N, L, P, Q, S, E, F y D:
Concíclicos

Demostración:

Método 1

Paso 1

- En el $\triangle ABC$, $\triangle AHC$, $\triangle AHB$ y $\triangle BHC$ se tiene: \overline{MN} , \overline{ED} , \overline{EM} , \overline{ND} son bases medias respectivamente.



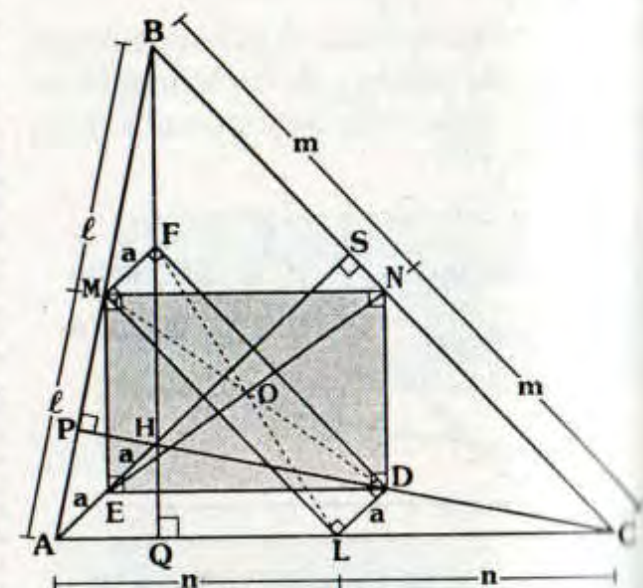
- Por teorema:

$$\overline{MN} \parallel \overline{AC} \text{ y } \overline{ED} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{ED}$$

$$\overline{EM} \parallel \overline{HB} \text{ y } \overline{DN} \parallel \overline{HB} \Rightarrow \overline{EM} \parallel \overline{DN}$$

- Pero: $\overline{HB} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{EM} \perp \overline{MN}$
 \Rightarrow EMND es rectángulo

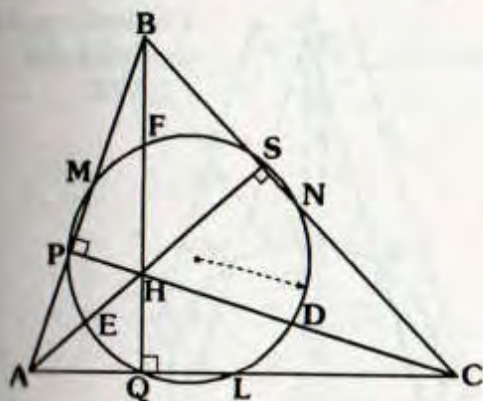
Paso 2



- En forma similar al anterior, MFDL es también rectángulo.
 - Además \overline{MD} es diagonal para ambos rectángulos (MFDL y EMND), luego \overline{FL} , \overline{EN} y \overline{MD} concurren en O (punto medio de dichas diagonales).
 - Con ello tenemos que O equidista de E, M, F, N, D y L.
 - En los triángulos rectángulos FQL, ESN y MPD, O es punto medio de \overline{FL} , \overline{EN} y \overline{MD} (hipotenusas de dichos triángulos rectángulos).
 - Por teorema del \triangle : O equidista de P, Q y S, debido a que $EN = MD = FL$.
- \therefore E, M, N, D, F, L, P, Q y S son concíclicos.

Método 2

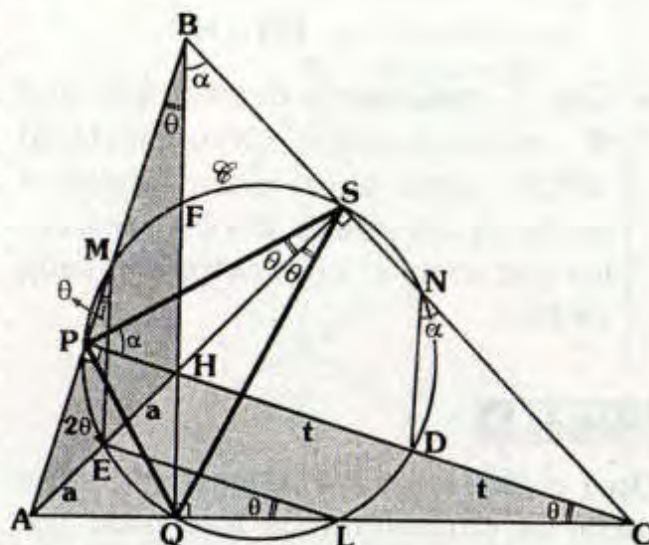
Otra forma para verificar el teorema, sería trazar la circunferencia que pasa por los pies de las alturas y comprobar que los otros puntos están sobre dicha circunferencia.



En el gráfico P, Q y S son pies de las alturas, se ha trazado la circunferencia que pasa por P, Q y S, vamos a demostrar:

$$\begin{aligned} AM &= MB, \quad BN = NC \quad \text{y} \quad AL = LC \\ AE &= EH, \quad BF = FH \quad \text{y} \quad HD = DC \end{aligned}$$

Así tenemos:



- $\triangle PQS$ es triángulo órtico de $\triangle ABC$.
- Por teorema 10.5 y 10.6 se tiene:
 - H es incentro del $\triangle PQS$.
 - A, B y C son excentros de $\triangle PQS$.
 - Notar que \mathcal{C} es la circunferencia circunscrita al $\triangle PQS$.
- Por teorema 8.3-B:

$$AE = EH, \quad HD = DC \quad \text{y} \quad HF = FB$$
- $\triangle PBSH$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PSH = m\angle PBH = \theta$$
- Por ángulo inscrito: $m\widehat{EP} = 2\theta$

$$\Rightarrow m\angle PME = \theta$$
- En $\triangle AHB$: $\overline{ME} \parallel \overline{BH}$ y debido a que $AE = EH$ se concluye \overline{EM} es base media $\Rightarrow AM = MB$.
- En forma análoga:

En $\triangle AHC$: \overline{EL} es base media

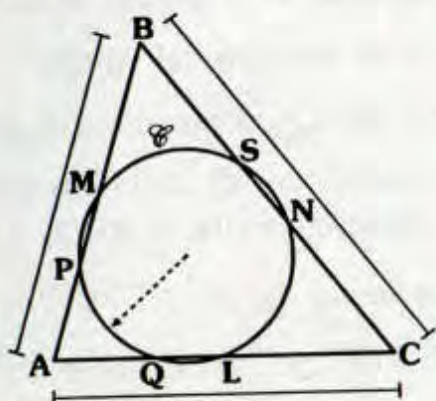
$$\Rightarrow AL = LC$$

En $\triangle BHC$: \overline{ND} es base media
 $\Rightarrow BN = NC$

- Con lo cual queda demostrado que \mathcal{C} , circunferencia circunscrita al $\triangle PQS$, corta en el punto medio a los lados del $\triangle ABC$ y a los segmentos que unen el ortocentro con cada vértice.

Método 3

Otro método similar al anterior, sería trazar la circunferencia que pasa por los puntos medios de cada lado y demostrar que los otros puntos están sobre esa circunferencia.



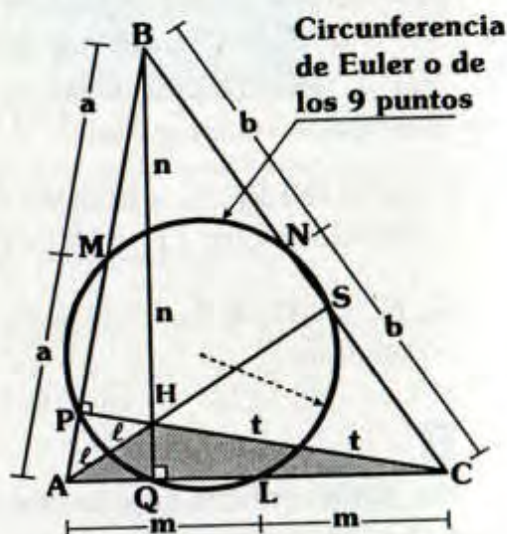
En el gráfico M, N y L son puntos medios de los lados del $\triangle ABC$, \mathcal{C} es la circunferencia que pasa por ellos, se demuestra en forma análoga que P, Q y S son pies de las alturas y que \mathcal{C} pasa por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro y cada vértice.

Método 4

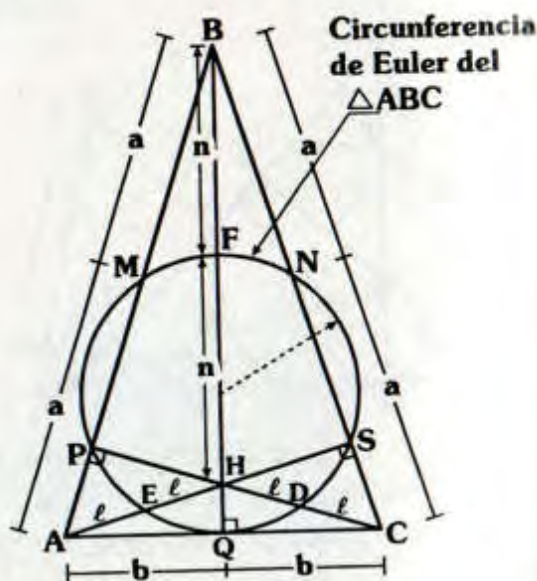
En el capítulo de temas selectos, daremos otra demostración de la circunferencia de los nueve puntos.

Observaciones

- Notar que el triángulo órtico y el triángulo mediano están circunscritos a la circunferencia de Euler.
- En el gráfico, la circunferencia de Euler o de los nueve puntos del $\triangle ABC$, es la misma para los triángulos AHC , AHB y BHC .



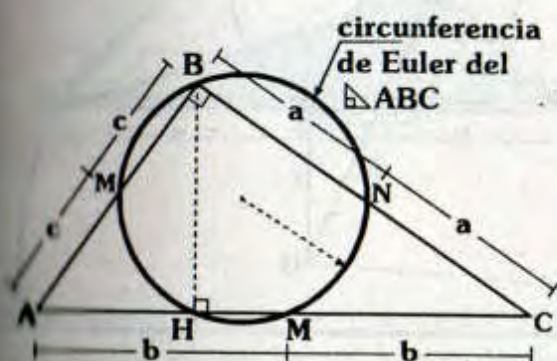
- En el triángulo isósceles.



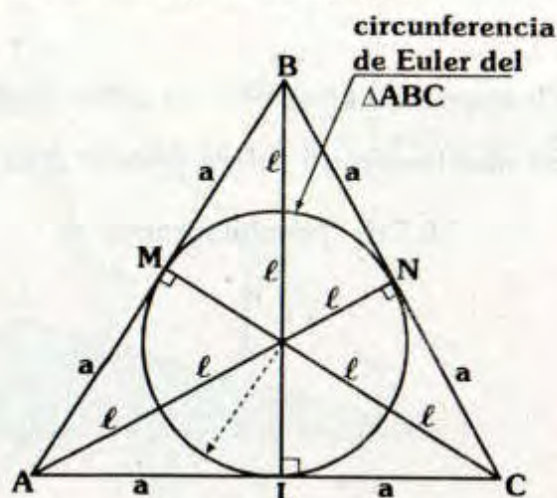
En el gráfico $AB=BC$.

Se cumple \overline{AC} es tangente a la circunferencia de Euler.

• En el triángulo rectángulo.



• En el triángulo equilátero.



• En el gráfico el triángulo ABC es equilátero, \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} son tangentes a la circunferencia de Euler, la cual coincide con la circunferencia inscrita.

TEOREMAS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA DE EULER O DE LOS NUEVE PUNTOS

12.2.1 El radio de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es la mitad del circunradio de dicho triángulo.

Demostración:

• Sea \mathcal{C} la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC .

\overline{BS} : Altura $\Rightarrow \overline{FL}$ es diámetro de:
 $\mathcal{C} \Rightarrow FL = 2r$

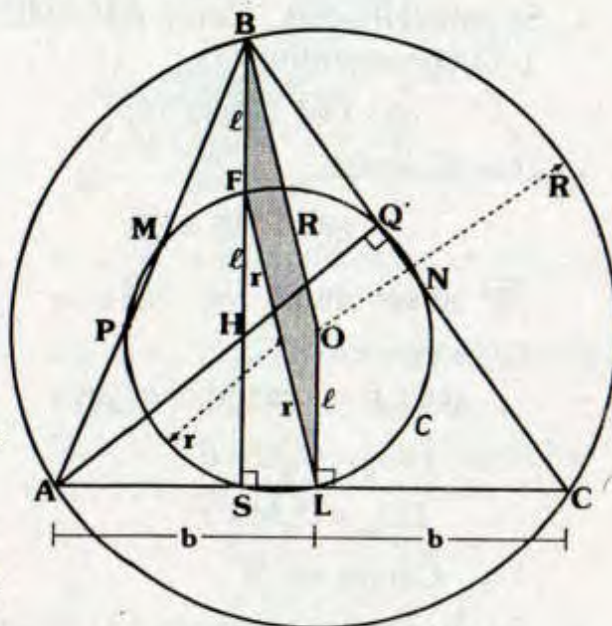
• Debido a que $AL=LC$
 $\Rightarrow \overline{OL} \perp \overline{AC}$

• Por teorema: $HB = 2(OL)$
 $\Rightarrow HF = FB = OL$

• Luego $OLFB$ es un paralelogramo, pues:

$\overline{FB} \parallel \overline{LO}$ y $FB = LO \Rightarrow 2r = R$

$$\therefore r = \frac{R}{2}$$



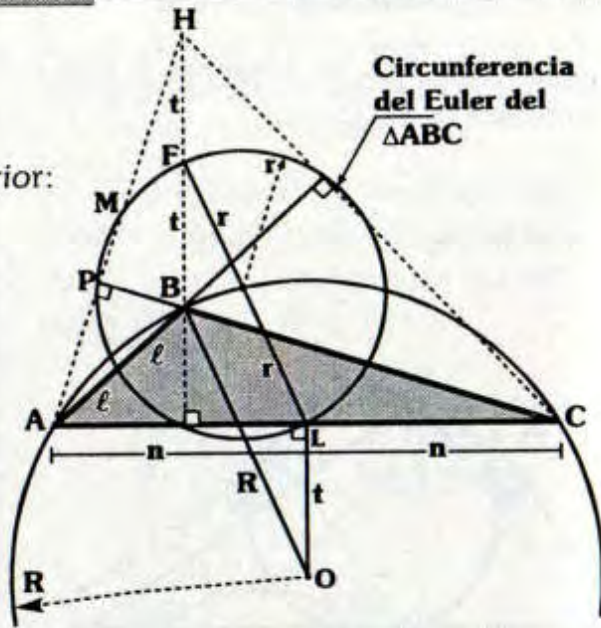
Observación

En el gráfico el $\triangle ABC$ es obtusángulo.

Se demuestra en forma similar a la anterior:

OLFB: Paralelogramo y

$$r = \frac{R}{2}$$



12.2.2 El centro de la circunferencia de los nueve puntos es punto medio del segmento que une el ortocentro y circuncentro de un triángulo dado.

Demostración:

- En el gráfico sea \mathcal{C} la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$.
- H y O: Ortocentro y circuncentro del $\triangle ABC$, respectivamente.
- Se sabe $HE = EB$. Como $AM = MC$ y O circuncentro.
 $\Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por teorema:

$$\Rightarrow OM = HE = EB$$

\overline{BP} al ser altura $\Rightarrow \overline{EM}$:

Diámetro de \mathcal{C}

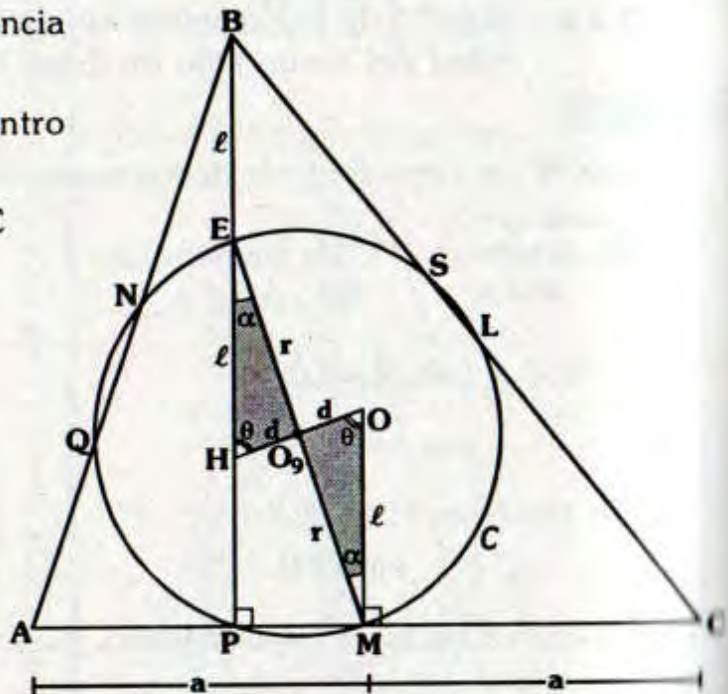
$$\triangle HO_9E \cong \triangle OO_9M \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow HO_9 = O_9O = d$$

$$EO_9 = O_9M = r$$

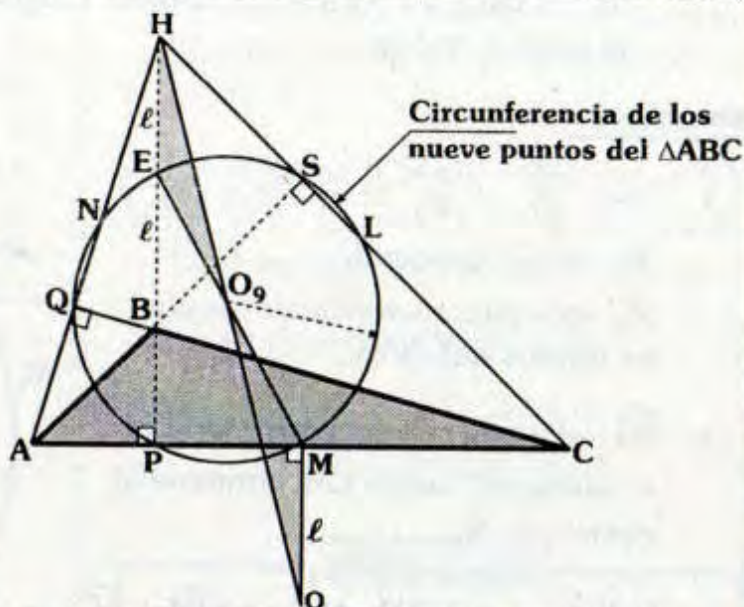
O_9 : Centro de \mathcal{C}

- Se demuestra entonces O_9 biseca a \overline{OH} .

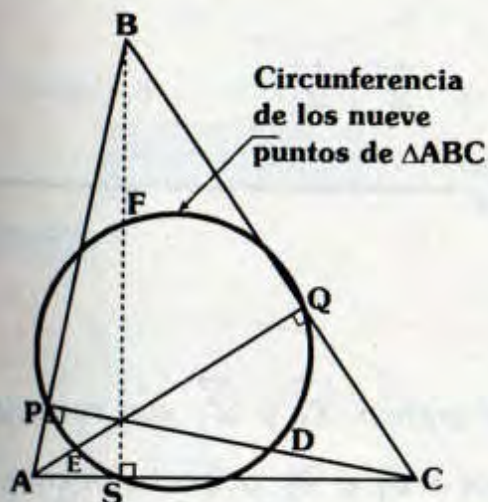


Nota

Si el $\triangle ABC$ es obtusángulo también se demuestra en forma análoga: $OO_9 = O_9H$ donde H es ortocentro, O es circuncentro del $\triangle ABC$ y O_9 es centro de la circunferencia de los nueve puntos.



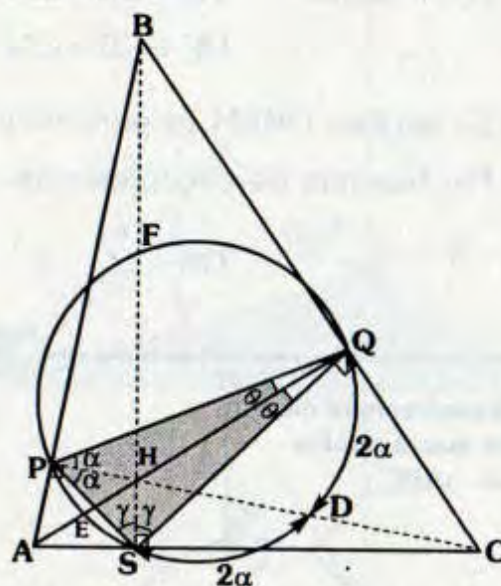
12.2.3. La altura de un triángulo biseca al arco, en la circunferencia de los nueve puntos, cuyos extremos son los pies de las otras alturas.



En el gráfico, se cumple:

$$\widehat{mPE} = \widehat{mES}; \widehat{mPF} = \widehat{mFQ} \quad \text{y} \\ \widehat{mQD} = \widehat{mDS}$$

Demostración:



- Sea \mathcal{C} la circunferencia de los nueve puntos.
- Se observa $\triangle PQS$ es el triángulo órtico del $\triangle ABC$.
- Por teorema 10.5 H es incentro del $\triangle PQS$, por ángulo inscrito:

$$\widehat{mPE} = \widehat{mES} = 2\theta$$

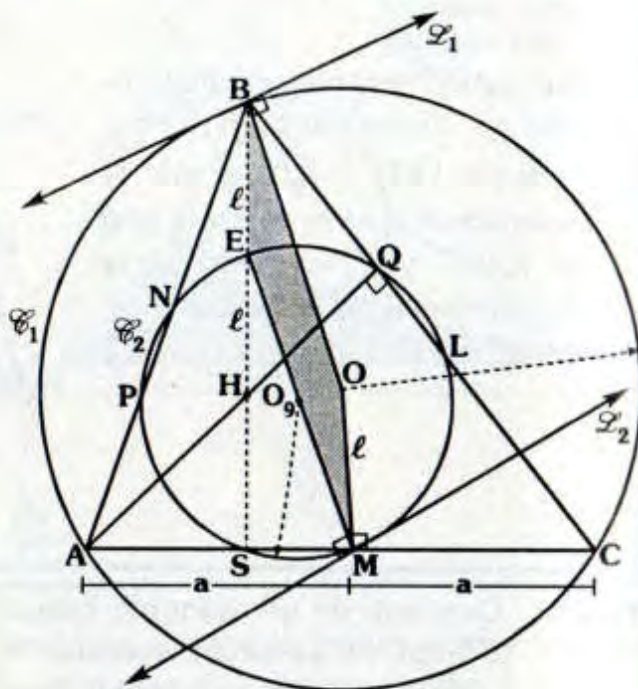
$$\widehat{mSD} = \widehat{mDQ} = 2\alpha$$

$$\widehat{mPF} = \widehat{mFQ} = 2\gamma$$

12.2.4 La recta tangente a la circunferencia de los nueve puntos en el punto medio de un lado, es paralela a la recta tangente a la circunferencia circunscrita en el vértice opuesto.

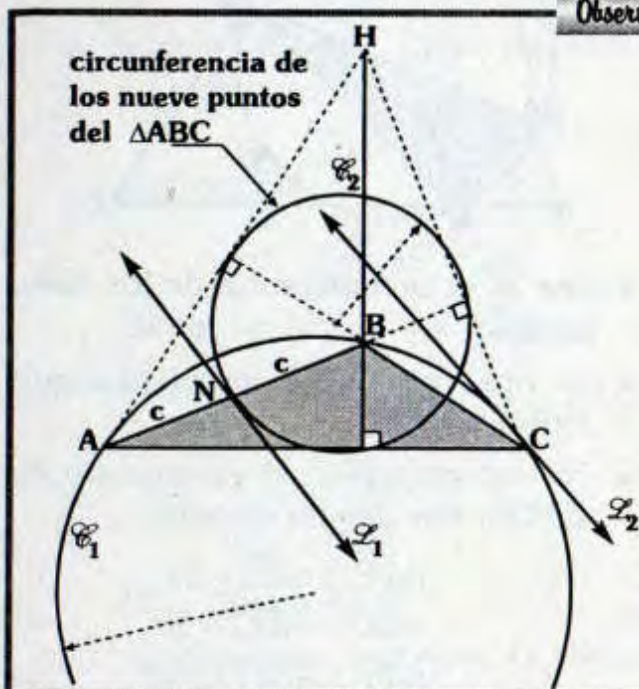
Demostración:

- Sea: $\vec{\mathcal{L}}_1$ y $\vec{\mathcal{L}}_2$ tangente a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 respectivamente.
 \mathcal{C}_2 es la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$.
- \overline{BS} : altura y H ortocentro $\Rightarrow \overline{EM}$ es diámetro, luego \overline{EM} contiene al centro de \mathcal{C}_2 .
- Debido a que $AM=MC \Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por teorema: $HB=2(OM)$
 $\Rightarrow HE=EB=OM=\ell$
- Se verifica OBEM es paralelogramo (debido a que $EB=OM$ y $\overline{EB} \parallel \overline{OM}$).
- Por teorema de circunferencia.



$$\overline{OB} \perp \vec{\mathcal{L}}_1 \text{ y } \overline{EM} \perp \vec{\mathcal{L}}_2 \Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$$

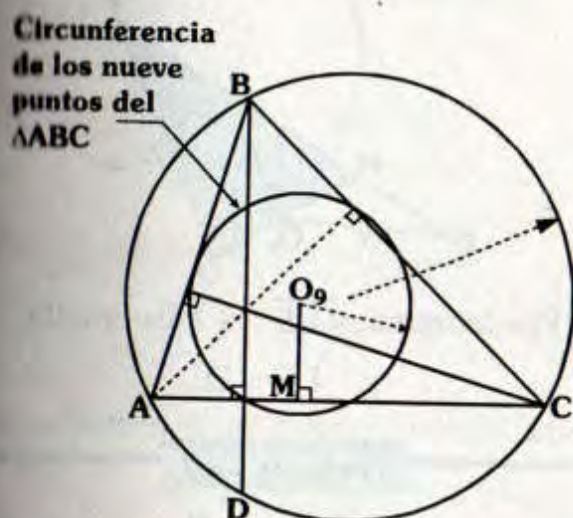
Observación



En el gráfico $\vec{\mathcal{L}}_1$ y $\vec{\mathcal{L}}_2$ son recta tangentes a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 respectivamente, se cumple:

$$\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$$

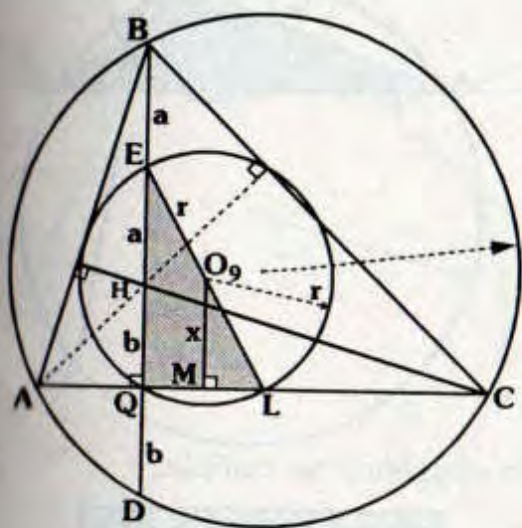
14.2.5. La longitud del segmento, cuyos extremos son un vértice de un triángulo y el punto de corte de la prolongación de la altura trazada de dicho vértice hacia un lado con la circunferencia circunscrita, es cuatro veces la distancia del centro de la circunferencia de los nueve puntos hacia dicho lado.



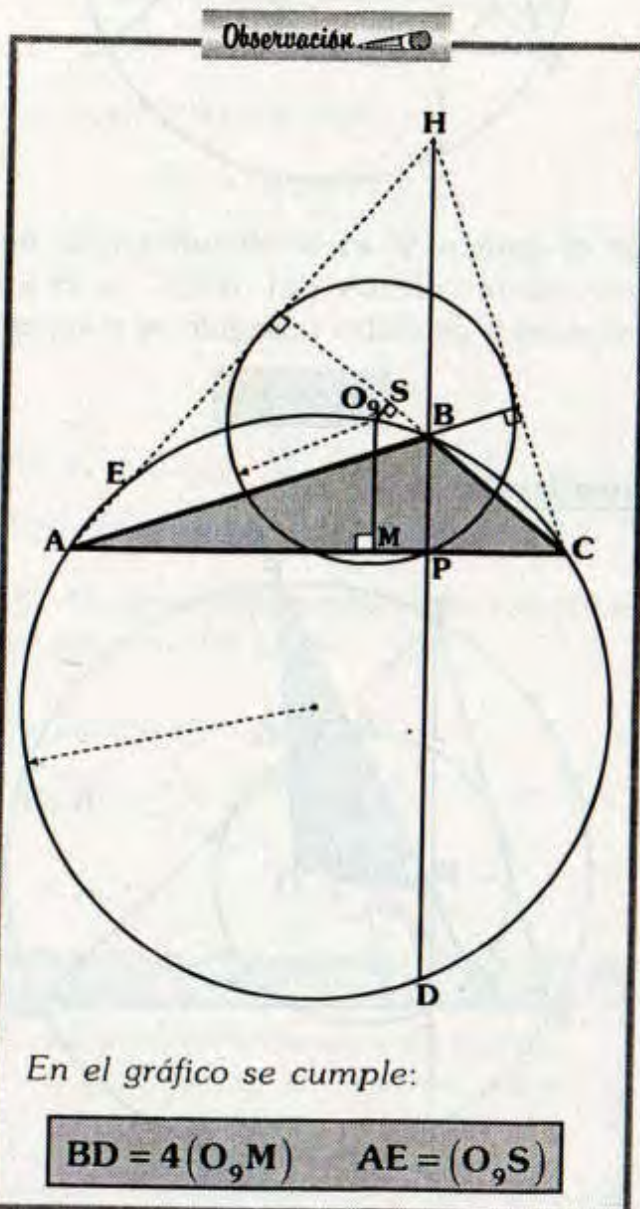
En el gráfico se cumple:

$$BD = 4(O_9M)$$

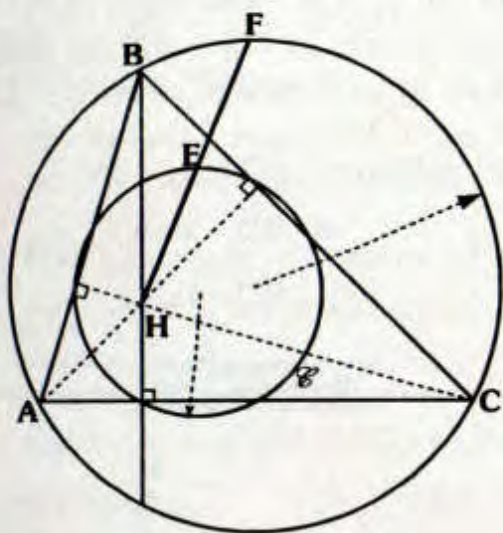
Demostración:



- Debido a que \mathcal{C} es la circunferencia de los nueve puntos, se cumple $BE=EH$ donde H es ortocentro del $\triangle ABC$.
- Por teorema 8.5: $HQ=QD$, como \overline{BQ} : altura $\Rightarrow \overline{EL}$ es diámetro, en $\triangle EQL$: $\overline{O_9M}$ es base media $\Rightarrow a+b=2x$.
- Del gráfico: $BD=2a+2b$
 $\Rightarrow BD=2(a+b)$
 $\therefore BD=4x$



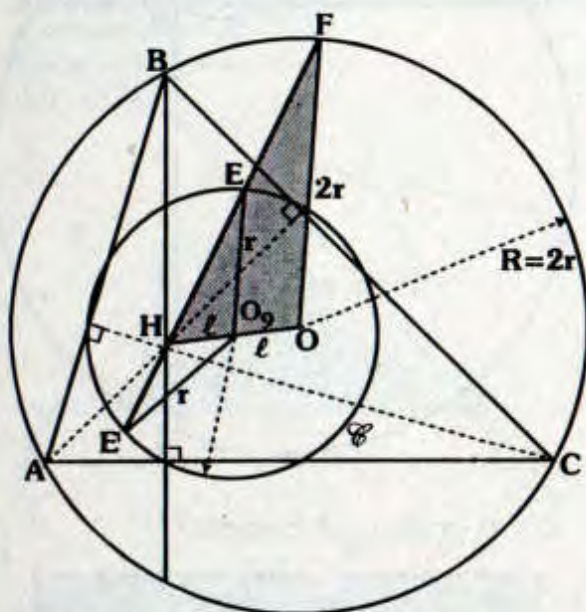
12.2.6 La circunferencia de los nueve puntos biseca al segmento que une el ortocentro con cualquier punto de la circunferencia circunscrita a un triángulo.



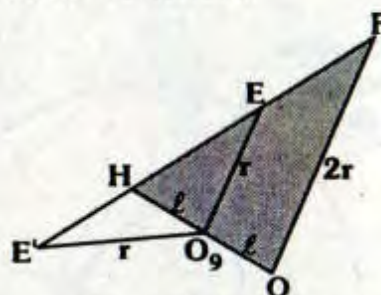
En el gráfico \mathcal{C} es la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$ y H es ortocentro de dicho triángulo se cumple:

$$HE = EF$$

Demostración:

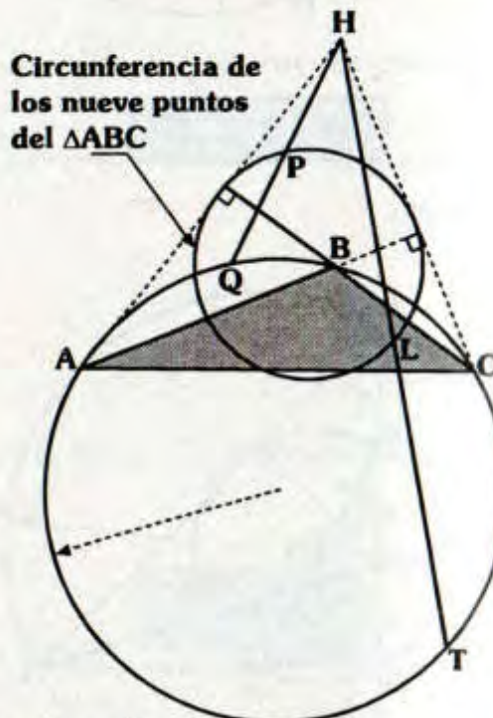


- Sea \mathcal{C} la circunferencia de los nueve puntos cuyo centro es O_9 y O es centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.
- Por teorema: 12.11 y 12.1.2 se tiene: $H=2r$; O, O_9 y H son colineales, además $OO_9 = O_9H$.
- En $\triangle OHF$ se tendrá:



- Por teorema: $\overline{O_9E}$ es base media.
 $\therefore HE = EF$

Observación



En el gráfico se cumple:

$$HP = PQ \text{ y } HL = LT$$

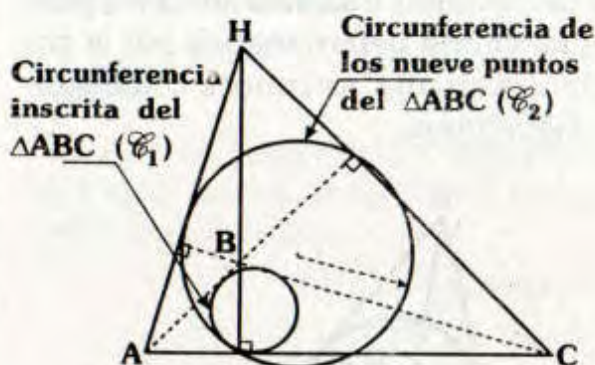
10.11 TEOREMA DE FEUERBACH

La circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita en un triángulo y a cada una de las circunferencias exinscritas.



En el gráfico se cumple:

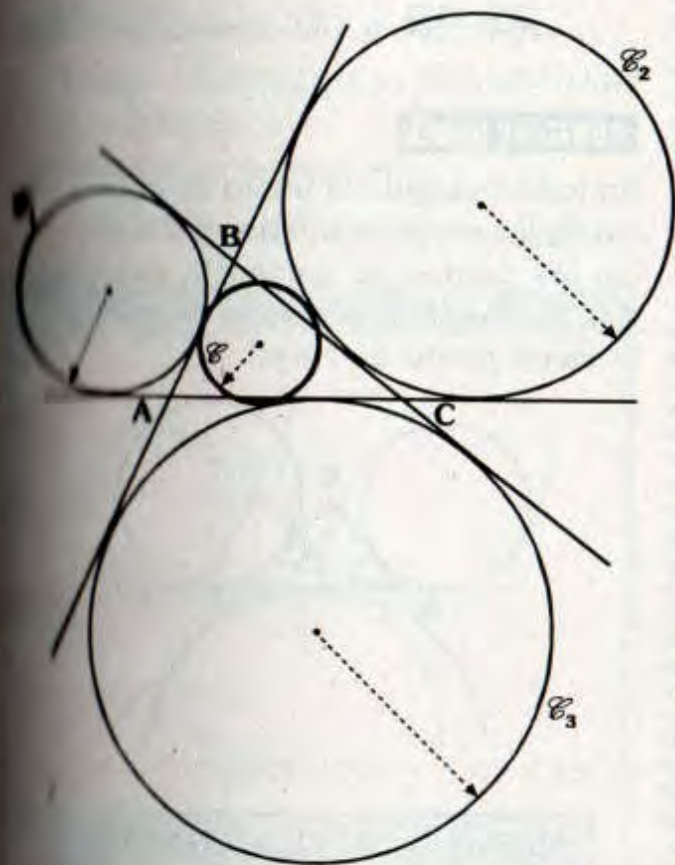
C_1 y C_2 son tangentes



En el gráfico se cumple:

C_1 es tangente a C_2

Con respecto a las circunferencias exinscritas:



En el gráfico: C_1 , C_2 y C_3 son las circunferencias exinscritas del $\triangle ABC$.

C es la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$.

Se cumple:

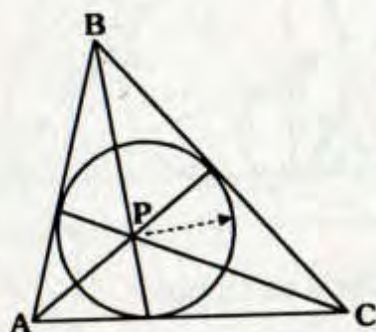
C es tangente a C_1 , C_2 y C_3 .

Nota
La demostración de este maravilloso teorema se realizará en el capítulo de temas selectos.

13. OTROS PUNTOS NOTABLES

PUNTO DE GEORGOONNE

En todo triángulo el punto de concurrencia de las cevianas trazadas hacia los puntos de tangencia determinados por la circunferencia inscrita, se conoce como punto de Georgonne.



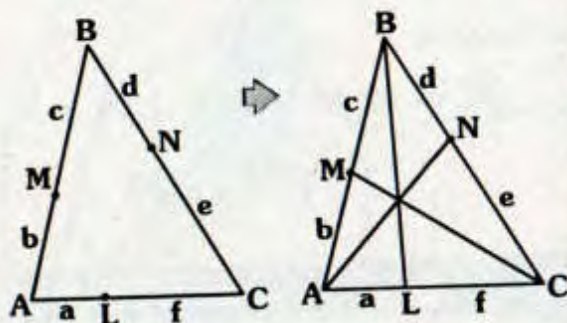
P: Punto de Georgonne del $\triangle ABC$.

Demostración:

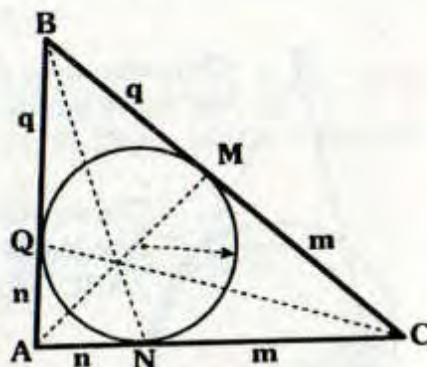
Tener en cuenta lo siguiente:

Observación

"Recíproco del teorema de Ceva"



Si $ace = bdf \Rightarrow \overline{AN}, \overline{BL} \text{ y } \overline{CM}$ son concurrentes.



- Por teorema de circunferencia:
 $AQ=AN=n$, $BQ=BM=q$,
 $CN=CM=m$

- Del gráfico:

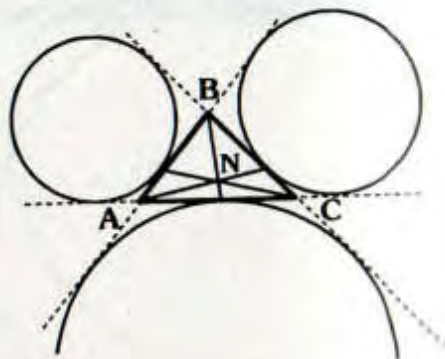
$$(AQ)(BM)(CN) = (AN)(BQ)(CM)$$

- De la observación, se tiene:

$\therefore \overline{AM}, \overline{BN} \text{ y } \overline{CQ}$ son concurrentes

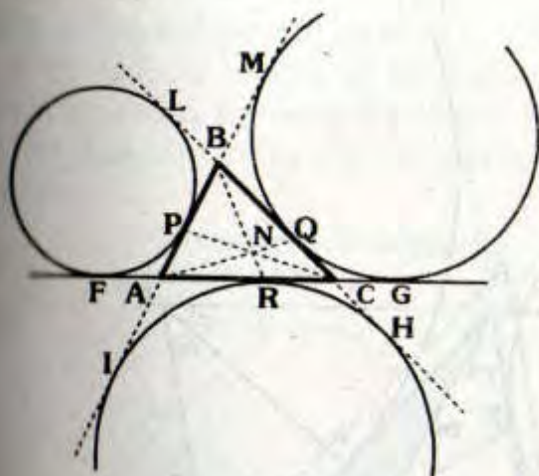
PUNTO DE NAGEL

En todo triángulo el punto de concurrencia de las cevianas interiores trazadas hacia los puntos de tangencia determinados por las circunferencias exinscritas, se le llama punto de Nagel.



N: Punto de Nagel del $\triangle ABC$

Demostración:

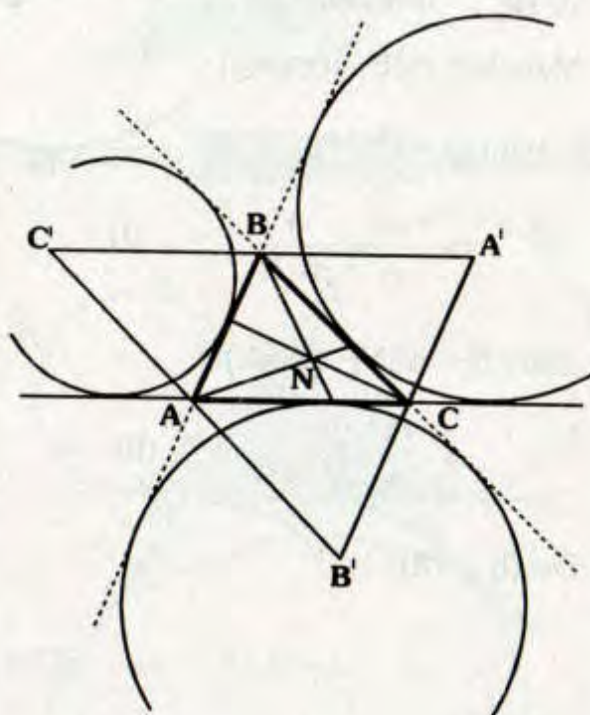


- Por el teorema 8.2:
 $AF=CG$, $CH=BL$ y $AI=BM$... (I)
- Por teorema de circunferencia:
 $AF=AP$, $AI=AR$, $BL=BP$
 $BM=BQ$, $CH=CR$ y $CG=CQ$... (II)
- De (I) y (II):
 $AP=CQ$, $BQ=AR$ y $BP=CR$
- Como: $(AP)(BQ)(CR)=(PB)(QC)(AR)$
la observación del punto de Geogonne, se concluye:
 \overline{AQ} , \overline{BR} y \overline{CP} son concurrentes.

Por lo cual al trazar una de las cevianas AQ , BR o CP determinan regiones triangulares isoperimétricas. Debido a esta característica al punto de Nagel también es conocido como el **punto isoperimétrico**.

TEOREMA

El punto de Nagel de un triángulo es el incentro de su respectivo triángulo anticomplementario.



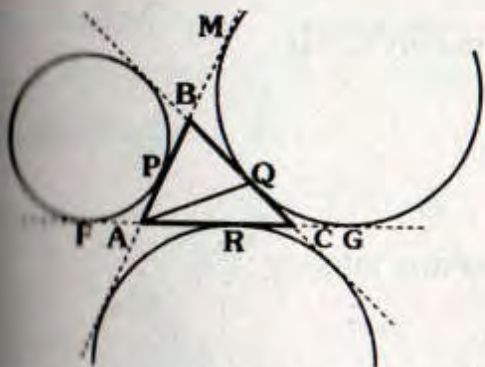
Si N : Punto de Nagel del $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$: Anticomplementario del $\triangle ABC$.

\Rightarrow **N: Incentro del $\triangle A'B'C'$**

Demostración:

Sea: $p = \frac{a+b+c}{2}$

Nota



- $AQ=AM$, $BM=BQ$ y $CQ=CG$
 \Rightarrow Perímetro $\triangle ABQ$ = Perímetro $\triangle AQC$

- Por teorema 8.2 :

$$CD = p \Rightarrow AD = p - b$$

- Por teorema de circunferencia :

$$AE = p - b$$

- Análogamente :

$$BE = CF = p - a$$

- $\triangle FBC$: Teorema de Menelao (\overline{CE} : secante)

$$(p - b)m(p - a) = (p - a)nb$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{p - b} \quad \dots (I)$$

- $\triangle BA'N \sim \triangle SNF$ (AAA)

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{\ell} \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$\ell = p - b \Rightarrow SC = p - b + p - a = c \Rightarrow SC = CA'$$

- $\triangle A'SC$:

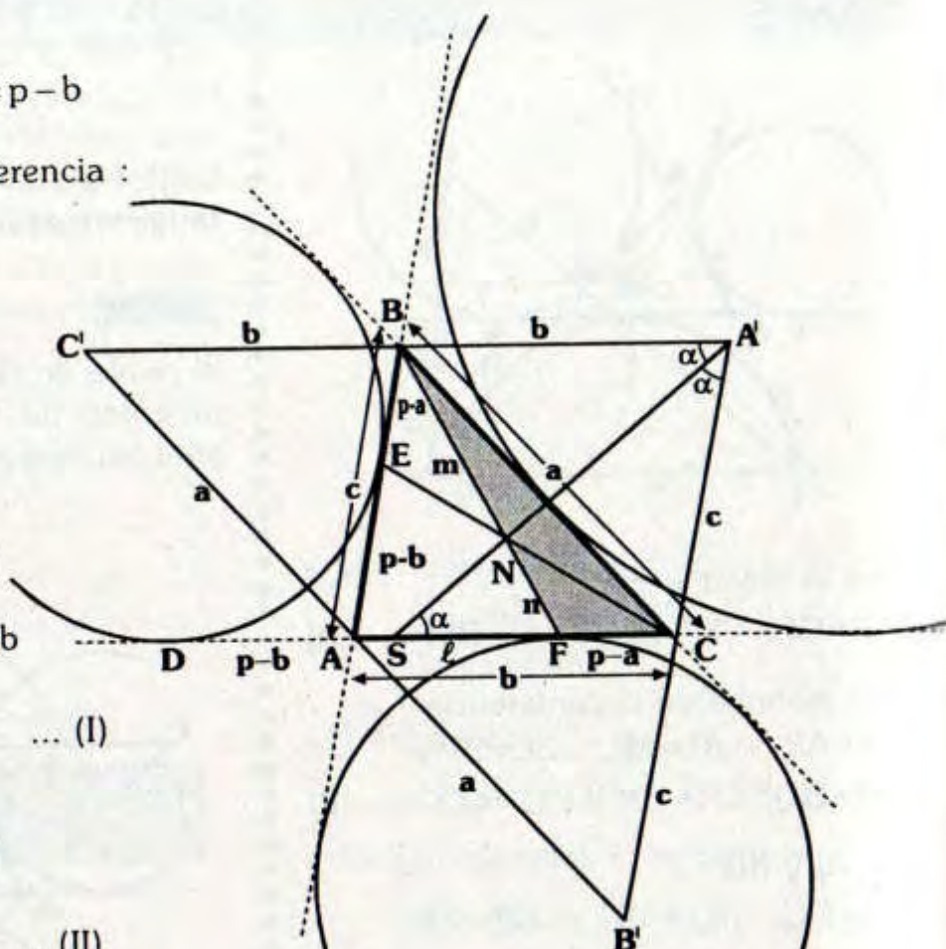
$$\text{Isósceles} \Rightarrow m\angle A'SC = m\angle SA'C = \alpha$$

- Por ángulos alternos internos; $m\angle SA'C = \alpha$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'N}: \text{Bisectriz interior}$$

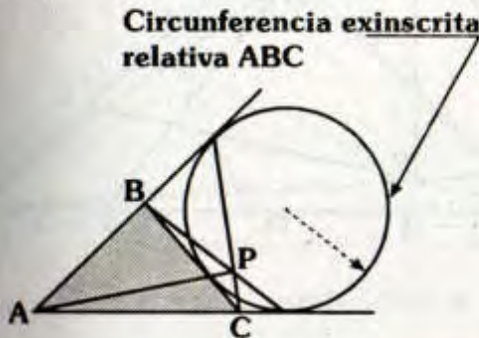
- Análogamente, $\overline{B'N}$ y $C'N$ son bisectrices.

$$\therefore N: \text{Incentro del } \triangle ABC$$



PUNTO DE PONCELET

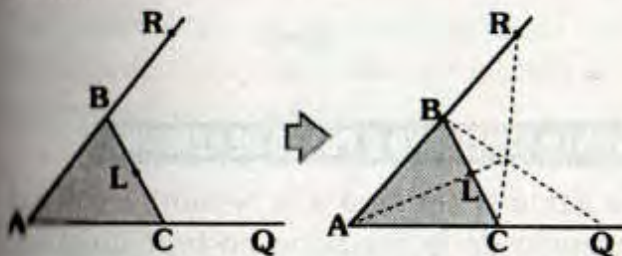
Dada la circunferencia exinscrita relativa a un lado, el punto de concurrencia de las cevianas trazadas hacia los puntos de tangencia se llama punto de poncelet.



P: Punto de Poncelet relativo a \overline{BC} del $\triangle ABC$.

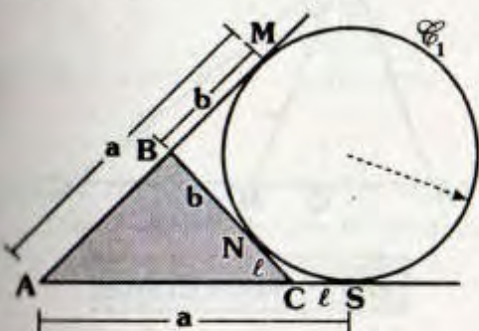
Demostración

Para demostrar la concurrencia de las líneas mencionadas, usaremos el siguiente teorema (recíproco del teorema de Ceva).



(a) \overline{AL} , \overline{BQ} y \overline{CR} son concurrentes
 $(AL)(BL)(CQ) = (AQ)(LC)(BR)$

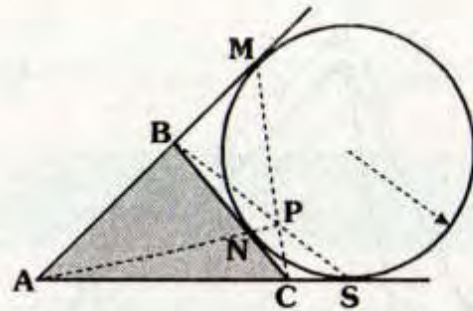
En el gráfico sea \mathcal{C}_1 la circunferencia exinscrita relativa a \overline{BC} .



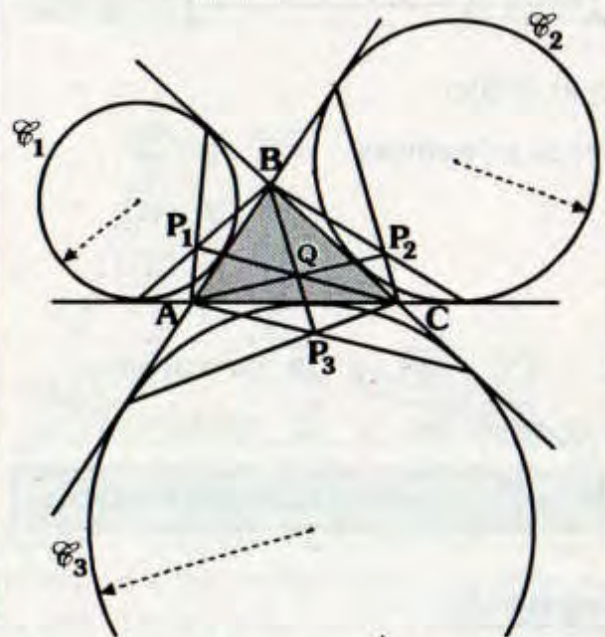
Por teoremas de circunferencia $AM=AS$,
 $BM=BN$ y $NC=CS$

$$\Rightarrow (AM)(BN)(CS) = (AS)(NC)(BM)$$

Por el teorema mencionado \overline{BS} , \overline{CM} y \overline{AN} son concurrentes.



Observación

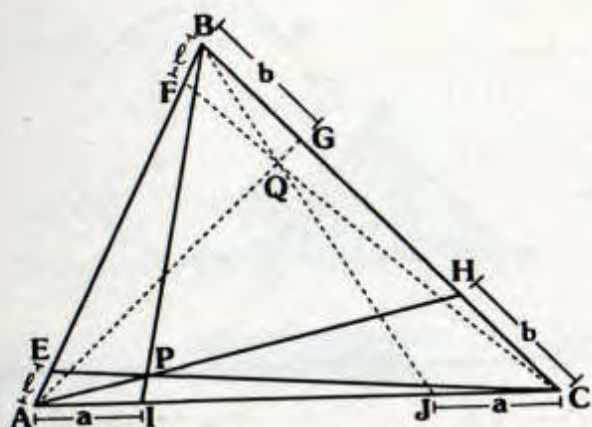


En el gráfico:

- \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 son las circunferencias exinscritas del $\triangle ABC$.
- P_1 , P_2 y P_3 : Puntos de Poncelet relativos a \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente.
- Q : Punto de Nagel del $\triangle ABC$.

PUNTOS CONJUGADOS ISOTÓMICOS

Si en un triángulo se trazan desde cada vértice un par de cevianas isotómicas tal que tres de ellas, una de cada vértice, sean concurrentes entonces las otras tres también concurren.



En el gráfico:

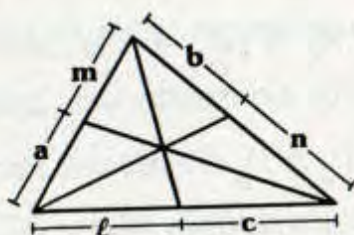
Líneas isotómicas: \overline{CE} y \overline{CF}
 \overline{BI} y \overline{BJ}
 \overline{AG} y \overline{AH}

Si: \overline{CE} , \overline{AH} y \overline{BI} concurren
 $\Rightarrow \overline{AG}$, \overline{BJ} y \overline{CF} concurren

P y Q: Conjugados isotómicos

Demostración:

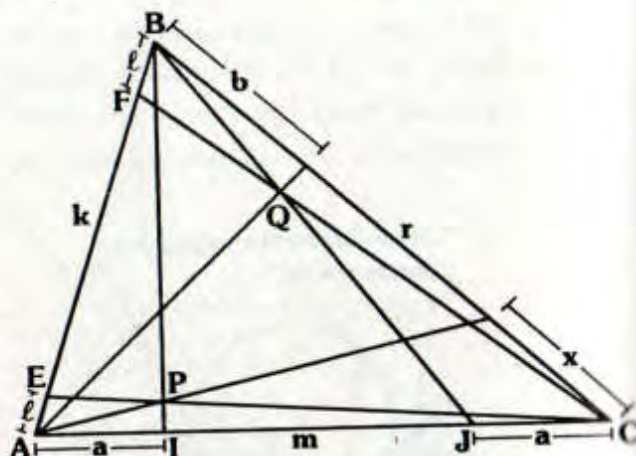
Tener en cuenta el Teorema de Ceva.



Se cumple:

$$abc = mn\ell$$

En el gráfico:



Se va a demostrar: $x = b$

Por Teorema de Ceva:

$$a(x)(\ell + k) = (a + m)(b + r)\ell$$

$$ab(\ell + k) = (a + m)(x + r)\ell$$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{b + r}{x + r}$$

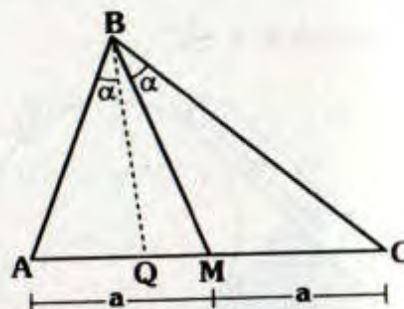
Acomodando: $(x + b + r)(x - b) = 0$

$$\therefore x = b$$

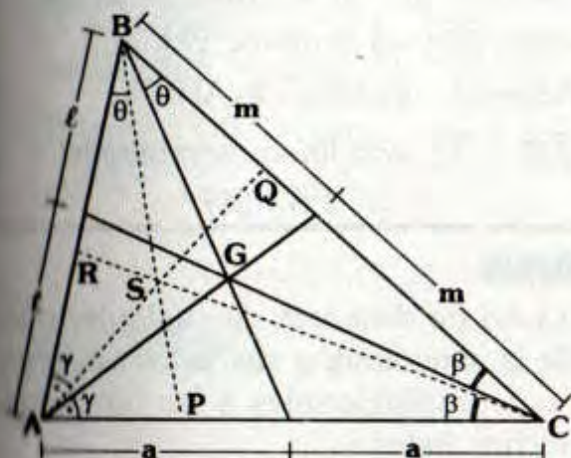
PUNTO SIMEDIANO O PUNTO DE LEMOINE

Se llama simediana a la ceviana isogonal respecto de la mediana en un triángulo.

El punto simediano es el punto de concurrencia de las semidianas de un triángulo.



BQ: Simediana



En el gráfico:

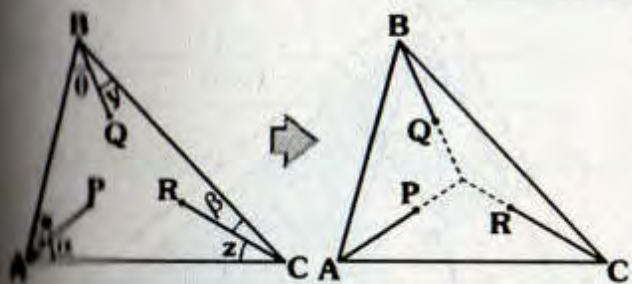
\overline{AQ} , \overline{BP} y \overline{CR} son simedianas

G : Baricentro del $\triangle ABC$.

S : Punto Simediano del $\triangle ABC$.

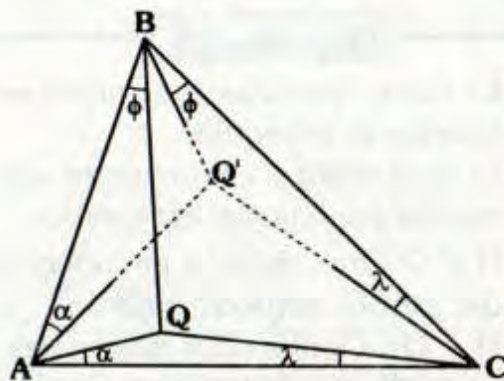
Demostración:

Para demostrar la concurrencia de las simedianas hay que tener en cuenta algunos teoremas previos:



Si $\sin \alpha \sin \beta \sin \theta = \sin x \sin z \sin \gamma \Rightarrow \overline{AP}$, \overline{CR} y \overline{CQ} son concurrentes

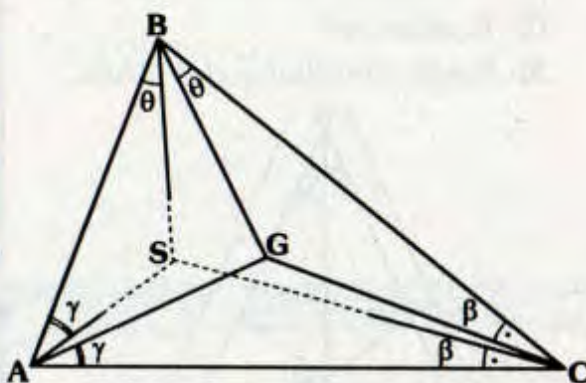
El teorema anterior es muy importante para la concurrencia, con el cual se demuestra rápidamente lo siguiente:



Si tres cevianas son concurrentes también lo son sus isogonales.

Q y Q' son conjugadas isogonales.

Con lo último la demostración de la concurrencia es inmediata:

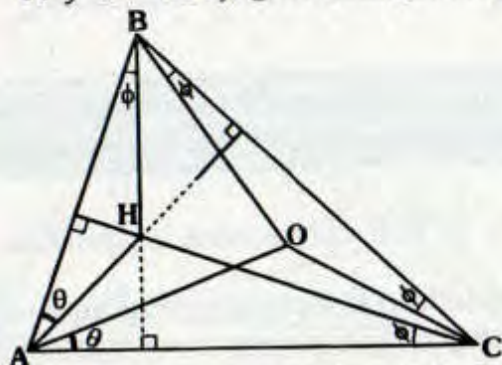


Debido a que las medianas son concurrentes en el baricentro (G), por el teorema anterior las isogonales de las medianas (simedianas) también son concurrentes (en S).

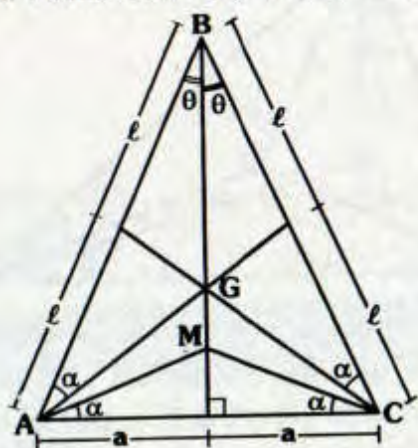
Luego G y S son conjugados isogonales.

Observación

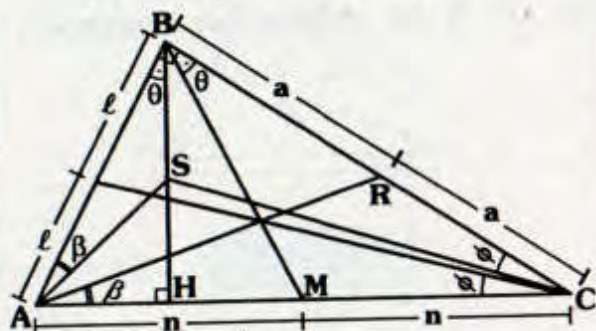
- El punto simediano siempre es interior al triángulo.
- El ortocentro y circuncentro son puntos conjugados isogonales.
H y O: Ortocentro y circuncentro del $\triangle ABC$ respectivamente.
H y O: Conjugados isogonales



- En triángulo isósceles: $AB=BC$
G: Baricentro
M: Punto simediano del $\triangle ABC$.



- En el triángulo rectángulo:
S: Punto simediano
Se cumple: $BS = SH$



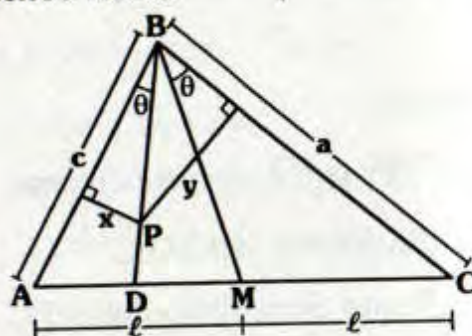
Con respecto al último podemos asegurar que la isogonal de la mediana \overline{BM} es la altura \overline{BH} .

Además: $\triangle ABS \sim \triangle AHB$

\overline{AR} y \overline{AS} son líneas homólogas
 $\Rightarrow BS = SH$

TEOREMAS

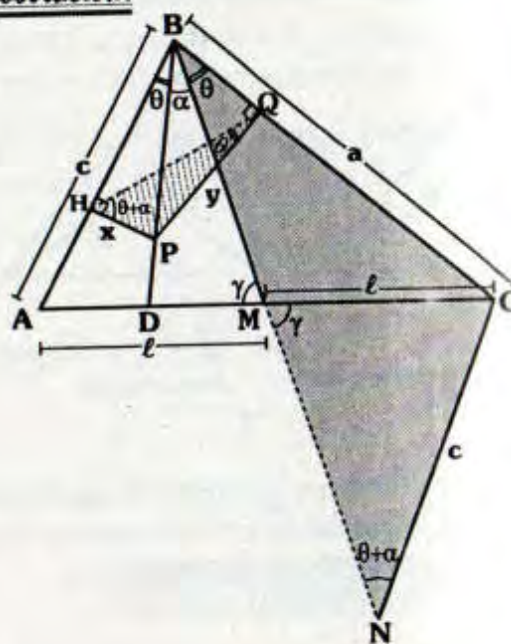
La razón de distancia de cualquier punto de la simediana a sus lados adyacentes son proporcionales a las longitudes de dichos lados.



En el gráfico: \overline{BD} es simediana
Se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a}$$

Demostración:



- Se prolonga \overline{BM} tal que $MN=BM$
 $\triangle NMC \cong \triangle BMA$ (L.A.L.)

$$\Rightarrow m\angle MNC = \theta + \alpha \text{ y } NC = c$$

$\triangle BHPQ$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle HQP = \theta \text{ y}$$

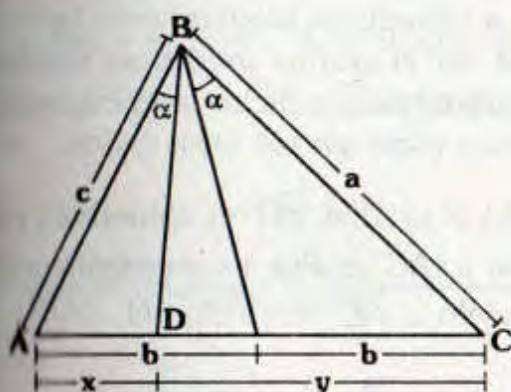
$$\Rightarrow m\angle PHQ = \theta + \alpha$$

$\triangle QHP \sim \triangle NBC$:

$$\Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{y}{a}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{c}{a}$$

- Los segmentos en que divide la simediana a un lado son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha simediana.



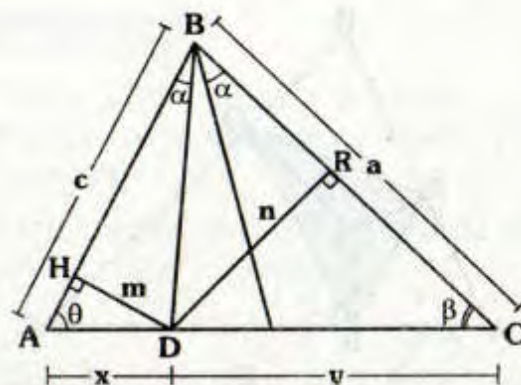
En el gráfico \overline{BD} es simediana se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{c^2}{a^2}$$

Demostración:

\overline{BD} es simediana.

Por teorema anterior: $\frac{m}{n} = \frac{c}{a}$



$$\triangle AHD: m = x \text{ sen } \theta$$

$$\triangle DRC: n = y \text{ sen } \beta$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{a}$$

$$\triangle ABC: \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \beta} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Reemplazando: } \frac{x}{y} \cdot \frac{a}{c} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{c^2}{a^2}$$

Nota

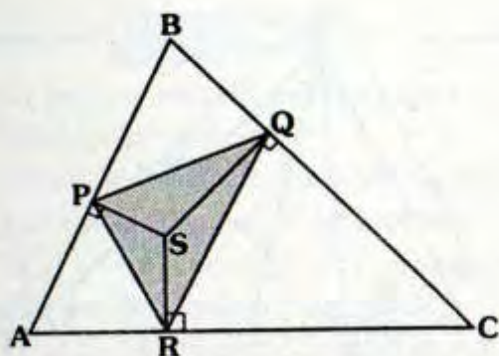
Si trazamos una ceviana tal que divida internamente al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes a dicha ceviana entonces dicha línea es **Simediana**.

- El punto simediano es baricentro del triángulo pedal asociado a dicho punto.

En el gráfico:

S : Punto simediano del $\triangle ABC$.

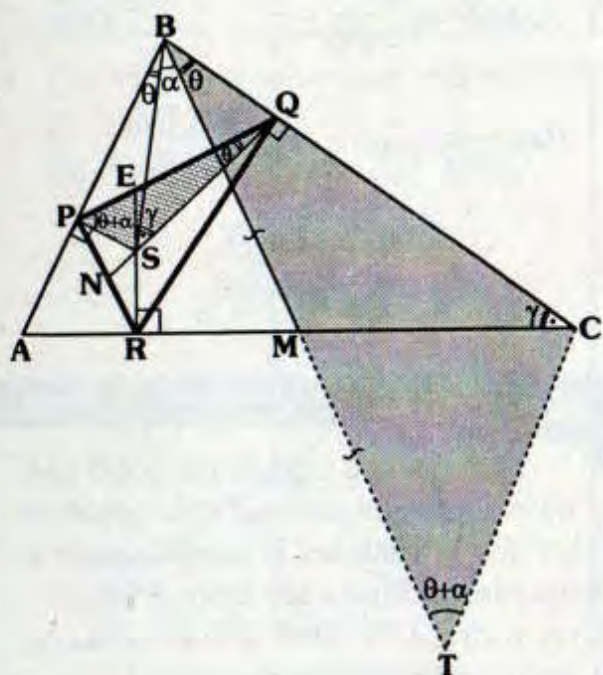
$\triangle PQR$: Triángulo pedal del $\triangle ABC$ respecto de S.



Se cumple:

S: Baricentro del $\triangle ABC$

Demostración:



En forma análoga al teorema se prolonga la mediana \overline{BM} (isogonal a \overline{BS}) tal que: $MT=BS$

$$\triangle AMB \cong \triangle CMT$$

$$\Rightarrow m\angle BTC = \theta + \alpha$$

$$m\angle CBT = \theta$$

$\triangle SPBQ$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PQS = \theta$$

$$m\angle SPQ = \theta + \alpha$$

$\triangle SRCQ$: Inscriptible

$$m\angle ESQ = \gamma$$

$$\triangle PSQ \sim \triangle TCB$$

\overline{CM} y \overline{SE} : Líneas homólogas

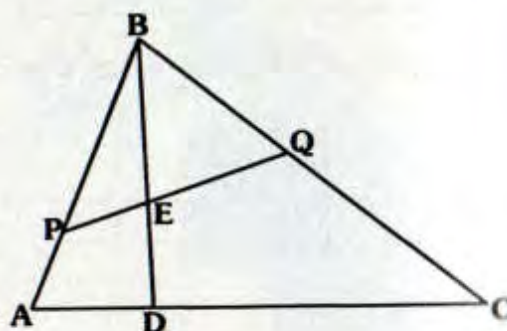
$$BM = MT \Rightarrow PE = EQ$$

Se demuestra \overline{RE} es mediana, en forma análoga \overline{QN} es mediana.

\therefore S es baricentro del $\triangle PQR$.

- La simediana relativa a un lado, corta en el punto medio al segmento antiparalelo a dicho lado cuyos extremos están en los otros lados.

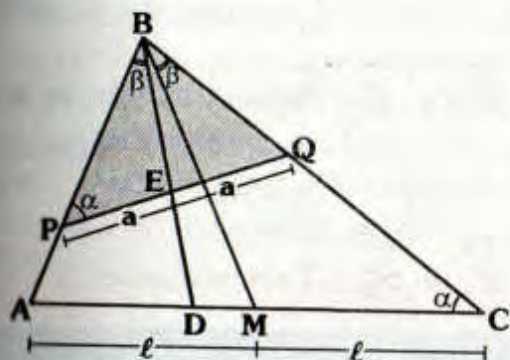
En el gráfico \overline{BD} es simediana relativa a \overline{AC} y \overline{PQ} es segmento antiparalelo a \overline{AC} respecto del $\angle ABC$.



Se cumple:

$$EP = EQ$$

Demostración:



Se traza la mediana \overline{BM} :

$$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle MBC$$

Por ser \overline{PQ} antiparalela respecto del $\angle ABC$,

$$\Rightarrow m\angle BPQ = m\angle ACB$$

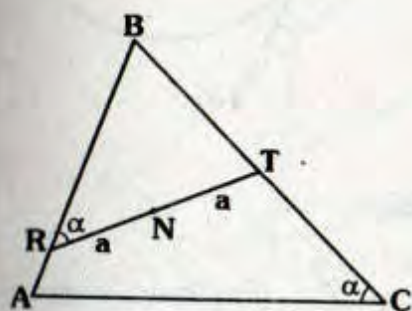
Del gráfico, se puede asegurar:

$$\triangle ABC \sim \triangle QBA$$

\overline{BM} y \overline{BE} son líneas homólogas, pero \overline{BM} es mediana $\Rightarrow \overline{BE}$ también es mediana:

$$\therefore EP = EQ$$

Observación

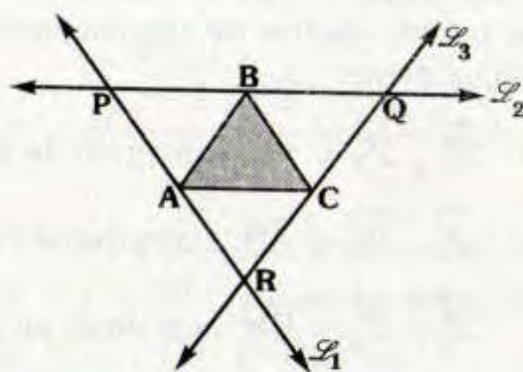


De lo anterior se puede concluir si \overline{RT} es antiparalelo con \overline{AC} respecto del $\angle ABC$ y $RN = NT$ entonces la simediana relativa a \overline{AC} pasa por N.

PUNTO EXMEDIANO

Se llama exmedianas a las rectas paralelas a los lados opuestos trazadas desde los vértices.

El punto exmediano es el punto de intersección de dos exmedianas.



En el gráfico:

$$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overline{BC}, \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overline{AC} \text{ y } \overleftrightarrow{L_3} \parallel \overline{AB}$$

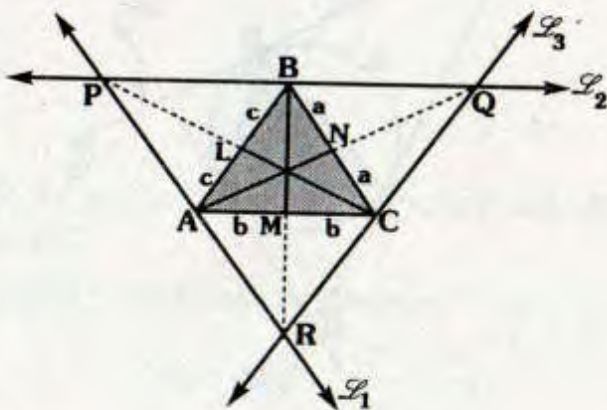
$$\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2} \text{ y } \overleftrightarrow{L_3}: \text{ Exmedianas}$$

P, Q y R: Puntos exmedianos del $\triangle ABC$.

TEOREMA

Dos exmedianas y la mediana trazada del tercer vértice son concurrentes en uno de los puntos exmedianos.

Demostración:



En el gráfico:

\vec{L}_1 , \vec{L}_2 y \vec{L}_3 son las exmedianas
 \overline{AN} , \overline{CL} y \overline{BM} son medianas.

Se puede observar ABQC, CBPA y ABCR son paralelogramos, en los cuales N, L y M son puntos medios de sus diagonales respectivamente.

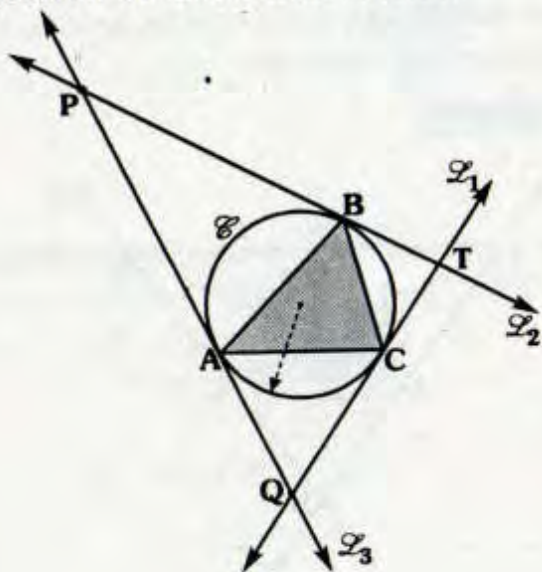
$\Rightarrow \vec{L}_1$, \vec{L}_2 y \overline{CL} concurren en P.
 \vec{L}_2 , \vec{L}_3 y \overline{AN} concurren en Q.
 \vec{L}_1 , \vec{L}_3 y \overline{BM} concurren en R.

Nota

De los gráficos el $\triangle ABC$ es el triángulo mediano del $\triangle PQR$.

PUNTO EXSIMEDIANO

Se llama exsimediana a cada una de las rectas tangentes en los vértices del triángulo de la circunferencia circunscrita. El punto exsimediano es el punto de intersección de dos exsimedianas.



En el gráfico:

\mathcal{C} : Circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.

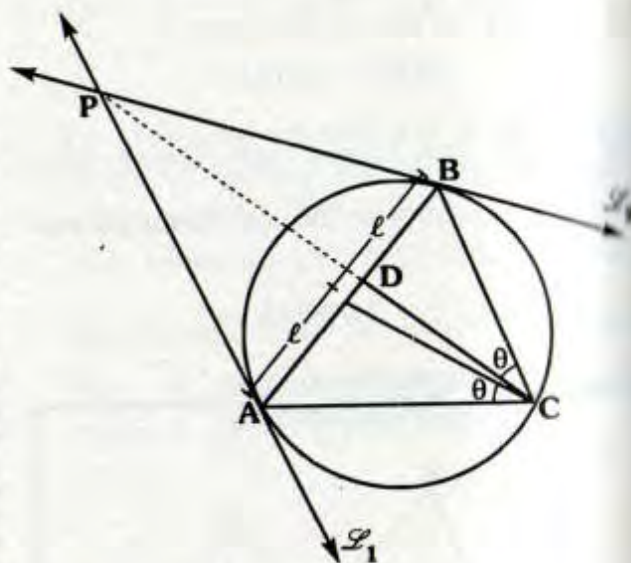
\vec{L}_1 , \vec{L}_2 y \vec{L}_3 : Rectas tangentes a \mathcal{C} en C, B y A respectivamente.

\vec{L}_1 , \vec{L}_2 y \vec{L}_3 : Exsimedianas

P, Q y T: Puntos exsimedianos

TEOREMA

Dos exsimedianas y la simediana trazada del tercer vértice son concurrentes en uno de los puntos exsimedianos.



En el gráfico:

\vec{L}_1 y \vec{L}_2 : Exsimedianas

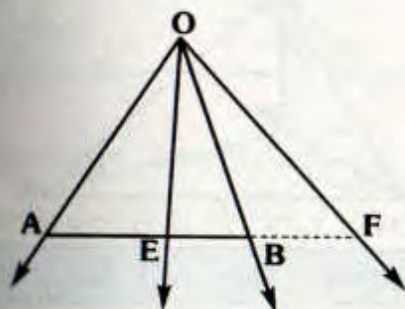
\overline{CD} : Simediana

Se cumple:

\vec{L}_1 y \vec{L}_2 y \overline{CD} son concurrentes

Demostración:

Para realizar esta demostración se requiere conocer algunos otros teoremas (conjugación armónica) que se estudiarán con más detalle en la publicación de proporcionalidad de segmentos y semejanza, la cual expondremos brevemente:

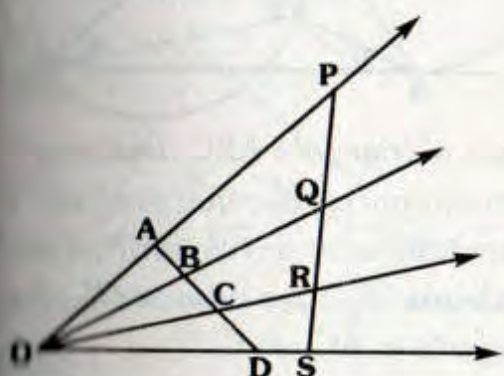


Si $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{BF}$ se dice E y F son conjugados armónicos de \overline{AB} .

\vec{OA} , \vec{OE} , \vec{OB} y \vec{OF} : Haz armónico

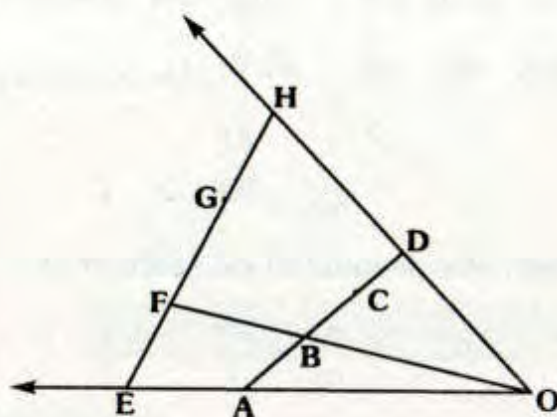
O: Centro del haz

A, E, B y F: Cuaterna armónica.



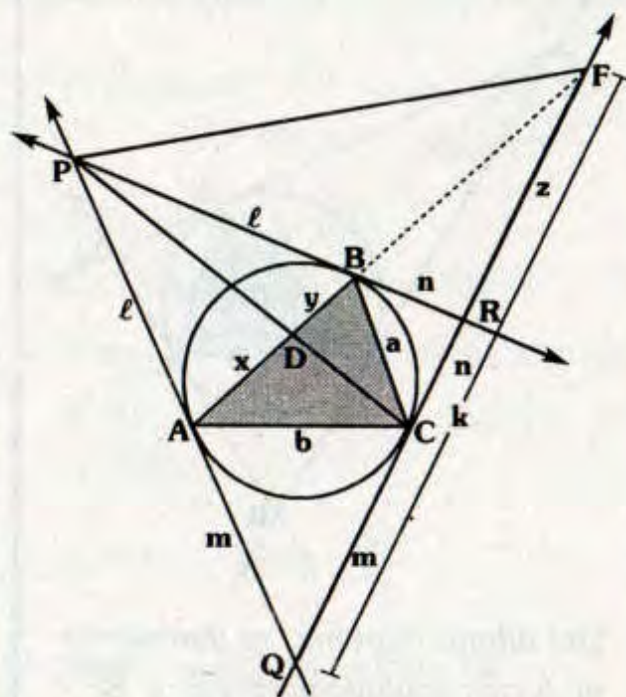
A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

P, Q, R y S también forman cuaterna armónica.



Si A, B, C y D: Cuaterna armónica
E, F, G y H: Cuaterna armónica
 \Rightarrow O, C y G: Colineales

En el gráfico tracemos la tangente en C
corta a la prolongación de \overline{AB} .



Se va a demostrar \overline{CD} es simediana del $\triangle ABC$.

$\triangle QPR$: Teorema de Menelao

$$m\ell z = \ell n k \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{k}{z}$$

$\Rightarrow Q, C, R$ y F : Cuaterna armónica

$\vec{PQ}, \vec{PC}, \vec{PR}$ y \vec{PF} : Haz armónico

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{AF}{BF}$$

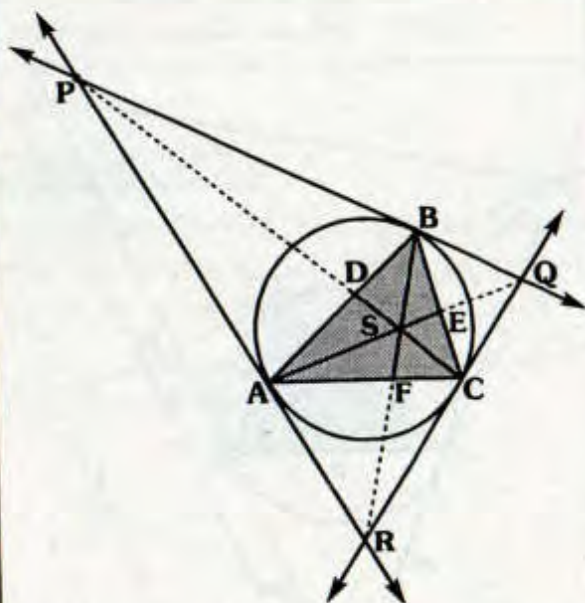
ΔABC : Por propiedad de semejanza

$$\frac{AF}{BF} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b^2}{a^2}$$

Por teorema: \overline{CD} es simediana.

Observación



Del último teorema, se demuestra en forma análoga para \overline{AE} y \overline{BF} .

$\Rightarrow \overline{CD}, \overline{AE}$ y \overline{BF} son medianas.

Del gráfico tenemos:

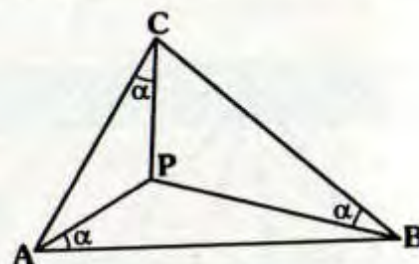
S: Punto Simediano del ΔABC .

S: Punto de Gergonne del ΔPQR .

PUNTOS DE BROCARD

Dado un triángulo ABC y un punto P , si $m\angle PAB = m\angle PBC = m\angle PCA$, entonces P es el punto de Brocard del triángulo ABC .

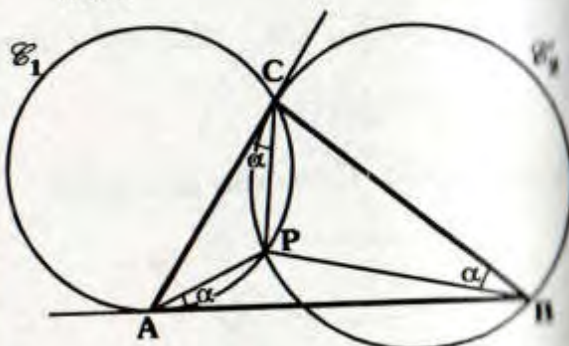
Si $m\angle PAB = m\angle PBC = m\angle PCA$



P: Punto de Brocard del ΔABC

Importante:

- Todo triángulo no equilátero tiene dos puntos de Brocard, veamos:

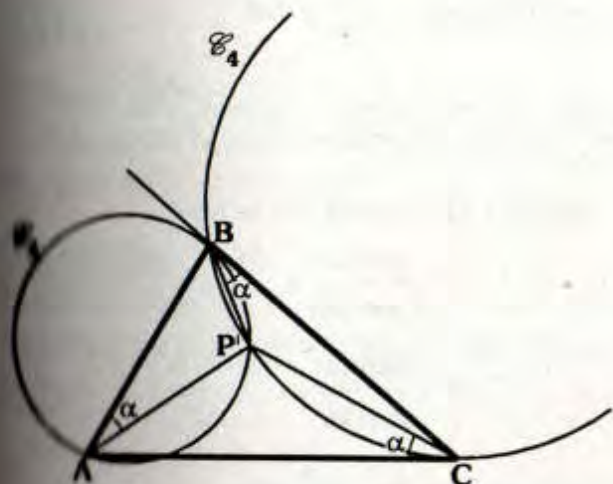


Dado el triángulo ABC , trazamos la circunferencia \mathcal{C}_1 , que pase por C y sea tangente a \overline{AB} en A , luego trazamos \mathcal{C}_2 , que pase por B y sea tangente a \overline{AC} en C .

Por ángulo inscrito y semiinscrito en \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , tenemos:

$$\Rightarrow m\angle PAB = m\angle PBC = m\angle PCA = \alpha$$

\therefore **P: Primer punto de Brocard**



Análogamente, trazamos \mathcal{C}_3 que pase por A y sea tangente a \overline{BC} en C, luego trazamos \mathcal{C}_4 que pase por C y sea tangente a \overline{AB} en B.

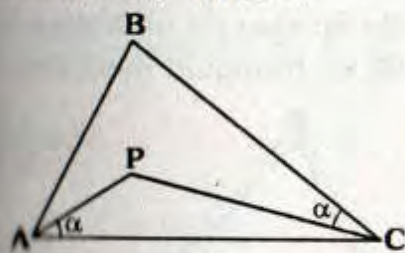
$$\Rightarrow m\angle P'AC = m\angle P'BA = m\angle P'CB = \alpha$$

P' Segundo punto de Brocard.

α Medida del ángulo de Brocard.

Cuidado:

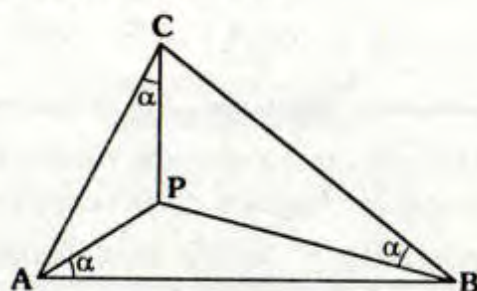
P no necesariamente es punto de Brocard del $\triangle ABC$.



TEOREMA

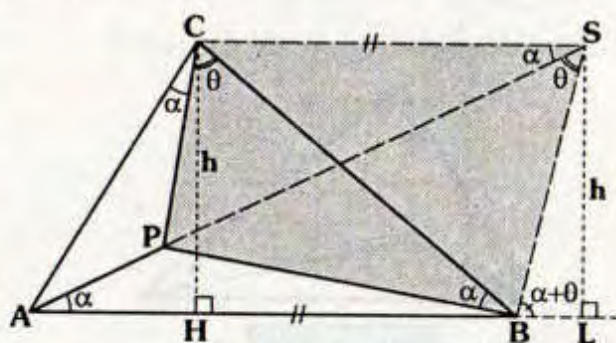
La cotangente de la medida del ángulo de Brocard es igual a la suma de las cotangentes de los ángulos interiores del triángulo.

Si P: Punto de Brocard



$$\Rightarrow \cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$$

Demostración:



• Prolongamos \overline{AP} hasta S, tal que:
 $\overline{CS} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle CSA = \alpha$

• $\triangle PCSB$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PCB = m\angle PSB = \theta$$

• Trazamos \overline{CH} y \overline{SL} perpendiculares a $\overline{AB} \Rightarrow CH = SL = h$ (CHSL: rectángulo).

$$\triangle ASL : \cot \alpha = \frac{AL}{h}$$

• Pero : $AL = AH + HB + BL$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cot \alpha &= \frac{AH + HB + BL}{h} \\ &= \frac{AH}{h} + \frac{HB}{h} + \frac{BL}{h} \\ &= \cot A + \cot B + \cot(\alpha + \theta) \end{aligned}$$

- Se observa: $\alpha + \theta = C$
 $\therefore \cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

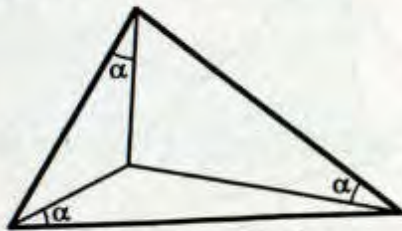
Observación

De la siguiente expresión se concluye que los ángulos de Brocard respecto a P y P' son de igual medida.

TEOREMA

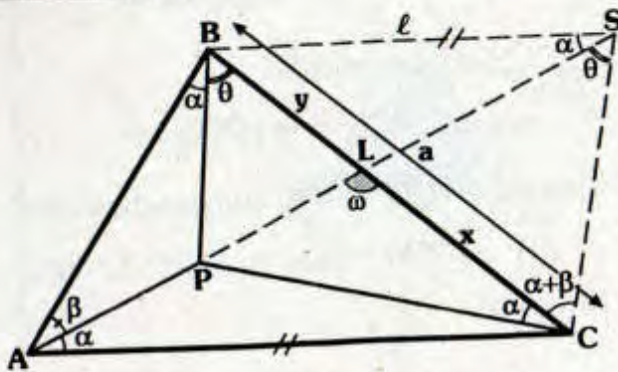
La medida del ángulo de Brocard es mayor que 0° y menor o igual que 30° .

α : medida del ángulo de Brocard



$$\Rightarrow 0^\circ < \alpha \leq 30^\circ$$

Demostración:



- Prolongamos \overline{AP} hasta S, tal que $m\angle ASB = \alpha$.

- $\triangle BLS \sim \triangle ALC$ (AAA)

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{\ell} \quad \dots (I)$$

- $\triangle ABC \sim \triangle BSC$ (AAA)

$$\Rightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{a}{b} \quad \dots (II)$$

- Se observa: $x + y = a \quad \dots (III)$

- De (I), (II) y (III): $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$

- $\triangle ALC$: Teorema de senos

$$\frac{\sin \omega}{\sin \alpha} = \frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

- Sabemos: $(a - b)^2 \geq 0$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$$

$$\Rightarrow \sin \omega \geq 2 \sin \alpha$$

- Además: $\sin \omega \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \geq \sin \omega \geq 2 \sin \alpha$$

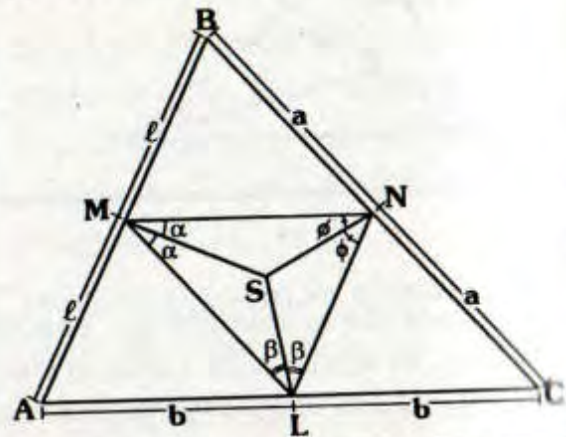
$$\Rightarrow 1 \geq 2 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0^\circ < \alpha \leq 30^\circ$$

PUNTO DE SPIEKER

El punto de Spieker de un triángulo es el incentro de su triángulo mediano.



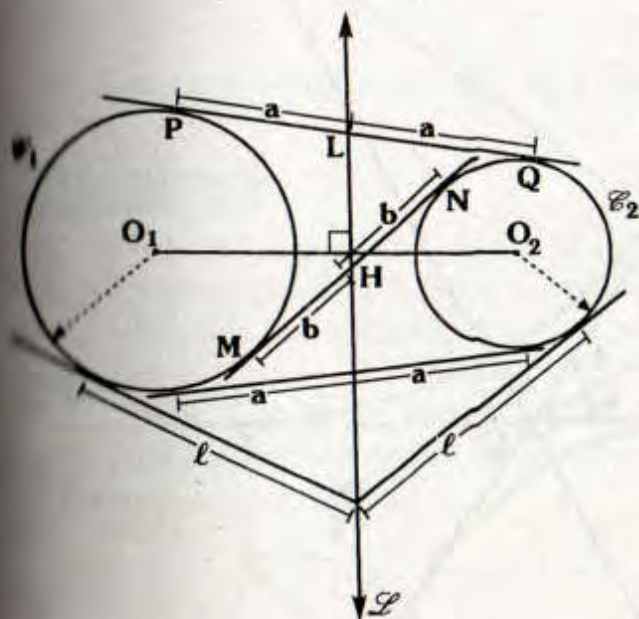
S: Punto de Spieker del $\triangle ABC$

TEOREMA

El punto de Spieker es el punto de concurrencia de los ejes radicales de las circunferencias exinscritas.

Demostración:

Antes de efectuar la demostración, mencionaremos algunas propiedades del eje radical.



Del gráfico:

• \vec{L} : Eje radical de C_1 y C_2

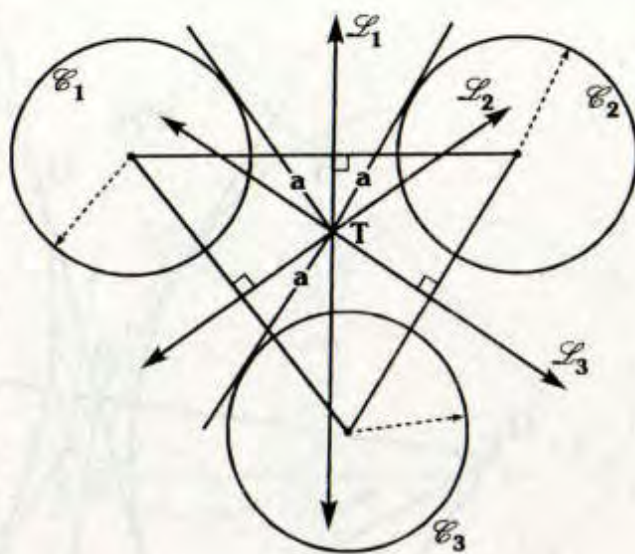
• Se cumple:

$$\vec{L} \perp \overline{O_1O_2}$$

$$PL=LQ, \quad MH=HN$$

• El eje radical es perpendicular al segmento que une los centros.

• El eje radical biseca al segmento tangente común a ambas circunferencias.



\vec{L}_1 : Eje radical de C_1 y C_2

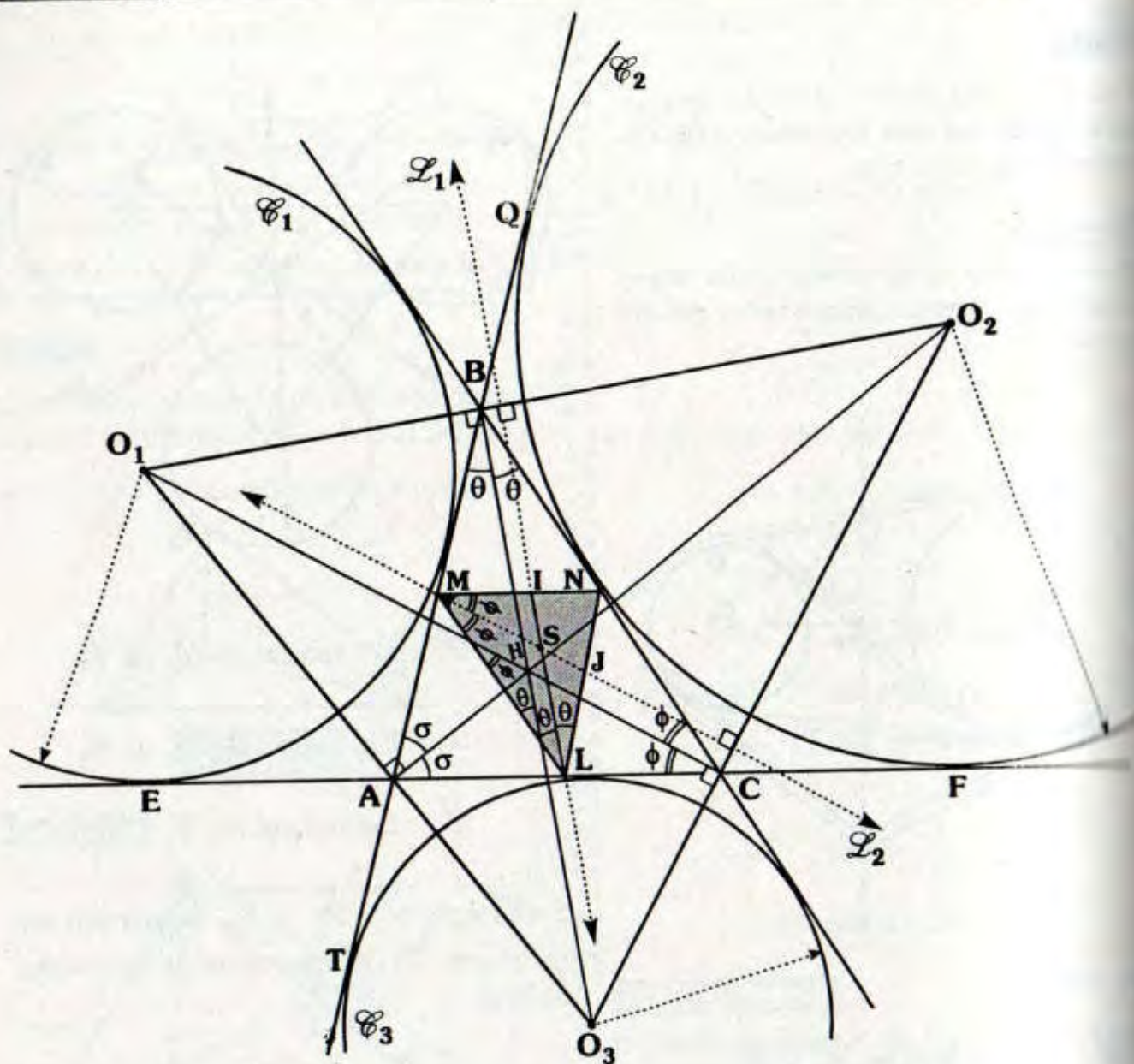
\vec{L}_2 : Eje radical de C_2 y C_3

\vec{L}_3 : Eje radical de C_3 y C_1

Se cumple: \vec{L}_1 , \vec{L}_2 y \vec{L}_3 concurren en un punto (T), al cual se le llama centro radical.

**Nota**

Se ha mencionado sobre el centro y eje radical para circunferencias exteriores, debido a que las circunferencias exinscritas lo son, ya en la publicación sobre eje radical se analizará para los demás casos.



Del gráfico:

- S : Punto de Spieker del ΔABC .
- \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 las circunferencias exinscritas del ΔABC .
- ΔMNL : Triángulo mediano del triángulo ABC
 $\Rightarrow LMNC$ y $LMBN$ son paralelogramos
- Se observa $\Delta O_1O_2O_3$ es triángulo exincentral del ΔABC .
 H : Incentro del ΔABC y H : Ortocentro del $\Delta O_1O_2O_3$ (Teorema 10.9)
- Luego: $\overline{MJ} \parallel \overline{O_1C} \Rightarrow \overline{MJ} \perp \overline{O_3O_2}$
 $\overline{LI} \parallel \overline{O_3B} \Rightarrow \overline{LI} \perp \overline{O_1O_2}$

• Por teorema de circunferencia:

$$TA = BQ \Rightarrow TM = MQ,$$

quiere decir que "M" está en el eje radical de \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 y debido a que

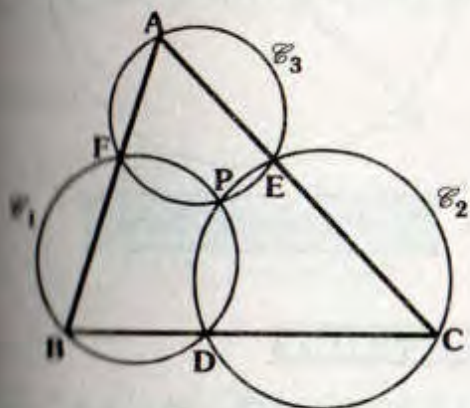
$MI \perp O_3O_2 \Rightarrow \vec{L}_2$ es eje radical de \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 .

• En forma análoga \vec{L}_1 es eje radical de \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 .

• B es centro radical de \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3

PUNTO DE MIQUEL

Si D, E y F son puntos de los lados BC, CA y AB respectivamente del triángulo ABC, entonces las circunferencias que pasan por las ternas de puntos B, D y F; C, E y D; A, F y E son concurrentes, a dicho punto de concurrencia se le conoce como punto de Miquel.



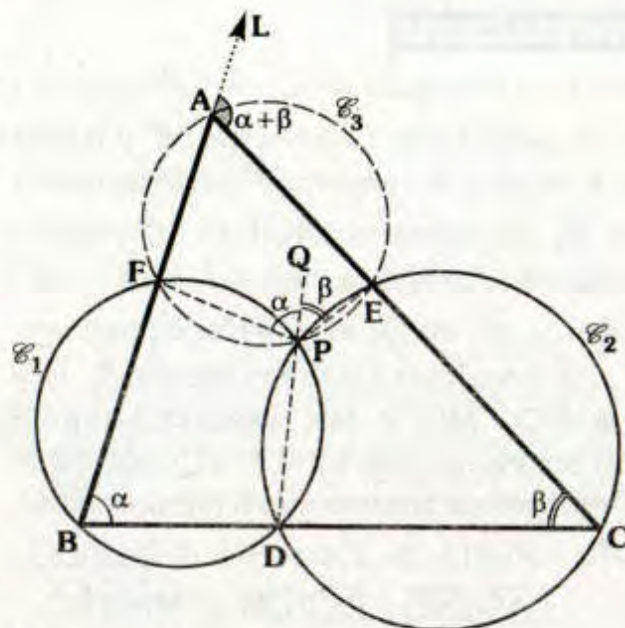
Punto de Miquel del ΔABC

Justificación:

Para demostrar la concurrencia tendríamos que demostrar que el $\Delta AFPE$ es inscriptible.

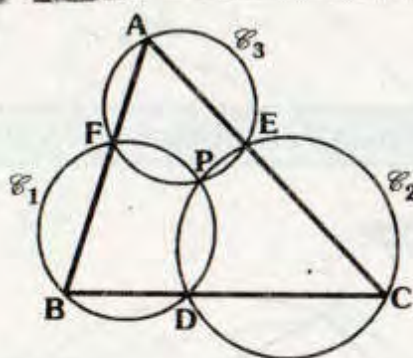
• $\Delta BFPD$: Inscrito

$$\Rightarrow m\angle FBD = m\angle FPQ = \alpha$$



- $\Delta CEPD$: Inscrito
 $\Rightarrow m\angle ECD = m\angle EPQ = \beta$
- Por ángulo exterior del ΔABC :
 $m\angle LAC = \alpha + \beta$
- $\Delta AEPF$: Inscriptible
 $\therefore \mathcal{C}_3$ pasa por P

Nota



P: Punto de Miquel del triángulo ABC respecto a la terna D, E, F.

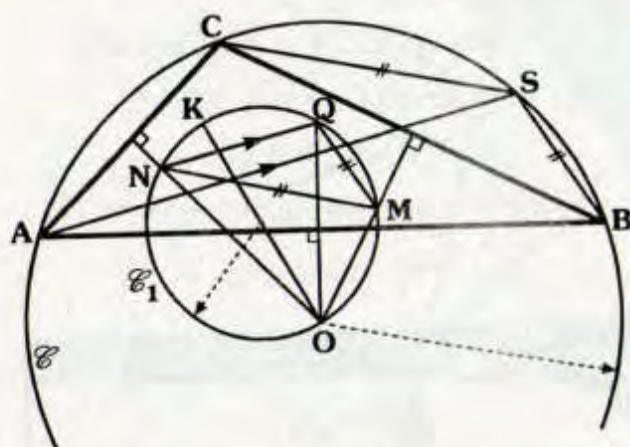
ΔDEF : Triángulo de Miquel del ABC respecto a P.

\mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 : Circunferencias de Miquel de los puntos D, E y F.

PUNTO DE STEINER

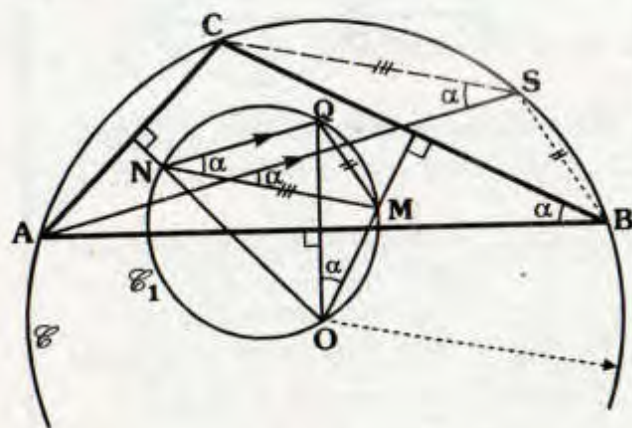
Dado un triángulo ABC ; de circuncentro O , circunferencia circunscrita \mathcal{C} y punto de Lemoine K , trazamos la circunferencia \mathcal{C}_1 de diámetro OK , los circunradios perpendiculares a los lados AB , BC y AC cortan a \mathcal{C}_1 en Q , M y N respectivamente, las paralelas trazadas desde A , B y C a \overline{NQ} , \overline{MQ} y \overline{MN} respectivamente concurren en un punto, al cual se le denomina de Steiner del triángulo ABC .

Si K : Punto de Lemoine del $\triangle ABC$,
 $\overline{AS} \parallel \overline{NQ}$, $\overline{BS} \parallel \overline{QM}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{SC}$.



\Rightarrow **S: Punto de Steiner del $\triangle ABC$**

Demostración:



• Sea $\overline{AS} \parallel \overline{NQ}$, vamos a demostrar que $\overline{SC} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{BS} \parallel \overline{QM}$.

• Los \triangle s $ACSB$ y $NQMO$ son inscritos:

$$\Rightarrow m\angle QNM = \alpha \text{ y } m\angle CSA = \alpha$$

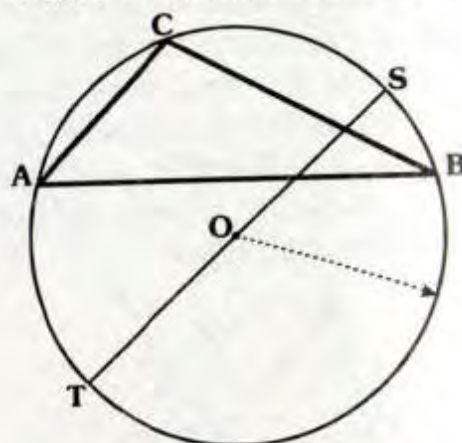
• Por ángulos entre paralelas, tenemos:

$$\therefore \overline{SC} \parallel \overline{MN} \text{ y } \overline{BS} \parallel \overline{QN}$$

PUNTO DE TARRY

Dado un triángulo, el punto de Tarry es el simétrico del punto de Steiner con respecto al circuncentro.

Si S : Punto de Steiner del $\triangle ABC$.



\Rightarrow **T: Punto de Tarry**

PUNTOS DE JERABEK

Sea un triángulo ABC , se ubica P , Q y R en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} respectivamente, tal que $AP=BQ=CR$, si desde dichos puntos trazamos paralelas a \overline{AC} , \overline{BA} y \overline{CB} ellas se intersectaran en A' , B' y C' respectivamente entonces $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes en un punto, al cual se le llama punto de Jerabek (J_1).

En el gráfico:

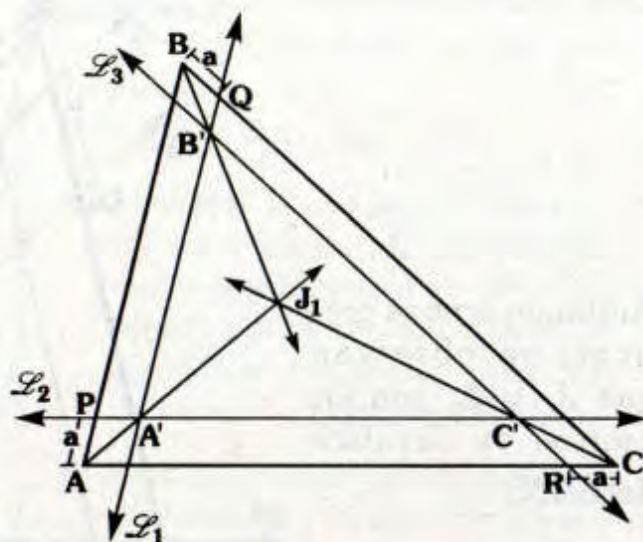
$$AP = BQ = CR$$

$$\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \overline{AB}, \quad \vec{\mathcal{L}}_2 \parallel \overline{AC}, \quad \vec{\mathcal{L}}_3 \parallel \overline{BC}$$

Se cumple:

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ son concurrentes

J_1 : Punto de Jerabek



Ahora, si ubicamos P_1 , R_1 y Q_1 en \overline{AC} , \overline{CB} y \overline{BA} tal que $AP_1 = BQ_1 = CR_1$ y con un procedimiento similar encontraremos un segundo punto de Jerabek (J_2).

En el gráfico:

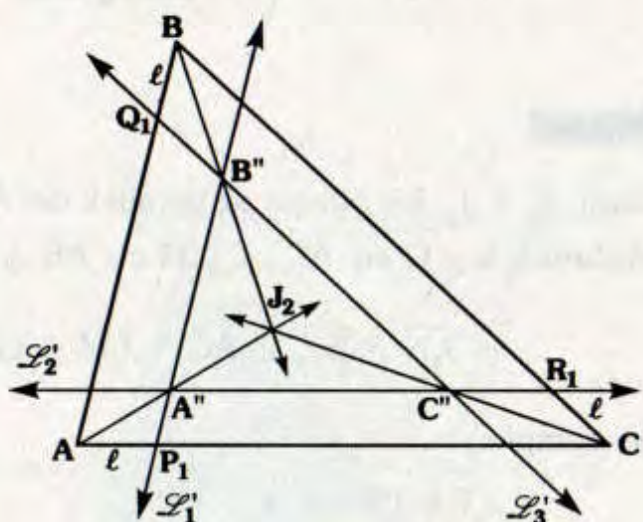
$$AP_1 = BQ_1 = CR_1$$

$$\vec{\mathcal{L}}'_1 \parallel \overline{AB}, \quad \vec{\mathcal{L}}'_2 \parallel \overline{AC}, \quad \vec{\mathcal{L}}'_3 \parallel \overline{BC}$$

también:

$\overrightarrow{AA''}$, $\overrightarrow{BB''}$ y $\overrightarrow{CC''}$ son concurrentes

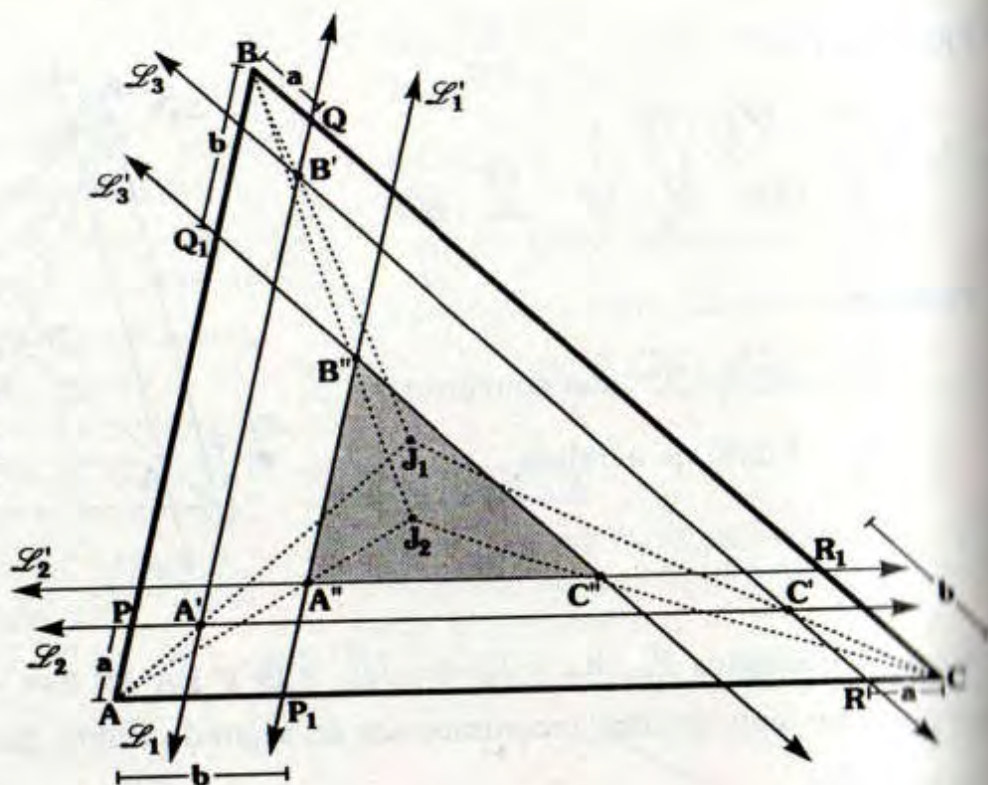
J_2 : Punto de Jerabek



Observación

- En un triángulo se pueden ubicar dos puntos de Jerabek en la parte interna.
- La demostración de la concurrencia no es difícil, en virtud que J_1 ó J_2 son centros de homotecia del triángulo determinado con las paralelas y el triángulo inicial (Ver homotecia).

Juntando ambos gráficos, se observan que J_1 y J_2 son los puntos de Jerabek del $\triangle ABC$.



TEOREMA

Sean J_1 y J_2 los puntos de Jerabek del $\triangle ABC$ (considerando los gráficos anteriores) si ubicamos L y G en \overline{AC} , E y M en \overline{AB} y F y N en \overline{BC} tal que:

$$\overline{J_1 N} \parallel \overline{E J_2} \parallel \overline{AC}, \quad \overline{J_1 M} \parallel \overline{G J_2} \parallel \overline{CB} \quad \text{y} \quad \overline{J_1 L} \parallel \overline{F J_2} \parallel \overline{BA}$$

Se cumple:

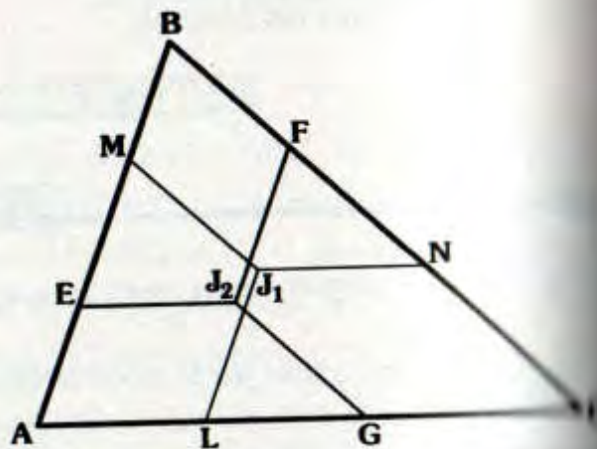
$$J_1 L = J_1 M = J_1 N \quad \text{y}$$

$$J_2 E = J_2 F = J_2 G$$

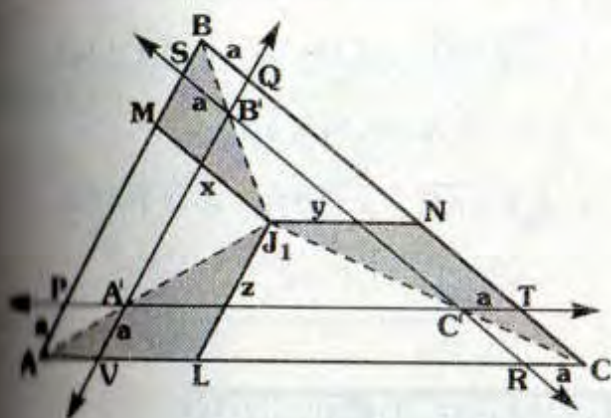
En el gráfico:

Sean: J_1 y J_2 los puntos de Jerabek

(J_1 obtenido al ubicar los puntos P , Q y R en \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} tal que $AP=BQ=CR$, del primer gráfico y J_2 del segundo gráfico).



Demostración:



Del gráfico J_1 es punto de Jerabek, se ha trazado $\overline{J_1L} \parallel \overline{AB}$, $\overline{J_1M} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{J_1N} \parallel \overline{AC}$, vamos a demostrar: $x=y=z$

$$\triangle ALJ_1 \sim \triangle AVA' \Rightarrow \frac{z}{a} = \frac{AJ_1}{AA'}$$

$$\triangle CNJ_1 \sim \triangle CTC' \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{CJ_1}{CC'}$$

$$\triangle BMJ_1 \sim \triangle BSB' \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{BJ_1}{BB'}$$

En $\triangle ABB_1$ por Teorema de Tales:

$$\frac{AJ_1}{AA'} = \frac{BJ_1}{BB'}$$

En forma análoga en el $\triangle BJC$:

$$\frac{BJ_1}{BB'} = \frac{CJ_1}{CC'}$$

Se concluye:

$$\frac{z}{a} = \frac{y}{a} = \frac{x}{a}$$

$$\therefore x=y=z$$

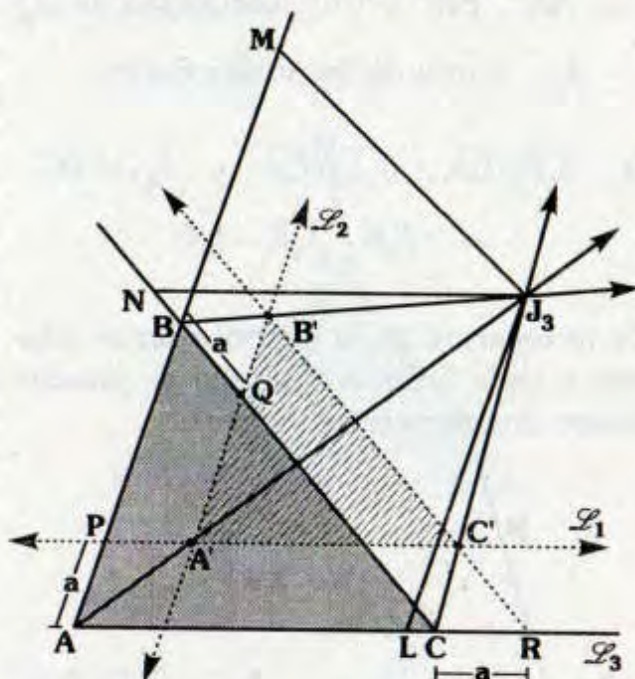
Nota

- De la misma forma se procede para J_2 :

$$J_2E = J_2F = J_2G$$

- Si alguno de los puntos ubicados sobre los lados (P, Q o R considerados al comienzo) se ubica en alguna de las prolongaciones se obtendrán dos puntos exteriores de Jerabek respecto a cada lado.
- Resulta un total de ocho puntos de Jerabek: dos interiores y seis exteriores.

Analizando el caso externo:



Del gráfico: $AP=BQ=CR$

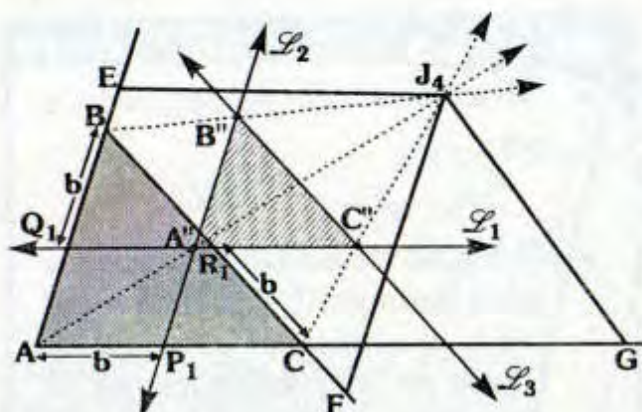
$$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overline{AC}, \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overline{AB} \text{ y } \overleftrightarrow{L_3} \parallel \overline{BC}$$

$\Rightarrow \overline{AA'}, \overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en J_3 .

J_3 : Punto de Jerabek exterior.

Si: $\overline{J_3N} \parallel \overline{J_3L} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{J_3M} \parallel \overline{CB}$

$$\Rightarrow J_3N = J_3L = J_3M$$



En el gráfico:

$$BQ_1 = AP_1 = CR_1$$

$$\vec{L}_1 \parallel \overline{AC}, \vec{L}_2 \parallel \overline{AB} \text{ y } \vec{L}_3 \parallel \overline{BC}$$

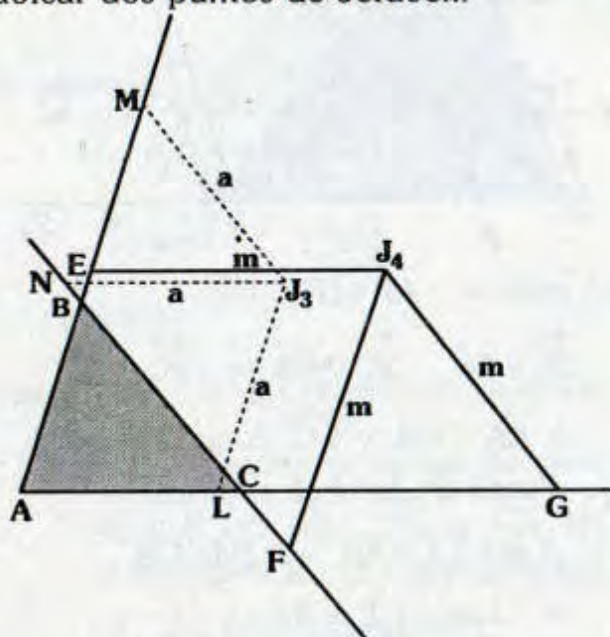
$$\Rightarrow \overline{AA''}, \overline{BB''} \text{ y } \overline{CC''} \text{ concurren en } J_4$$

J_4 : Punto de Jerabak exterior

$$\text{Si } \overline{J_4F} \parallel \overline{BA}, \overline{J_4E} \parallel \overline{CA} \text{ y } \overline{J_4G} \parallel \overline{BC}$$

$$\Rightarrow J_4E = J_4F = J_4G$$

De lo anterior, en la región exterior relativa a cada lado vemos que se pueden ubicar dos puntos de Jerabek.



J_3 y J_4 : Puntos de Jerabek

$$\overline{J_3N} \parallel \overline{AC}, \overline{J_3M} \parallel \overline{BC} \text{ y } \overline{J_3L} \parallel \overline{BA}$$

$$\Rightarrow J_3N = J_3M = J_3L$$

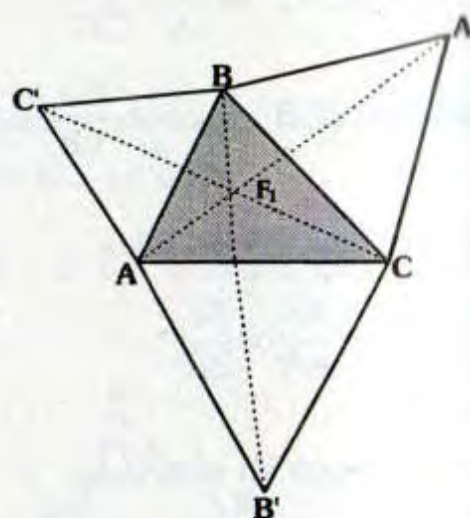
$$\overline{J_4E} \parallel \overline{AC}, \overline{J_4G} \parallel \overline{BC} \text{ y } \overline{J_4F} \parallel \overline{BA}$$

$$\Rightarrow J_4E = J_4F = J_4G$$

PUNTO DE FERMAT - TORRICELLI

Dado un triángulo ABC, si sobre los lados se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ACB', BCA' y ABC', se cumple $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes, a dicho punto se le denomina punto de Fermat además se cumple:

$$AA' = BB' = CC'$$



En el gráfico:

$\triangle ACB'$, $\triangle BCA'$ y $\triangle ABC'$ equiláteros

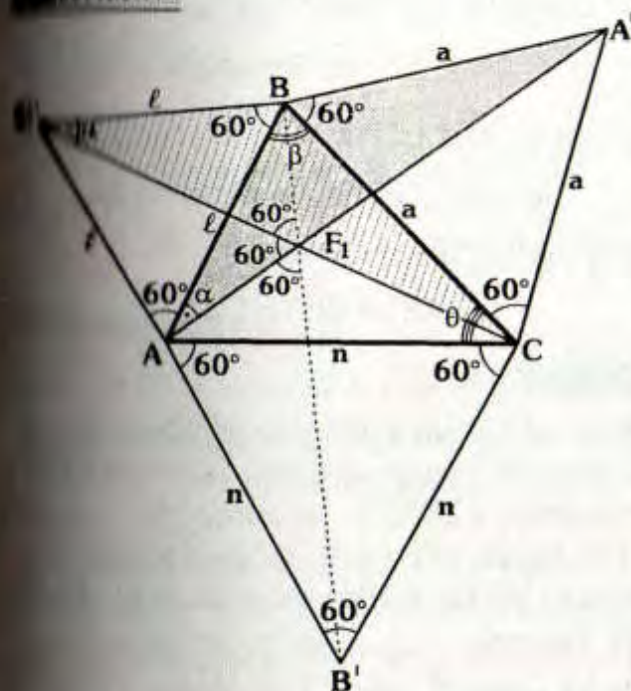
$\Rightarrow \overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes

F_1 : Punto de Fermat

Además:

$$AA' = BB' = CC'$$

Demostración:



En el gráfico se trazan inicialmente los triángulos equiláteros ABC' , BCA' y ACB' , luego al trazar $\overline{CC'}$ y $\overline{AA'}$ se cortan en F_1 vamos a demostrar B , F_1 y B' son colineales.

$\triangle B'CB \cong \triangle ABA'$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BC'C = m\angle BAA' = \alpha$
 $CC' = AA'$

$\triangle AF_1BC'$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle AF_1C' = 60^\circ$
 $\Rightarrow m\angle C'F_1B = m\angle C'AB = 60^\circ$

$\triangle AF_1CB'$ resulta ser inscriptible debido a que:
 $m\angle AB'C = m\angle AF_1C' = 60^\circ$
 $\Rightarrow m\angle AF_1B' = m\angle ACB' = 60^\circ$

Finalmente:
 $m\angle AF_1B' + m\angle AF_1C' + m\angle C'F_1B = 180^\circ$
 B', F_1 y B son colineales.

Debido a que B', F_1 y B son colineales, se tendrá entonces:

$$\triangle B'CB \cong \triangle ABA' \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow BB' = AA'$$

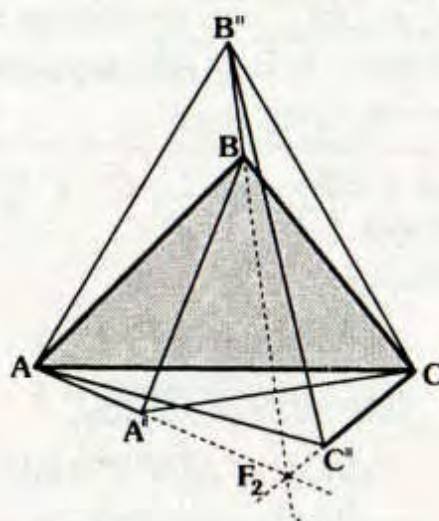
$$\therefore BB' = AA' = CC'$$

SEGUNDO PUNTO DE FERMAT

Dado un triángulo ABC , si ahora trazamos interiormente los triángulos equiláteros ABC'' , BCA'' y ACB'' , cumple $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ son concurrentes, a dicho punto de concurrencia se le llama segundo punto de Fermat.

Además se cumple:

$$AA'' = BB'' = CC''$$



En el gráfico:

$\triangle ACB''$, $\triangle BCA''$ y $\triangle ABC''$ son equiláteros

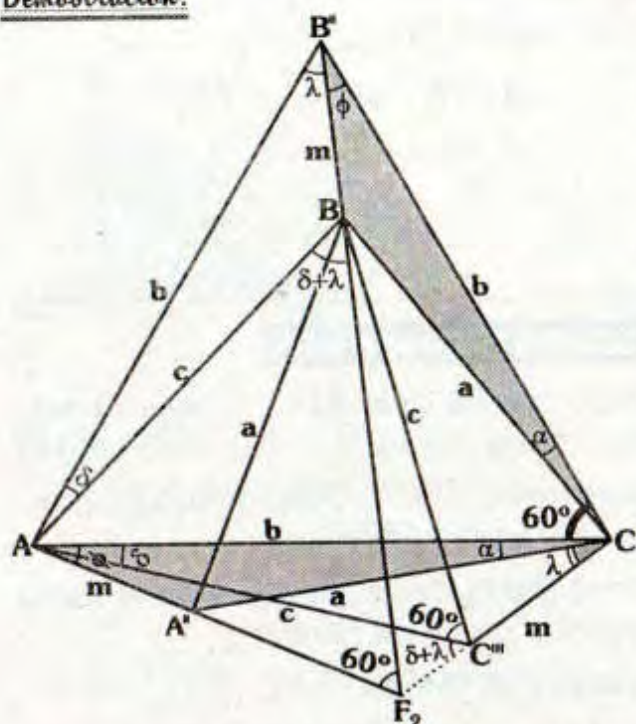
$\Rightarrow \overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ con concurrentes

F_2 : Segundo punto de Fermat

Además:

$$AA'' = BB'' = CC''$$

Demostración:



- En el gráfico los triángulos ACB'' , BCA'' y ABC'' son equiláteros se ha prolongado $\overline{B''B}$ y $\overline{AA''}$ las cuales se cortan en F_2 .

- Vamos a demostrar C, C'' y F_2 son colineales.

- Se observa:

$$m\angle ACA'' = m\angle BCB'' = \alpha$$

$$m\angle C''AC = m\angle BAB'' = \delta$$

$$\triangle ACA'' \cong \triangle CBB'' \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle CAA'' = m\angle CBB'' = \phi$$

$$AA'' = BB'' = m \quad \dots \text{ (I)}$$

$$\triangle C''AC \cong \triangle BAB'' \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle C''AC = m\angle AB''B = \lambda$$

$$CC'' = BB'' = m \quad \dots \text{ (II)}$$

- En $\triangle AF_2B''$: $60^\circ + \phi = \phi + m\angle AF_2B''$
 $\Rightarrow m\angle AF_2B'' = 60^\circ$

- Luego el $\triangle F_2ABC''$ es inscriptible:

$$\Rightarrow m\angle AC''F_2 = \delta + \lambda$$

- En el $\triangle ACC''$: $\delta + \lambda = m\angle AC''F_2$

$$\Rightarrow C, C'' \text{ y } F_2 \text{ son colineales}$$

- De (I) y (II) se deduce:

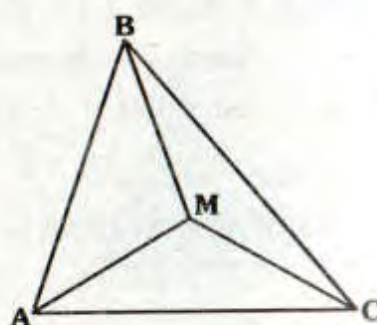
$$AA'' = BB'' = CC''$$

TEOREMA

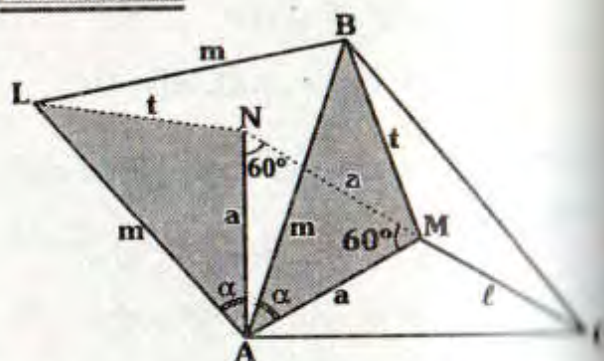
Si se ubica un punto en el plano de un triángulo cuyos ángulos interiores son menores 120° , si la suma de distancias hacia los vértices es mínima entonces dicho punto es el primer punto de Fermat.

En el gráfico:

Si $MA + MB + MC$ es mínimo $\Rightarrow M$ es el primer punto de Fermat.



Demostración:



- Lo que vamos a buscar es $MA + MB + MC$, para cualquier punto del plano, considerando que el $\triangle ALM$ es fijo.

- Se trazan los triángulos equiláteros:

$$AMN \text{ y } ABL \Rightarrow m\angle LAN = m\angle BAM = \alpha$$

- Luego:

$$\begin{aligned} \triangle ANL &\cong \triangle MAB \quad (\text{L.A.L}) \\ \Rightarrow NL &= MB \end{aligned}$$

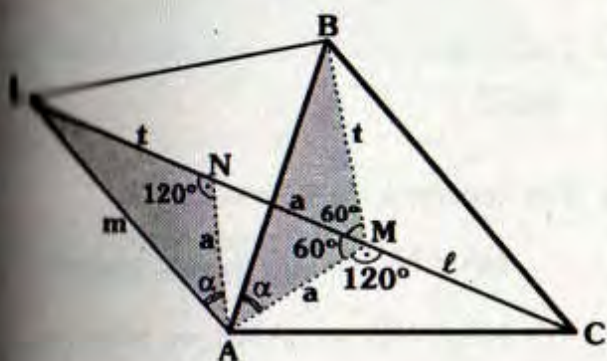
- Se observa:

$$MA + MB + MC = CM + MN + NL$$

Pero debido a que el triángulo ABC es fijo \Rightarrow L también es fijo.

- Lo que se busca es $MA + MB + MC$ mínimo, que será lo mismo que $CM + MN + NL$ mínimo, lo cual se dará cuando C, M, N y L sean colineales y más aún como C y L son fijos \Rightarrow M y N en \overleftrightarrow{CL} .

- Así tenemos:



- De lo anterior se deduce M es el primer punto de Fermat, debido a que se encuentra \overleftrightarrow{CL} y $m\angle AML = 60^\circ$.

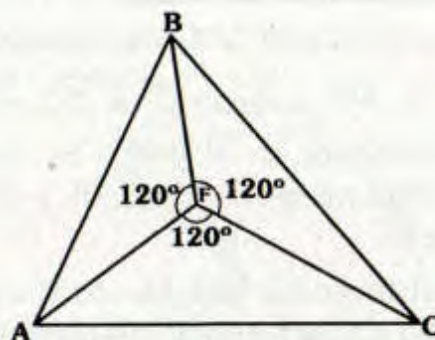
- También se nota:

$$m\angle AMC = m\angle AMB = m\angle BMC = 120^\circ$$



Nota

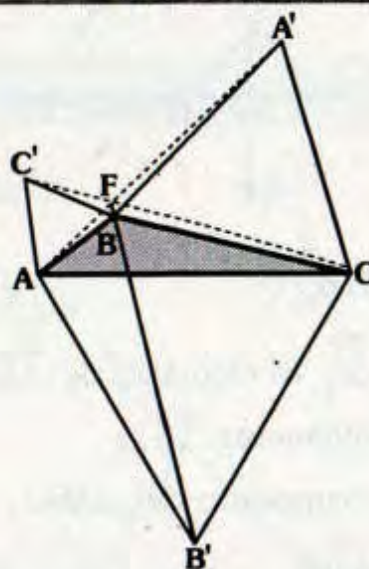
- Sea F el primer punto de Fermat del $\triangle ABC$ cuyas medidas de sus ángulos interiores menores a 120° . Se cumplirá:
 $m\angle AFB = m\angle BFC = m\angle CFA = 120^\circ$



F es punto de Fermat

- Si el triángulo ABC tiene un ángulo interior cuya medida es mayor a 120° , el punto de Fermat (F) es externo, seguirá cumpliendo:

$$AA' = BB' = CC'$$



En el gráfico: $m\angle ABC > 120^\circ$

$\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$ y $\triangle ACB'$ son equiláteros.

Se cumple: $\overline{B'B}$, $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en F.

Además: $AA' = BB' = CC'$

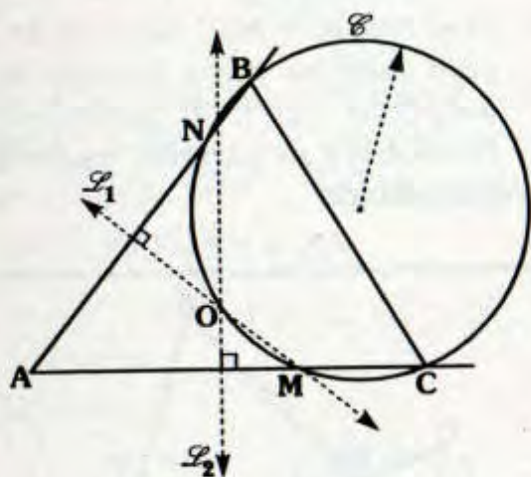
14. CIRCUNFERENCIAS NOTABLES

En esta sección estudiaremos aquellas circunferencias que pasan por puntos determinados por alguna característica respecto a un triángulo. A dichas circunferencias llamaremos circunferencias notables.

CIRCUNFERENCIA DE MANNHEIM

Dado un triángulo ABC , las mediatrices de \overline{AB} y \overline{AC} intersectan a \overline{AC} y \overline{AB} respectivamente en M y N . Se cumple que el circuncentro, M , C , B y N son concíclicos.

La circunferencia que las contiene se denomina circunferencia de Mannheim.



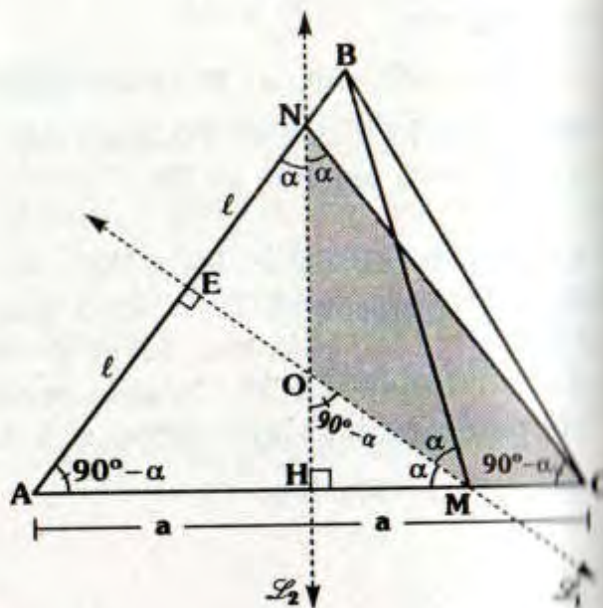
En el gráfico:

- $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ es mediatriz de \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente.
- O es circuncentro del $\triangle ABC$.
- Se cumple:

O, M, C, B y N : Concíclicos

\mathcal{C} : Circunferencia de Mannheim

Demostración:

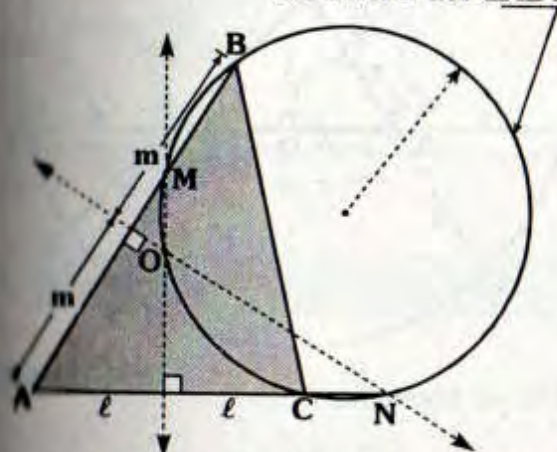


- En el gráfico O es circuncentro del $\triangle ABC$.
- Por teorema de la mediatriz.
 $NA = NC \Rightarrow \triangle ANC$ es isósceles
 $MA = MB \Rightarrow \triangle AMB$ es isósceles
- Debido a $m\angle HOM = m\angle MCN = 90^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow \triangle NOMC$: Inscriptible
 $m\angle OMA = m\angle ONA = \alpha$
 $\Rightarrow \triangle MONB$: Inscriptible
 $\therefore O, M, C, B$ y N son concíclicos

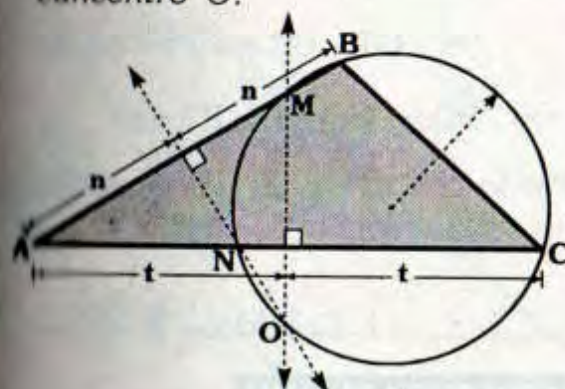
Observación

- Para las siguientes posibilidades de la circunferencia, la demostración es análoga (O es circunferencia del $\triangle ABC$).

Circunferencia de Mannheim del $\triangle ABC$



- Si el $\triangle ABC$ es obtusángulo de circuncentro O:

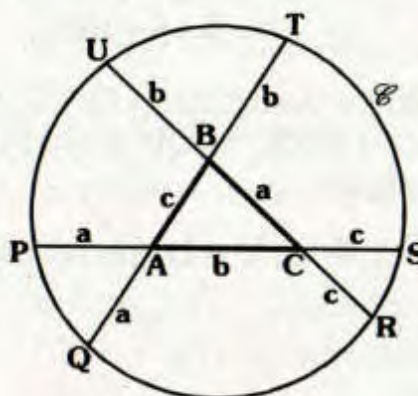


Circunferencia de Mannheim del $\triangle ABC$



CIRCUNFERENCIA DE CONWAY

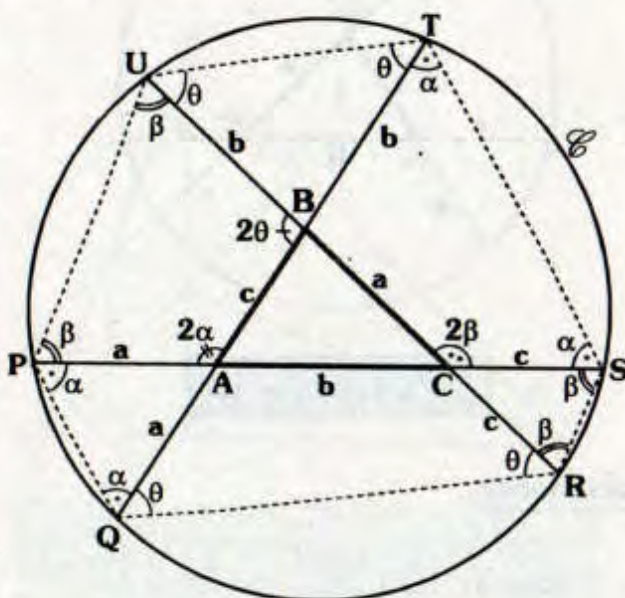
Si las longitudes de las prolongaciones de los lados de un triángulo son iguales a la longitud del lado opuesto al vértice desde el cual se ha trazado las prolongaciones, entonces los extremos de las prolongaciones se encuentran en una misma circunferencia, llamada circunferencia de Conway.



Si: $AP = AQ = BC = a$
 $BT = BU = AC = b$ y
 $CS = CR = AB = c$

\Rightarrow **Circunferencia de Conway**

Demostración:



- Los triángulos APQ y ATS son isósceles.

$$\Rightarrow m\angle APQ = m\angle AQP$$

$$m\angle ATB = m\angle ABT = \alpha$$

- Análogamente:

$$m\angle UPC = m\angle PUC = m\angle CSR = m\angle CRS = \beta$$

$$m\angle BUT = m\angle BTU = m\angle BQR = m\angle BRQ = \theta$$

- $\triangle ABC$: $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360^\circ$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

- Por ello los cuadriláteros QPUT, PUTS, UTSR, TSRQ, SRQP y RQPU son inscriptibles.

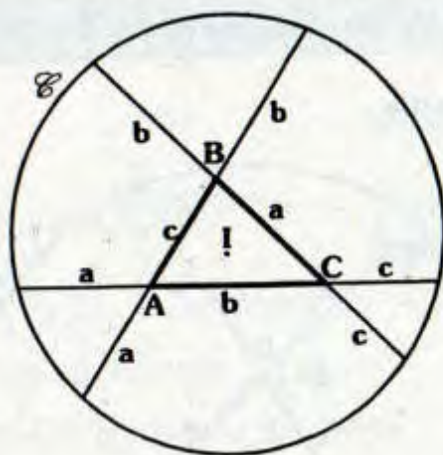
\therefore P, Q, R, S, T y U son concíclicos

TEOREMA

El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia de Conway.

Si: I : Incentro de ABC y

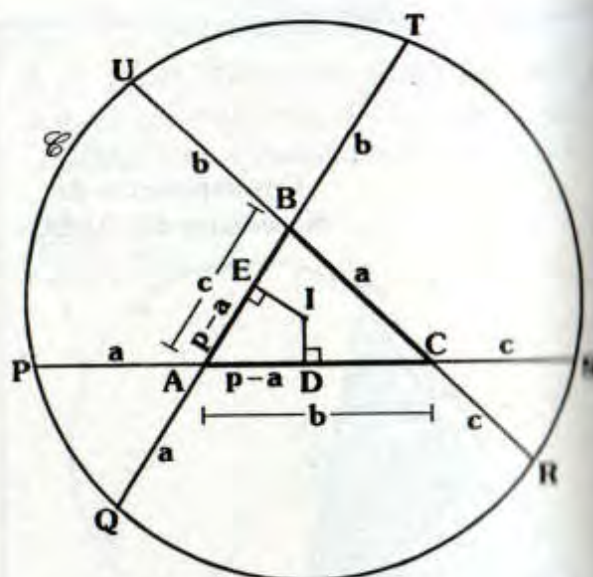
\mathcal{C} : Circunferencia de Conway.



\Rightarrow I: Centro de \mathcal{C}

Demostración:

- Trazamos $\overline{ID} \perp \overline{AC}$ e $\overline{IE} \perp \overline{AB}$



- Por el teorema 8.1:

$$AD = AE = p - a$$

- Se observa que:

$$PS = QT = UR = a + b + c = 2p$$

$$\Rightarrow PD = DS = QE = ET = p$$

- Por lo cual \overleftrightarrow{DI} y \overleftrightarrow{EI} son mediatrices de \overline{PS} y \overline{QT} .

\therefore I : Centro de \mathcal{C}

CIRCUNFERENCIA DE ADAMS

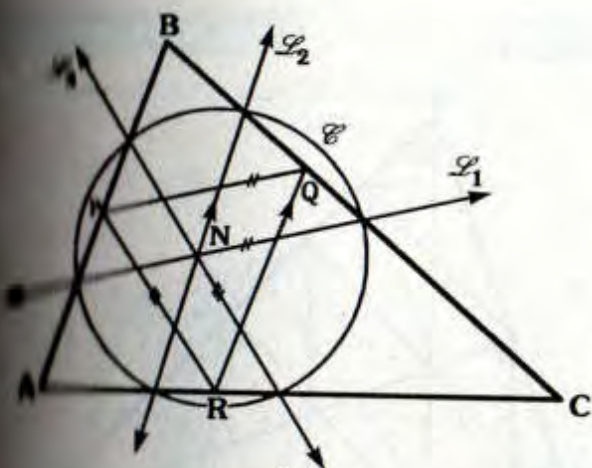
Si por el punto de Georgonne de un triángulo se trazan paralelas a los lados del triángulo de contacto interior, estas paralelas cortan los lados del triángulo en seis puntos. Estos puntos están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de Adams.

Si: N : Punto de Georgonne

$\triangle PQR$: Triángulo de contacto interior

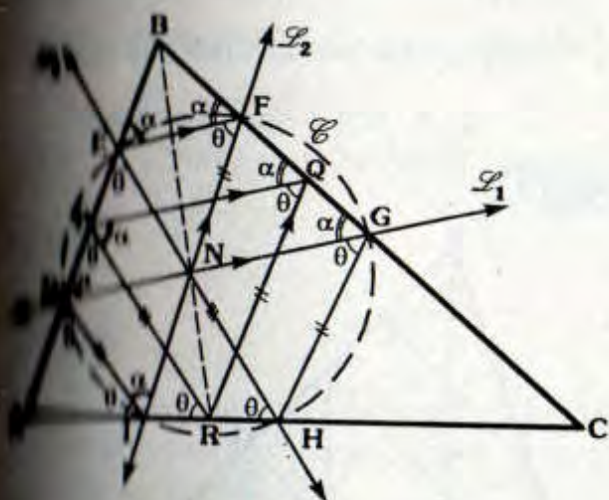
$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}}_1 \parallel \overline{PQ}, \quad \overleftrightarrow{\mathcal{L}}_2 \parallel \overline{QR} \quad \text{y}$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}}_2 \parallel \overline{PR}$$



Circunferencia de Adams

Explicación:



1. ΔPQR : Δ de contacto interior $\Rightarrow PB=BQ$

$$AP=AR \text{ y } CR=CQ \quad \dots(I)$$

2. ΔPQR : Teorema de Tales

$$\frac{PB}{PE} = \frac{BR}{NR} \quad \dots(II)$$

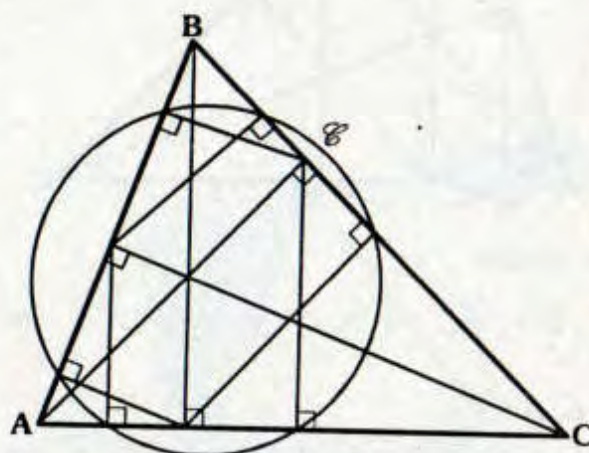
3. ΔPQR : Teorema de Tales

$$\frac{PQ}{FQ} = \frac{BR}{NR} \quad \dots(III)$$

- De (I), (II) y (III) : $PE=FQ$
- $DEFG$: Trapecio isósceles
 $\Rightarrow G, F, E$ y D : Concíclicos
- Se sabe: $m\angle ARP = m\angle PQR = \theta$
- Análogamente:
 $EHID$: Trapecio isósceles
 $\Rightarrow F, E, D$ y I : Concíclicos
 E, D, I y H : Concíclicos
- $IFGH$: Trapecio isósceles
 $\Rightarrow m\angle FGH = \alpha + \theta$
 $\Rightarrow D, I, H$ y G : Concíclicos
 I, H, G y F : Concíclicos
 H, G, F y E : Concíclicos
 $\therefore G, F, E, D, I, H$: Concíclicos

CIRCUNFERENCIA DE TAYLOR

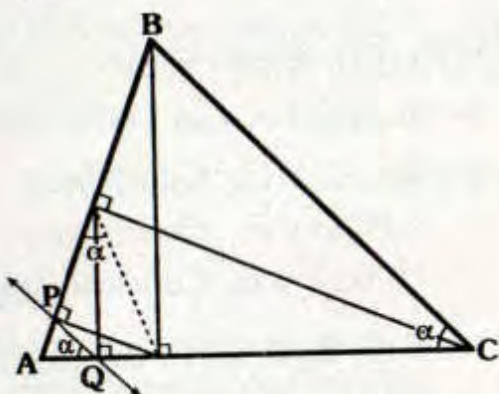
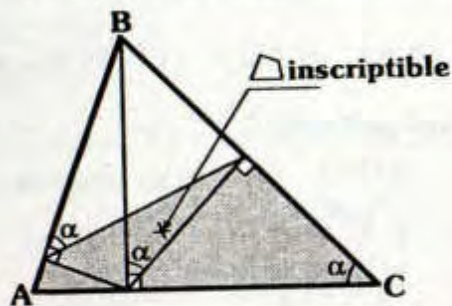
Las proyecciones de los pies de las alturas de un triángulo sobre los lados se ubican en una misma circunferencia, conocida como la circunferencia de Taylor.



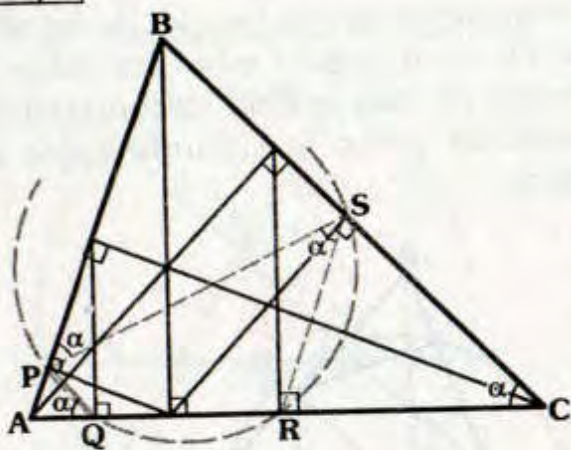
\mathcal{C} : Circunferencia de Taylor del ΔABC .

Demostración:

- Para la demostración tener en cuenta, las siguientes propiedades.

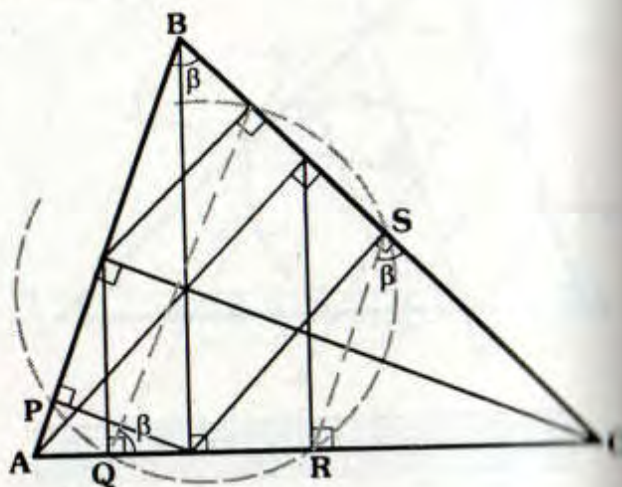


Paso 1



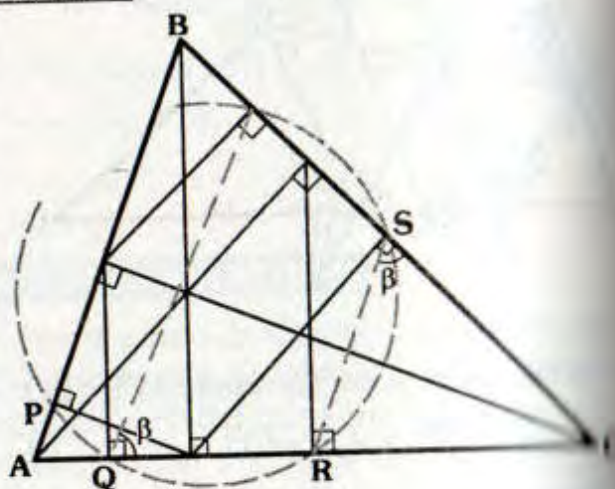
- Como:
 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \Rightarrow m\angle PQA = m\angle BCA = \alpha$
- $\triangle APSC$:
 Inscriptible $\Rightarrow m\angle BPS = m\angle BCA = \alpha$
- Se sabe : $\overline{SR} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle PSR = \alpha$
 $\therefore P, Q, R$ y S son concíclicos

Paso 2



- $\overline{RS} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle ABC = m\angle RSC = \beta$
- $\triangle ABTQ$:
 Inscriptible $\Rightarrow m\angle TQC = \beta$
 $\therefore Q, R, S$ y T son concíclicos

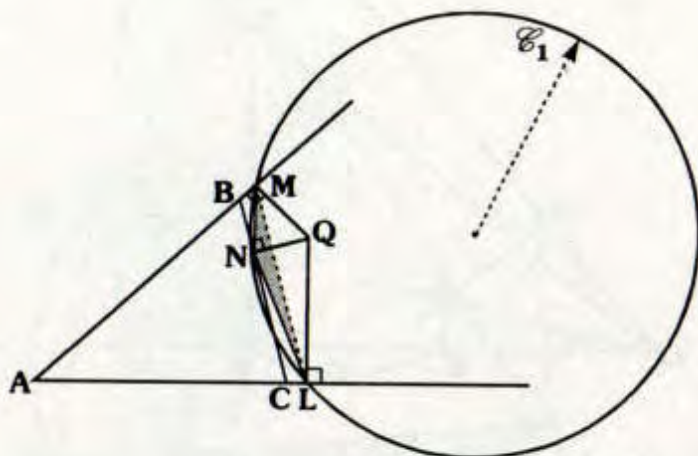
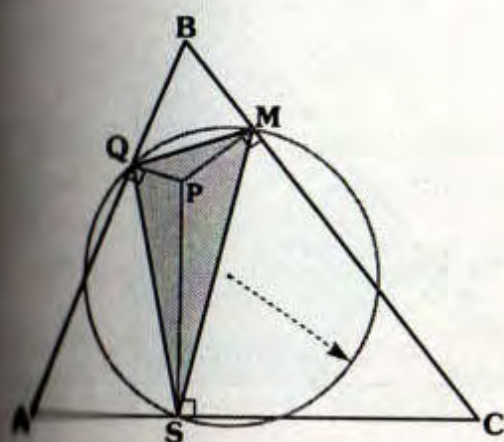
Paso 3



- Análogamente:
 R, S, T y U son concíclicos,
 S, T, U y P son concíclicos,
 T, U, P y Q son concíclicos,
 U, P, Q y R son concíclicos.
- Por teorema de configuración:
 $\therefore P, Q, R, S, T$ y U son concíclicos

CIRCUNFERENCIA PEDAL

En la circunferencia circunscrita al triángulo pedal.



En el gráfico:

ΔQMS : Triángulo pedal del ΔABC , respecto de P.

ΔMNL : Triángulo pedal del ΔABC respecto de Q.

\odot : Circunferencia Pedal respecto de P.

\odot_1 : Circunferencia pedal respecto de Q.

La circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo pedal (circunferencia pedal) interseca a los lados del triángulo dado en otros tres puntos los cuales son vértices de otro triángulo pedal.

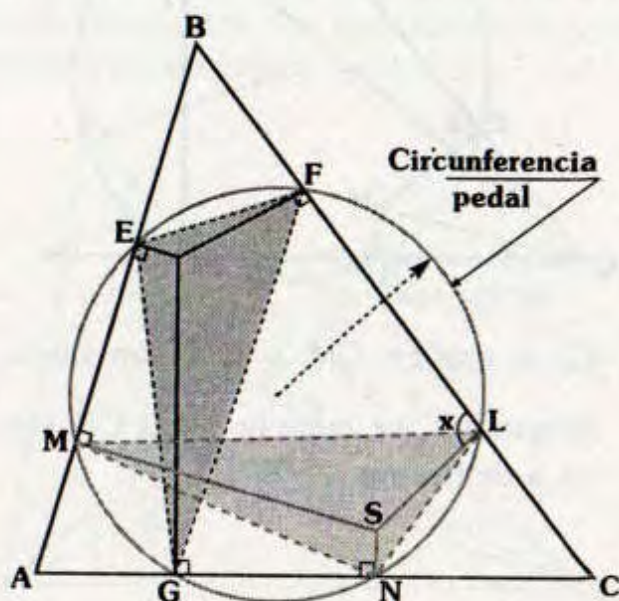
En el gráfico:

ΔEFG : Triángulo pedal del ΔABC respecto de P.

Si trazamos las perpendiculares en M y N a \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente, se encuentra S, se cumple:

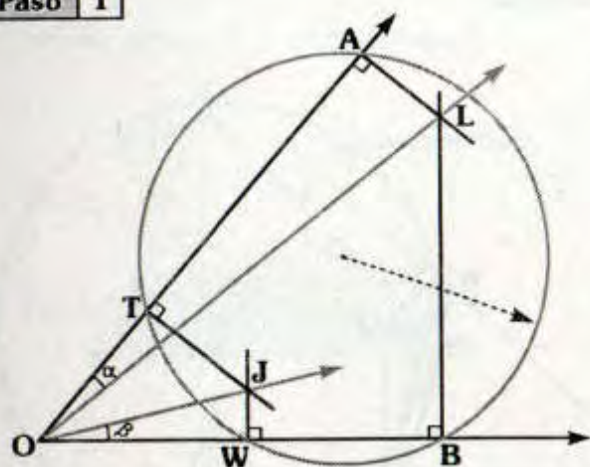
$$m\angle SLB = 90^\circ$$

ΔMNL : Triángulo Pedal del ΔABC .

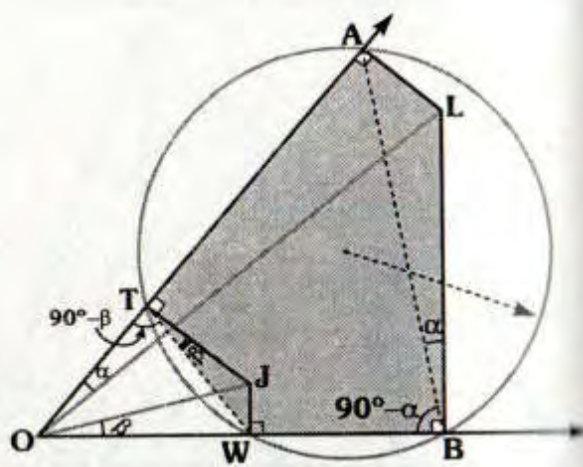


Demostración:

Paso 1

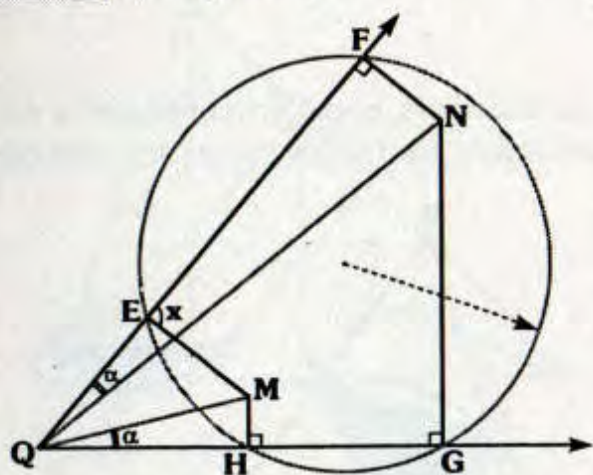


- En el gráfico se cumple: $\alpha = \beta$
- Es decir:
 $\leftrightarrow OL$ y $\leftrightarrow OJ$ son rayos isogonales del $\angle AOB$.

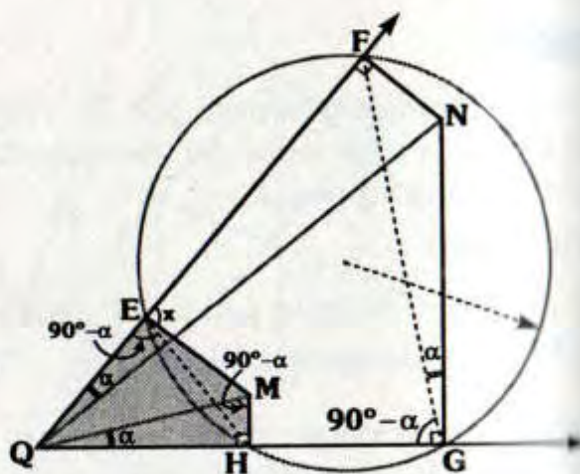


- $\triangle OTJW$ y $\triangle OALB$: Inscriptibles
 $\Rightarrow m\angle WTJ = \beta$ y $m\angle LBA = \alpha$
- $\triangle WTAB$: Inscrito
 $\Rightarrow m\angle OTW = m\angle OBA$
 $90^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha$
 $\therefore \beta = \alpha$

Paso 2 (recíproco)



- En el gráfico $\leftrightarrow OM$ y $\leftrightarrow ON$ son rayos isogonales, se cumple $\overline{ME} \perp \overline{QF}$ (se va a demostrar $x = 90^\circ$).



- $\triangle QFNG$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle FGN = \alpha$
- $\triangle EFGH$: Inscrito $\Rightarrow m\angle HEG = 90^\circ - \alpha$
- Debido a que:
 $m\angle QEH = m\angle QMH = 90^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow \triangle QEMH$: Inscriptible
 $\therefore m\angle MEF = 90^\circ$

TEOREMA 3

• Por el primer paso:

$$m\angle SAC = m\angle PAE = \alpha$$

$$m\angle EBP = m\angle SBC = \theta$$

• Por teorema de los puntos conjugados isogonales (P y S en el gráfico) se tiene:

$$m\angle SCN = m\angle PCF = \theta$$

• Por el segundo paso:

Para el ángulo ACB, se tiene:

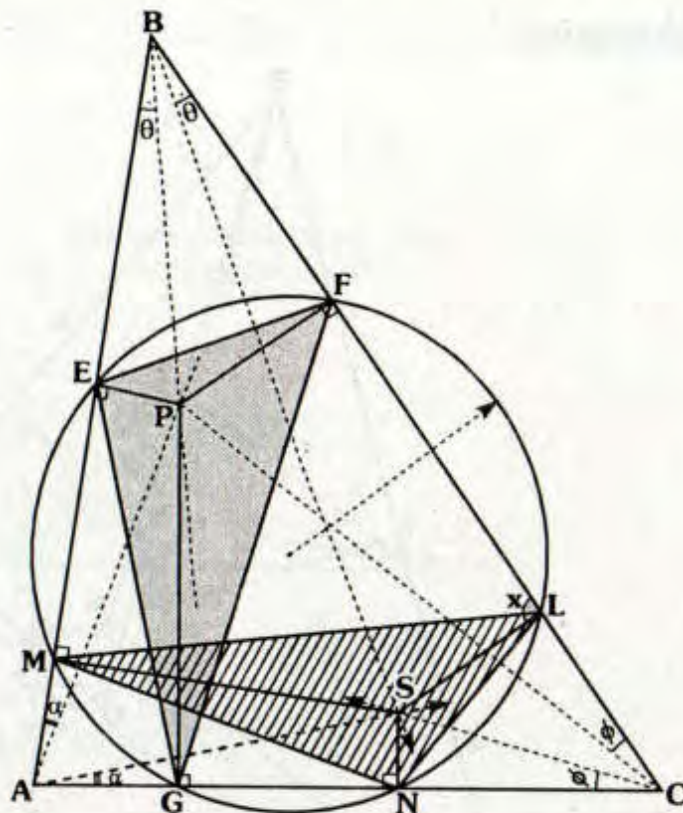
$$\overline{BN} \perp \overline{AC}, \overline{PG} \perp \overline{AC}, \overline{PF} \perp \overline{BC} \text{ y}$$

$$m\angle SCN = m\angle PCF = \theta$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ$$

• Con lo cual se concluye que

si $\triangle EFG$ es triángulo pedal entonces el $\triangle MNL$ también lo será:



CIRCUNFERENCIA DE LOS CINCO PUNTOS O DE LOS MOMENTOS IGUALES

TEOREMA

Si los lados de un triángulo dado son las bases de los triángulos isósceles trazados interiormente, cuyas áreas de las tres regiones son iguales a la tercera parte del área de la región inicial, entonces los tres vértices de dichos triángulos isósceles, el circuncentro y baricentro del triángulo inicial son concíclicos. La circunferencia que contiene a estos puntos se denomina circunferencia de los cinco puntos.

En el gráfico:

O y G: Circuncentro y baricentro del $\triangle ABC$ respectivamente.

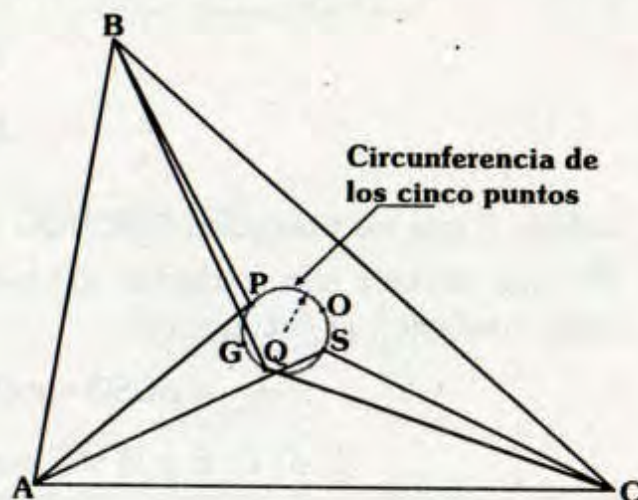
$\triangle ABS$, $\triangle BQS$ y $\triangle ASC$:

Isósceles de bases \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente.

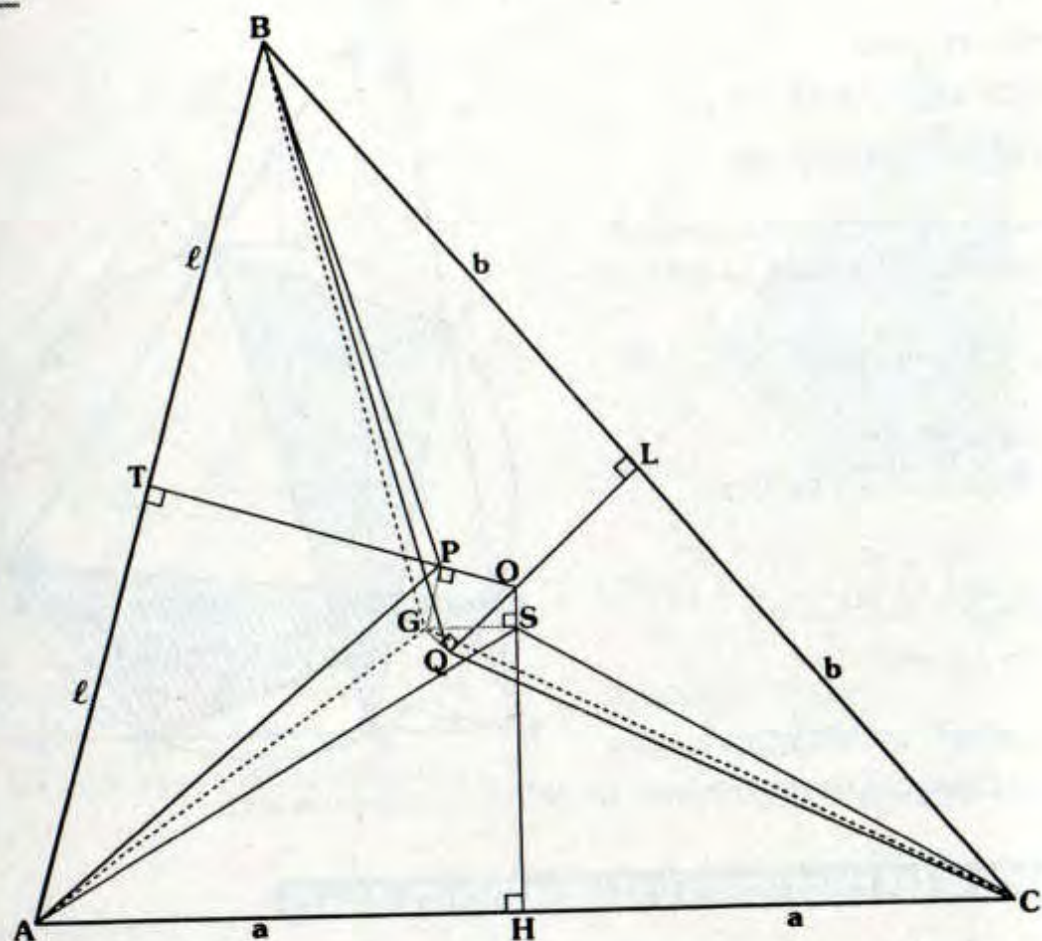
$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ASC} = S_{\triangle BQC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3}$$

Se cumple:

O, G, P, Q y S son concíclicos



Demostración:



• Por teorema: Si G es baricentro $\Rightarrow S_{\triangle AGC} = S_{\triangle AGB} = S_{\triangle CGB} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3}$

• Luego por condición inicial: $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ASC} = S_{\triangle BQC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3}$

• Acomodando las expresiones: $S_{\triangle AGC} = S_{\triangle ASC} \Rightarrow \overline{GS} \parallel \overline{AC}$

$$S_{\triangle AGC} = S_{\triangle APB} \Rightarrow \overline{GP} \parallel \overline{AB}$$

$$S_{\triangle CGB} = S_{\triangle BQC} \Rightarrow \overline{GQ} \parallel \overline{BC}$$

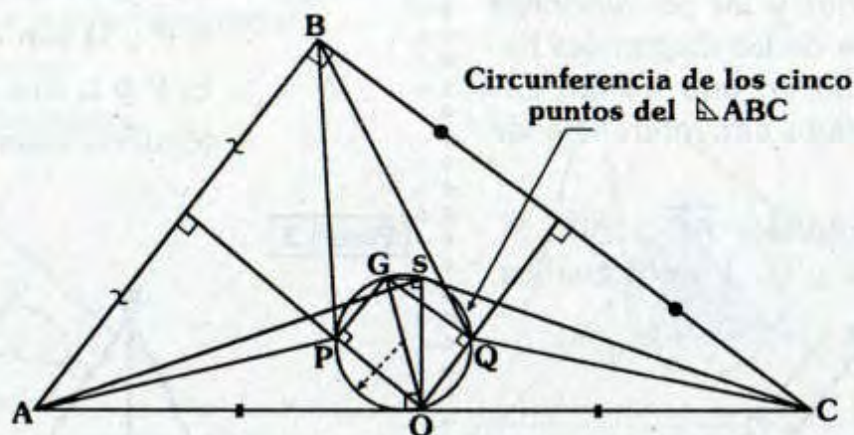
• Debido a que los triángulos ABP, BQC y ASC son isósceles, las alturas \overline{SH} , \overline{QL} y \overline{PT} que también son medianas son parte de las mediatrices de \overline{AC} , \overline{BC} y \overline{AB} , luego contienen al circuncentro.

$$\Rightarrow m\angle GSO = m\angle GPO = m\angle GQO = 90^\circ$$

\therefore G, P, O, S y Q son concíclicos de diámetro \overline{OG} .

Observación

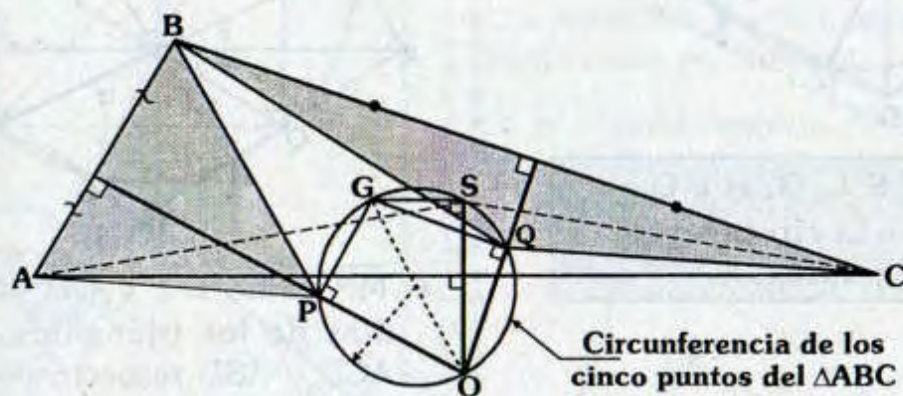
- Si el triángulo ABC es rectángulo (recto en B).



Si : O y G son circuncentro y baricentro del $\triangle ABC$.

$$S_{\triangle APB} = S_{\triangle ASC} = S_{\triangle BQC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3}$$

- Si el triángulo es obtusángulo:



Sea:

$\triangle ABC$: Obtusángulo

O y G: Circuncentro y baricentro de $\triangle ABC$.

$\triangle APB$, $\triangle BQC$ y $\triangle ASC$:

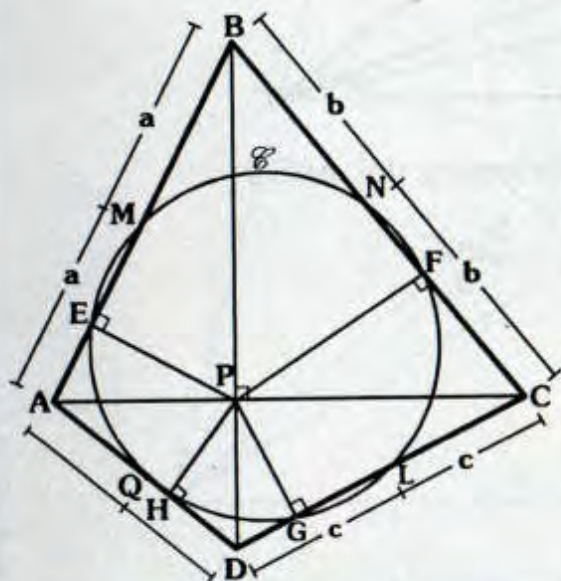
Isósceles de bases \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente y:

$$S_{\triangle APB} = S_{\triangle BQC} = S_{\triangle ASC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3}$$

CIRCUNFERENCIA DE LOS OCHO PUNTOS

Dado un cuadrilátero inscriptible de diagonales perpendiculares, los puntos medios de los lados y las proyecciones del punto de corte de las diagonales hacia los lados están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de los ocho puntos.

Si $ABCD$: Inscriptible, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, M , N , L , y D : Puntos medios.

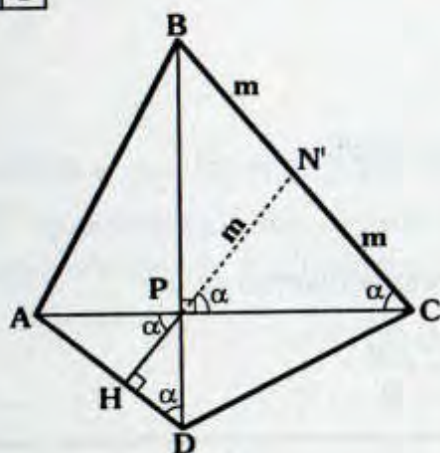


⇒

E, M, N, F, L, G, H y Q pertenecen a la circunferencia de ocho puntos.

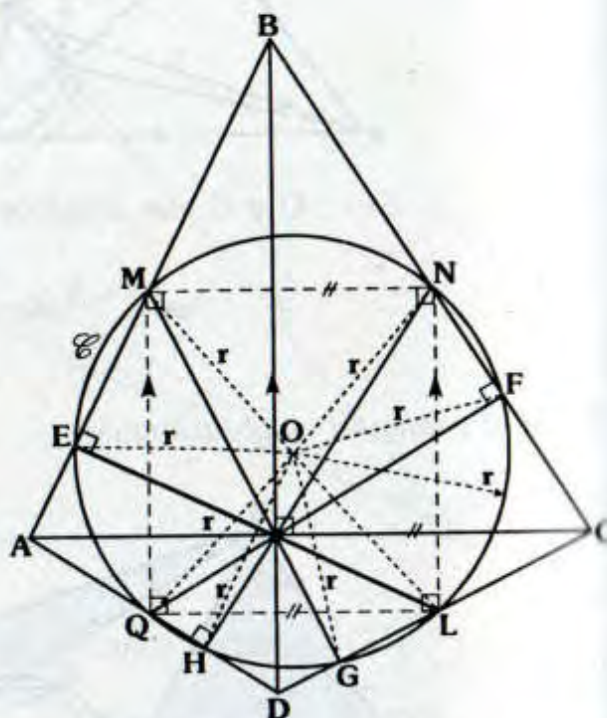
Demostración:

Paso 1



- $\triangle BPC$: Teorema $BN' = N'C = m$
 \Rightarrow H, P y N son colineales
 G, P y M son colineales
 F, P y Q son colineales
 E, P y L son colineales
 (Gráfico anterior)

Paso 2



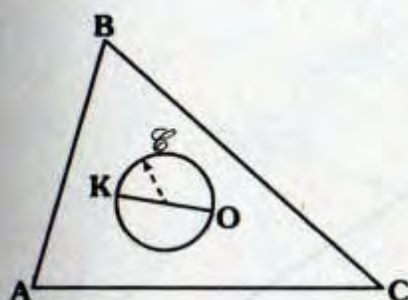
- \overline{MN} , \overline{NL} , \overline{LQ} y \overline{QM} son bases medias de los triángulos ABC , BCD , ACD y ABD respectivamente.
- $MNLQ$: Rectángulo de centro O .
 $\Rightarrow OM = OL = ON = OQ = r$
- Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en los triángulos QHN , MEL , QFN : $OH = r$, $OE = r$ y $OF = r$
- Luego con centro O y radio " r " trazamos \mathcal{C} .
 \therefore H, Q, E, M, N, F, L y G son concíclicos.

CIRCUNFERENCIA DE BROCARD

Es aquella circunferencia cuyo diámetro es el segmento cuyos extremos son el circuncentro y su punto simediano.

O : Circuncentro

K : Punto simediano

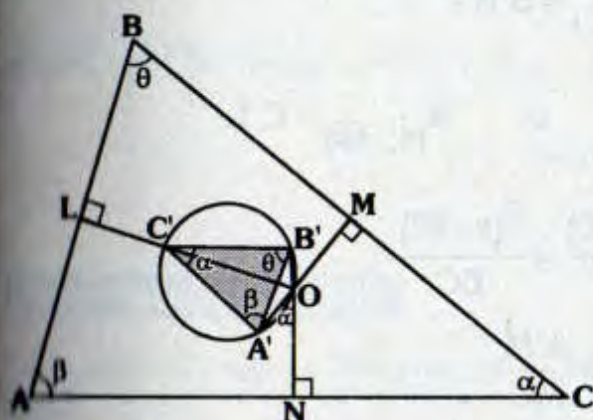


Circunferencia de Brocard

Nota

Si O : Circuncentro y

\mathcal{C} : Circunferencia de Brocard

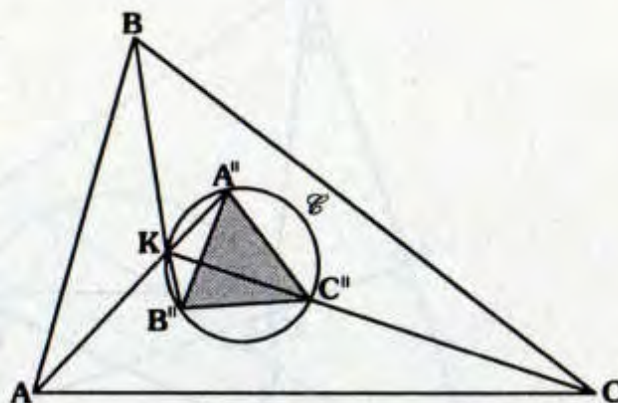


$\Delta A'B'C'$: Primer triángulo de Brocard

- $\Delta OMCN$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle A'ON = m\angle MCN = \alpha$
- $\Delta OA'C'B'$: Inscrito
 $\Rightarrow m\angle A'C'B' = \alpha$
 $\therefore \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

Si K : Punto simediano y

\mathcal{C} : Circunferencia de Brocard

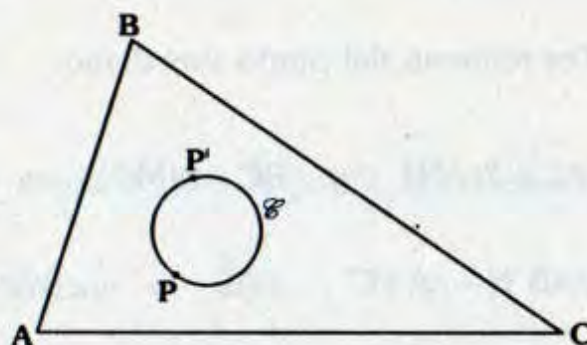


$\Delta A''B''C''$: Segundo triángulo de Brocard

TEOREMA

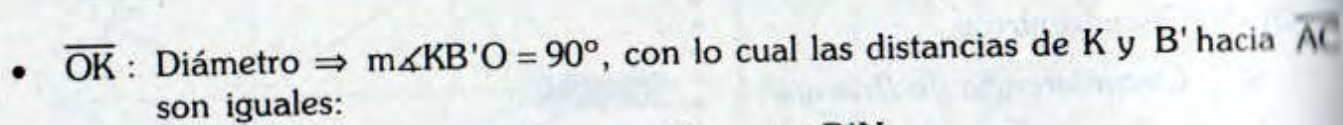
Los puntos de Brocard pertenecen a la circunferencia de Brocard.

Si \mathcal{C} : Circunferencia de Brocard



Los puntos de Brocard: P y P' pertenecen a \mathcal{C} .

Paso	1
-------------	----------



$$d_{(K, \overline{AC})} = B'N$$

• Análogamente: $d_{(K, \overline{AC})} = A'M$ y $d_{(K, \overline{AB})} = C'L$

- Por teorema del punto simediano: $\frac{d(K, \overline{AC})}{AC} = \frac{d(K, \overline{BC})}{BC}$

- $AC = 2(AN)$ y $BC = 2(MC) \Rightarrow \frac{B'N}{AN} = \frac{A'M}{MC}$

• $\triangle AB'N \sim \triangle A'MC$: LAL $\Rightarrow m\angle B'AN = m\angle A'CM = \alpha$

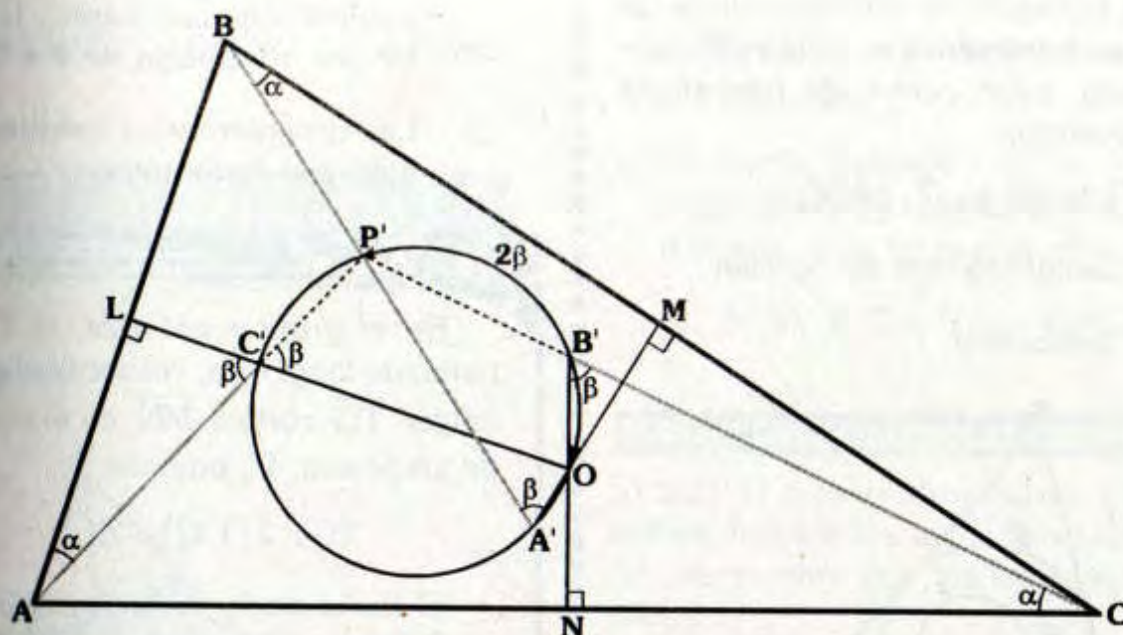
- Del mismo modo: $m\angle LBC' = \alpha$

- Se observa :

$\alpha + \beta = 90^\circ$ y $m\widehat{OP} = 2\beta$, entonces las prolongaciones de $\overline{BC'}$ y $\overline{CA'}$ llegan a P (por ángulo inscrito y exinscrito).

$\therefore P$: primer punto de Brocard

Paso 2



• Análogamente los triángulos $AC'L$, $BA'M$ y $B'NC$ son semejantes:

$$\Rightarrow m\angle BAM = m\angle NB'C = m\angle AC'L = \beta$$

• $\overline{AC'}$ y $\overline{CB'}$ llegan a P' .

$\therefore P'$: Segundo punto de Brocard.

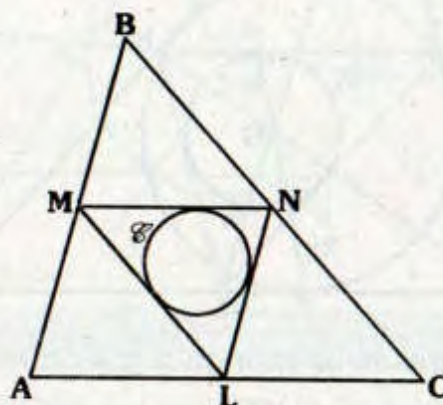
CIRCUNFERENCIA DE SPIEKER

Es la circunferencia inscrita en el triángulo mediano con respecto a un triángulo dado.

$\triangle MNL$: Triángulo mediano y

\mathcal{C} : Circunferencia inscrita en el $\triangle MNL$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$: Circunferencia de Spieker



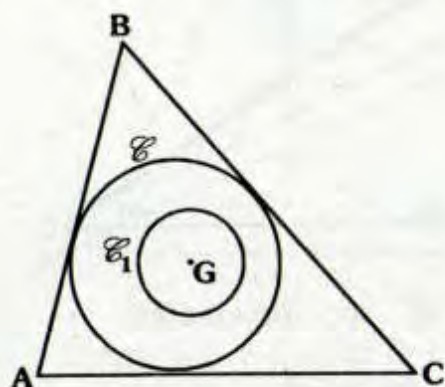
TEOREMA

En todo triángulo la circunferencia de Spieker es homotética a la circunferencia inscrita, cuyo centro de homotecia es el baricentro.

Si \mathcal{C} : Inscrita en el $\triangle ABC$.

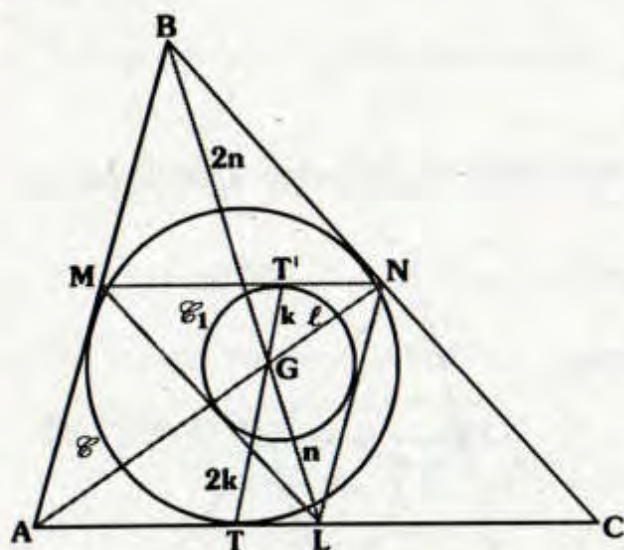
\mathcal{C}_1 : Circunferencia de Spieker.

G: Baricentro.



$\Rightarrow \mathcal{C} \text{ y } \mathcal{C}_1 \text{ son homotéticas con centro en G.}$

Demostración:



- Al trazar el triángulo mediano MNL sabemos que \mathcal{C}_1 está inscrita.

- G: Baricentro \Rightarrow se observa que los triángulos MNL y ABC son homotéticos con centro G y razón de homotecia de 1 a 2.

\therefore Las circunferencias inscritas también son homotéticas.

Nota

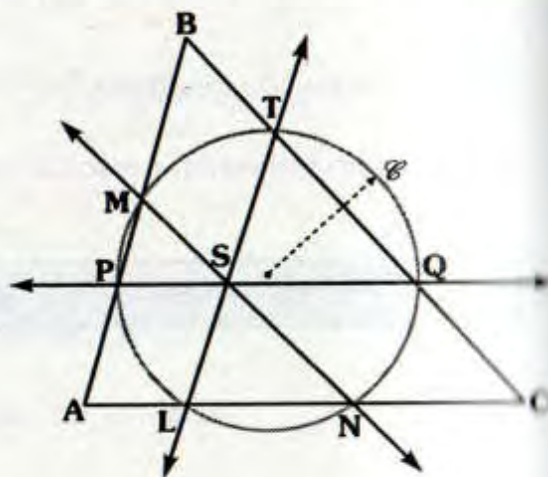
En el gráfico anterior, si T es punto de tangencia, entonces al prolongar \overline{TG} corta a \overline{MN} en el punto de tangencia T' , además:

$$TG = 2(T'G) = 2K$$

\therefore El radio de la circunferencia de Spieker es la mitad de la circunferencia inscrita propiedades aparentemente parecidas a la circunferencia de los nueve puntos.

PRIMERA CIRCUNFERENCIA DE LEMOINE

Si por el punto simediano trazamos rectas paralelas a los lados, los seis puntos de intersección con los lados del triángulo son concíclicos. La circunferencia que las contiene se denomina primera circunferencia de Lemoine.



En el gráfico:

S : Punto simediano

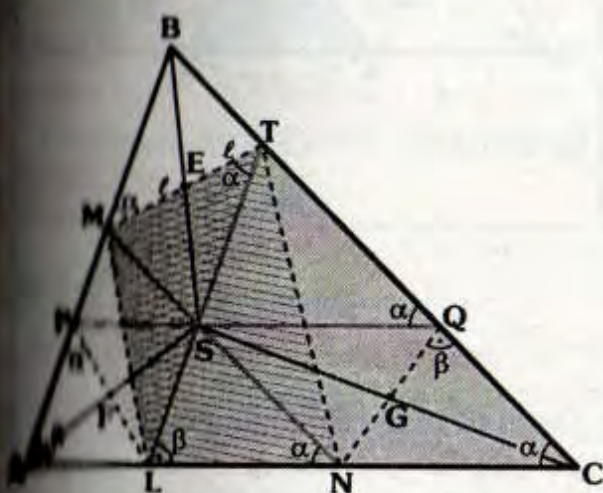
$PQ \parallel AC$, $MN \parallel BC$ y $LT \parallel AB$

Se cumple:

L, M, T, Q y N: Concíclicos

Primera circunferencia de Lemoine.

Observación:



Se observa:

APSL, MBTS y SQCN son paralelogramos y F, E y G son puntos medios de sus diagonales.

Debido a que $ME = ET \Rightarrow \overline{MT}$ y \overline{AC} son antiparalelas con respecto al: $\angle ABC \Rightarrow m\angle ACB = m\angle BMT = \alpha$ (Teorema del punto simediano pag. 104)

$PQ \parallel AC \Rightarrow m\angle PQB = m\angle ABB = \alpha \Rightarrow \triangle PMTQ$ es inscriptible

En forma análoga:

$\triangle MPLN$ y $\triangle LNQT$ también son inscriptibles

• Debido a que $\triangle MPLN$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle APL = m\angle ANM = \alpha$

y $PM \parallel LT \Rightarrow \triangle LPMT$ es un trapecio isósceles.

• En forma análoga:

$\triangle PLNQ$ y $\triangle NQTM$ son trapecios isósceles, con lo cual se demuestra:

L, N, M, T, Q y N son concíclicos

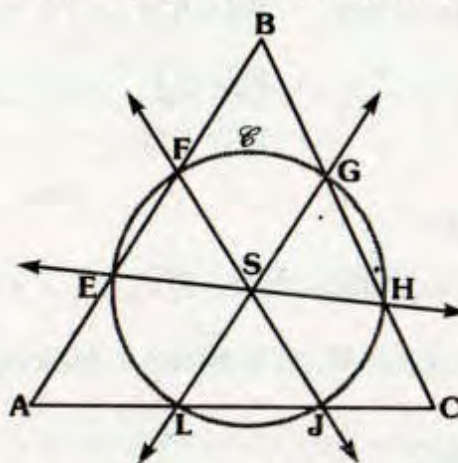
SEGUNDA CIRCUNFERENCIA DE LEMOINE

Si por el punto simediano trazamos antiparalelos a los lados, los seis puntos de intersección con los lados son concíclicos.

La circunferencia que contiene a dichos puntos se denomina segunda circunferencia de Lemoine.

En el gráfico:

S : Punto simediano del ABC y \overline{EH} y \overline{AC} , \overline{FJ} y \overline{BC} , \overline{LG} y \overline{AB} son antiparalelas a los ángulos ABC, BAC y ACB respectivamente.

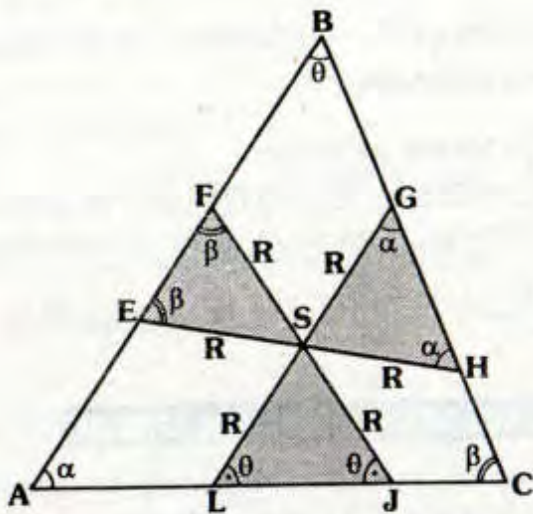


Se cumple:

E, L, J, H, G y F son concíclicos

\mathcal{C} : Segunda circunferencia de Lemoine

Demostración:



- Del dato de las antiparalelas se tiene:

$$m\angle ABC = m\angle GLC = m\angle FJA = \theta$$

$$m\angle BAC = m\angle EHB = m\angle LGC = \alpha$$

$$m\angle ACB = m\angle BEH = m\angle EFJ = \beta$$

- $\Rightarrow \triangle LSJ, \triangle ESF, \triangle GSH$: Isósceles

- Por teorema: $ES = SH$

$$FS = SJ$$

$$LS = SG$$

- Luego:

S equidista de E, F, G, H, J y L

\therefore E, L, J, H, G y F son concíclicos.

También:

El punto simedianal es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos mencionados.

Observación

Segunda circunferencia de Lemoine



Se cumple:

$$EF = 2R \cos \beta$$

$$LJ = 2R \cos \theta$$

$$HG = 2R \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{\cos \beta} = \frac{LJ}{\cos \theta} = \frac{HG}{\cos \alpha} = 2R$$

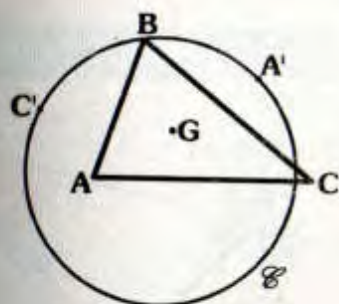
De la última expresión, se concluye que las cuerdas que determinan cada lado a la segunda circunferencia de Lemoine son proporcionales a los cósenos de los ángulos opuestos, es por ello que a esta circunferencia también se le llama **Circunferencia Coseno**.

CIRCUNFERENCIA DE STEINER

La circunferencia que pasa por el vértice de un triángulo y por los simétricos de los otros vértices con respecto al baricentro, se le conoce como circunferencia de Steiner.

Si G: Baricentro de $\triangle ABC$.

A' y C': Simétricos de A y C, respectivamente, con respecto a G.



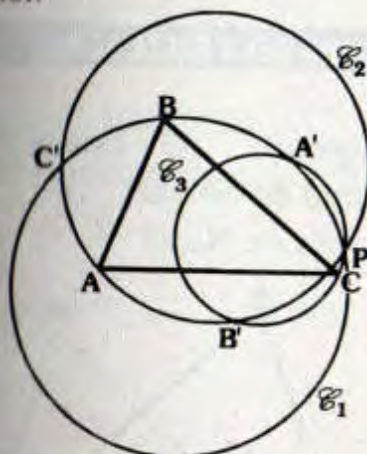
B, A' y C' pertenecen a la circunferencia de Steiner \mathcal{C} .

Nota

El triángulo tiene tres circunferencias de Steiner, las otras dos (siendo B' el simétrico de B con respecto a G) contienen a las ternas $AB'C'$ y $CA'B'$.

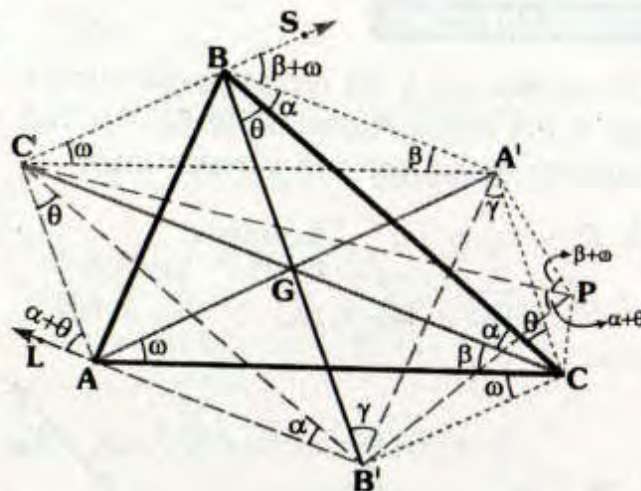
Las tres circunferencias de Steiner de un triángulo son concurrentes. Dicho punto de concurrencia es el Punto de Steiner (pág. 114).

\mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 son las circunferencias de Steiner.



\mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 concurren en el punto P.

Demostración:



- Supongamos que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_3 se cortan en P, es decir que los \triangle s $C'BA'P$ y $A'B'CP$ son inscriptibles.

- Se observa:

$$\triangle A'BC' \equiv \triangle AGC, \triangle BGC \equiv \triangle CAB$$

$$m\angle SBA' = m\angle A'C' = \beta + \omega$$

- $\triangle A'PCB'$:

$$m\angle A'PB' = m\angle A'CB' = \beta + \omega + \alpha + \theta$$

- Se nota:

$$m\angle C'PB' = m\angle C'AL = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow \triangle C'PB'A : \text{ Inscriptible}$$

\therefore La circunferencia que pasa por A, B' y C' también pasa por P.

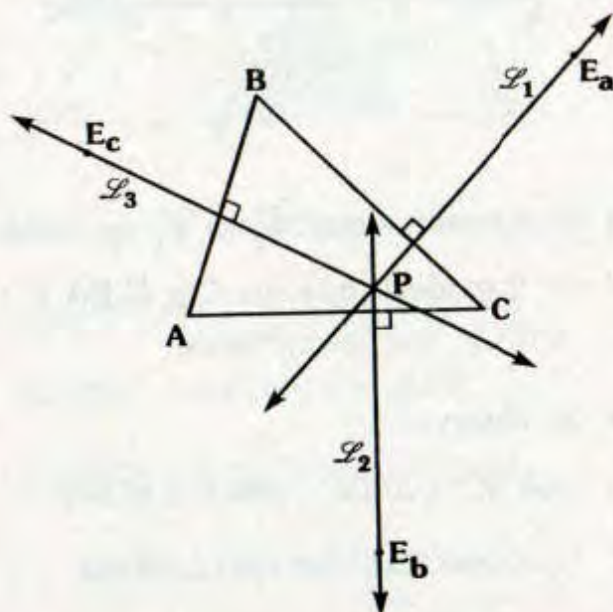
15. TEMAS SELECTOS (DEMOSTRADOS)

TEOREMA DE LORIGA

En un triángulo, las rectas perpendiculares a los lados trazadas desde sus respectivos excentros son concurrentes.

Si E_a , E_b y E_c : Excentros,

$$\vec{L}_1 \perp \overline{BC}, \vec{L}_2 \perp \overline{AC} \text{ y } \vec{L}_3 \perp \overline{AB}$$

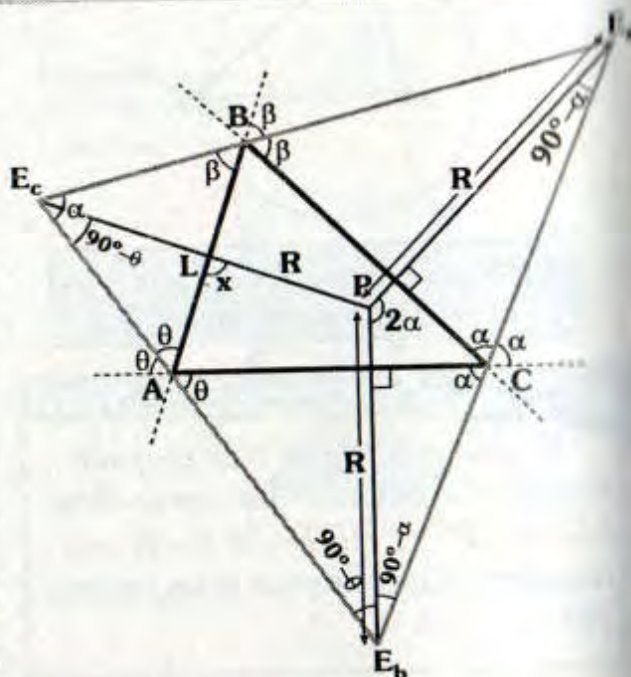


⇒

\vec{L}_1 , \vec{L}_2 y \vec{L}_3 concurren en P : punto de Loriga

Demostración:

- Sean $\overline{E_a P} \perp \overline{BC}$, $\overline{E_b P} \perp \overline{AC}$
- $\triangle P E_a E_b$: Isósceles
⇒ $E_a P = E_b P = R$ y $m\angle E_a P E_b = 2\alpha$
- $\triangle ABC$: $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360^\circ$
⇒ $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$
- $\triangle A B E_c$: $m\angle A E_c B = \alpha$

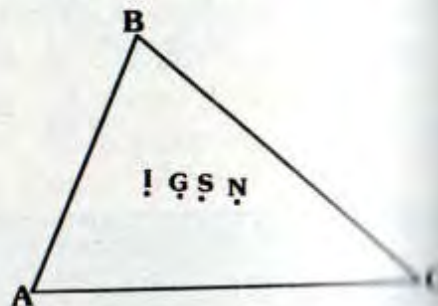


- Por el teorema 7.13:
P : Circuncentro de $E_a E_b E_c$
⇒ $E_c P = R$
- $\triangle A E_c L$: Por ángulo exterior: $x = 90^\circ$
∴ $\overline{E_c P} \perp \overline{AB}$

DEMOSTRACIÓN DE LA RECTA DE HOUSSEL

Sean:

- I : Incentro, G : Baricentro,
- S : Punto de Spieker y
- N : Punto de Nagel



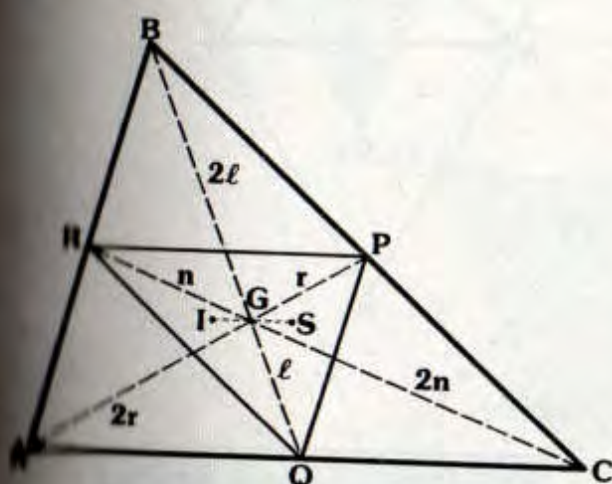
⇒ I, G, S y N son colineales

• Primero vamos a demostrar que I, G y S son colineales.

• Luego que I, G y N son colineales.

Demostración:

1



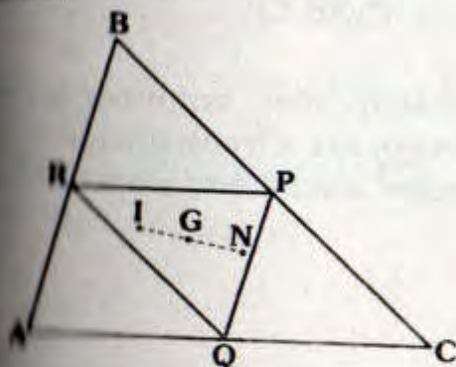
• Trazamos las medianas AP, BQ y CR, se observa que los triángulos ABC y PQR son homotéticos respecto de G y de razón 2.

• Puesto que I : Incentro de ABC y S : Incentro de PQR.

∴ I, G y S : Colineales

Además : $IG = 2(GS)$

(Ver homotecia pág. 170)



• I : Incentro del $\triangle ABC \Rightarrow I$: Punto de Nagel del $\triangle PQR$ (Teorema Pág. 97-98).

• G : Centro de homotecia

∴ G, S y N : colineales

Además: $GN = 2(GI)$

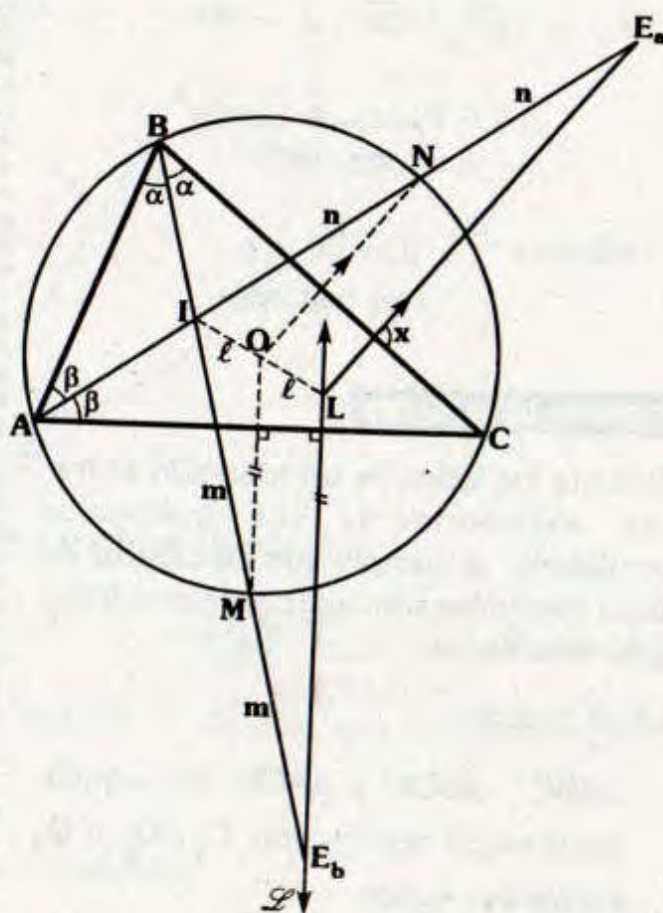
En conclusión: I, G, S y N son colineales:

$$GN = 2(IG) = 4(GS) \text{ y}$$

$$(IG)(SN) = (GS)(IN)$$

(ver homotecia pág. 170)

DEMOSTRACIÓN DE LA RECTA DE NAGEL



- Sea I : Incentro,
 O : Circuncentro,
 E_a y E_b : Excentro
- Trazamos $\overleftrightarrow{L} \perp \overline{AC}$ que corte a la prolongación de \overline{IO} en L .

- Por teorema:

$$IM = ME_b = m, \quad IM = ME_a = n,$$

$$\overline{OM} \perp \overline{AC} \quad \text{y} \quad \overline{ON} \perp \overline{BC}$$

- \overline{OM} : Base media del $\triangle ILE_b$
 $\Rightarrow IO = OL = \ell$

- \overline{ON} : Base media del $\triangle IE_aL$
 $\Rightarrow \overline{LE_a} \parallel \overline{OM} \Rightarrow x = 90^\circ$

$\therefore L$: Punto de Loriga
(ver pag. 140)

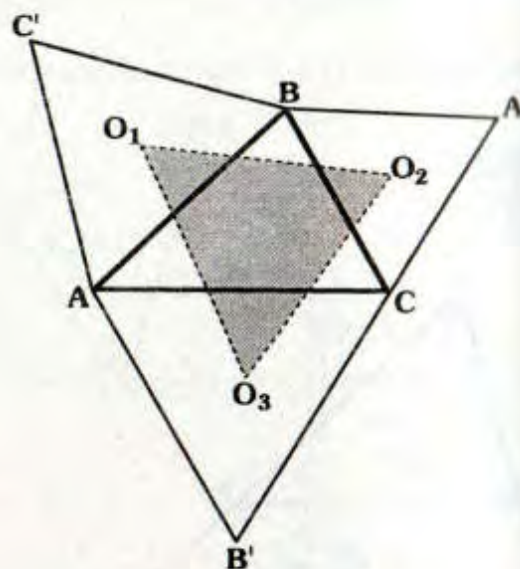
Además : $IO = OL = \ell$
(ver pag. 85)

TEOREMA DE NAPOLEÓN

Si sobre los lados de un triángulo se trazan exteriormente los triángulos equiláteros se cumple que los centros de estos triángulos son vértices de otro triángulo equilátero.

En el gráfico:

$\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$ y $\triangle ACB'$ son equiláteros cuyos centros son O_1 , O_2 y O_3 respectivamente.



Se cumple:

$\triangle O_1O_2O_3$ es equilátero

Demostración:

- Por teoremas vistos en el punto de Fermat se cumple $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en F .

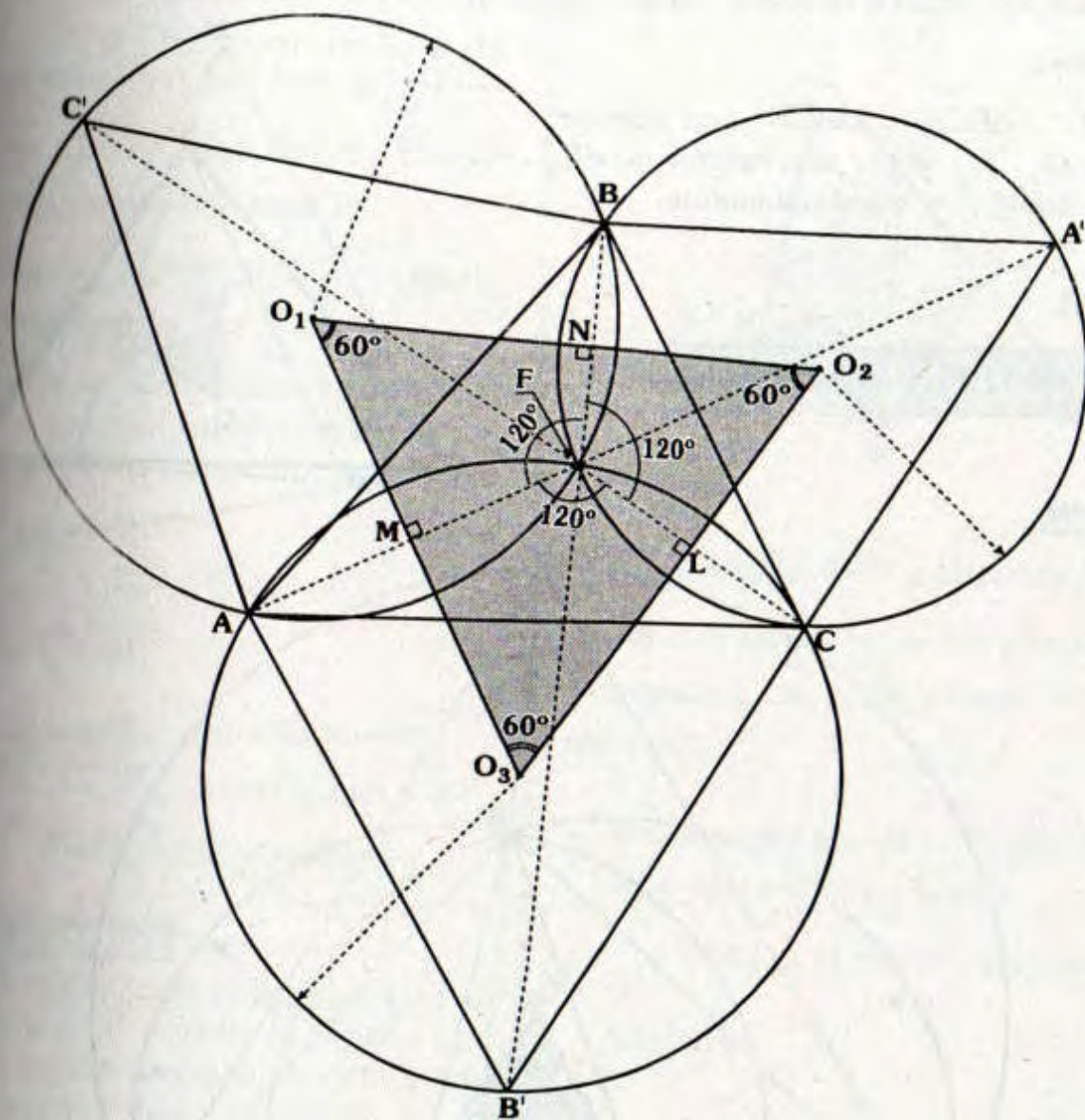
Además :

$$m\angle AFB = m\angle BFC = m\angle AFC = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AC'BF, \quad \triangle BA'CF \\ \text{y} \quad \triangle AB'CF$$

Son inscriptibles, entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros concurren en F .

■ Así tenemos:



■ Para las circunferencias \overline{AF} , \overline{BF} y \overline{CF} son cuerdas comunes:

$$\Rightarrow \overline{O_1O_2} \perp \overline{BF}, \quad \overline{O_1O_3} \perp \overline{AF} \quad \text{y} \quad \overline{O_2O_3} \perp \overline{FC}$$

■ En los cuadriláteros O_1MFN , O_2LFN y O_3LFM se deduce que los ángulos del $\Delta O_1O_2O_3$ miden 60° .

$\therefore \Delta O_1O_2O_3$ es equilátero.

SEGUNDO TEOREMA DE NAPOLEÓN

Si sobre los lados de un triángulo se trazan interiormente triángulos equiláteros, se cumple que los centros de estos triángulos son vértices de otro triángulo equilátero.

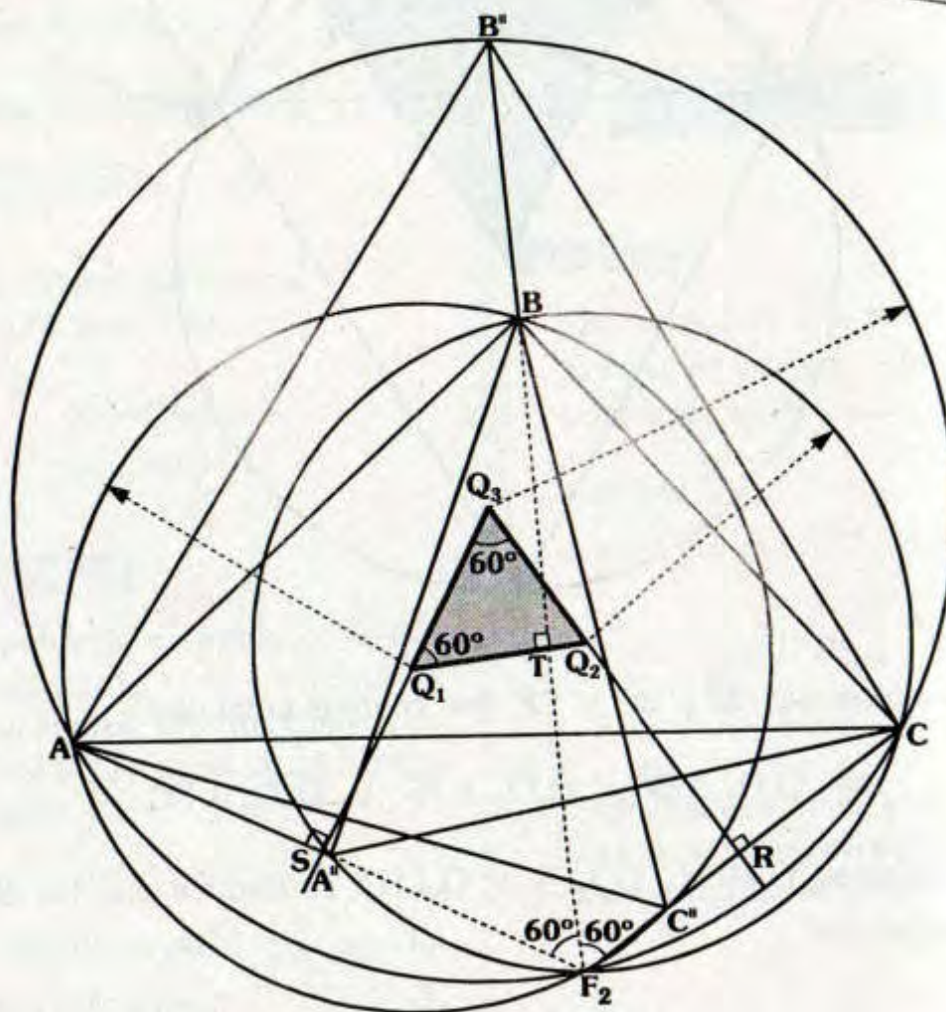
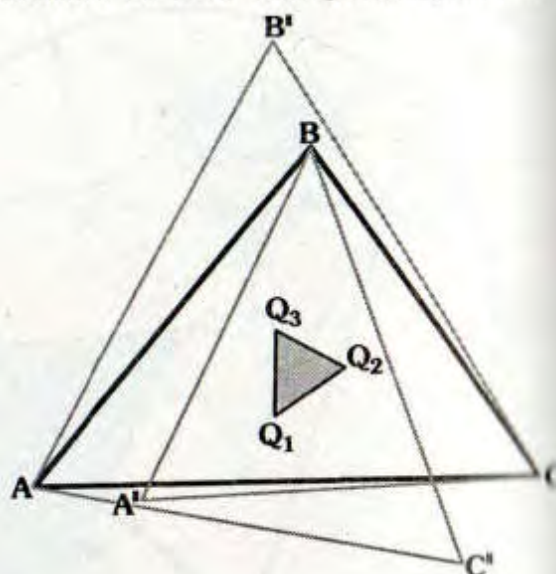
En el gráfico:

$\triangle ABC''$, $\triangle BCA''$ y $\triangle ACB''$ son equiláteros Q_1 , Q_2 y Q_3 son centros de dichos triángulos respectivamente.

Se cumple:

$\triangle Q_1Q_2Q_3$ es equilátero

Demostración:



En forma análoga a la demostración anterior, usaremos lo que hemos visto en el teorema de Fermat.

$\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ concurren en el denominado segundo Punto de Fermat.

Del gráfico: $m\angle AF_2B = m\angle BF_2C = 60^\circ$ (Por ser punto de Fermat 2).

$\triangle ABC''F_2$, $\triangle AB''CF_2$ y $\triangle CBA''F_2$ son inscriptibles.

Las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros son concurrentes en F_2 .

Por teorema:

$$\overline{Q_3Q_1} \perp \overline{AF_2}, \overline{Q_3Q_2} \perp \overline{F_2C} \text{ y}$$

$$\overline{Q_1Q_2} \perp \overline{BF_2}$$

$$\Rightarrow \triangle SQ_3RF_2: m\angle SQ_3R = 60^\circ$$

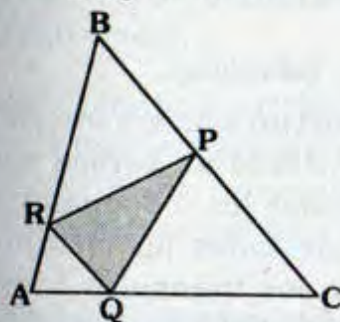
$$\triangle TQ_1SF_2: m\angle Q_3Q_1Q_2 = 60^\circ$$

$$\therefore \triangle Q_1Q_2Q_3 \text{ es equilátero.}$$

TEOREMA DE FAGNANO

Dado un triángulo, si el perímetro de la región triangular inscrita es mínimo entonces la región triangular le corresponde al triángulo órtico y viceversa.

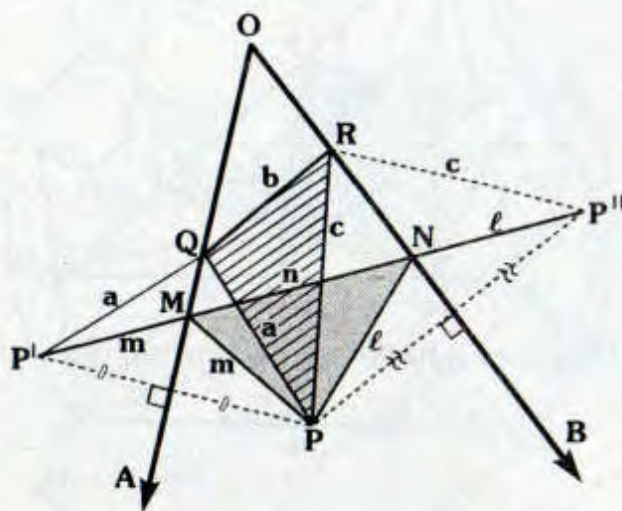
El Perímetro $\triangle PRQ$ es mínimo



$\triangle PQR$: Triángulo órtico

Demostración:

Nociones Previas:



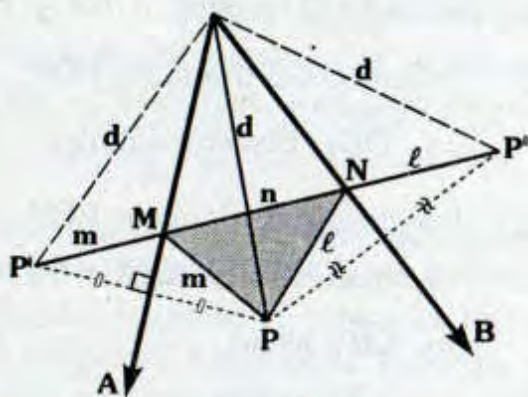
Dado el ángulo AOB y el punto P.

¿Cuál es el menor recorrido partiendo de P tocando a \overleftrightarrow{OA} , \overleftrightarrow{OB} y llegando al mismo punto P?

Tenemos por menor recorrido de P' a P'' : $m+n+l < a+b+c$

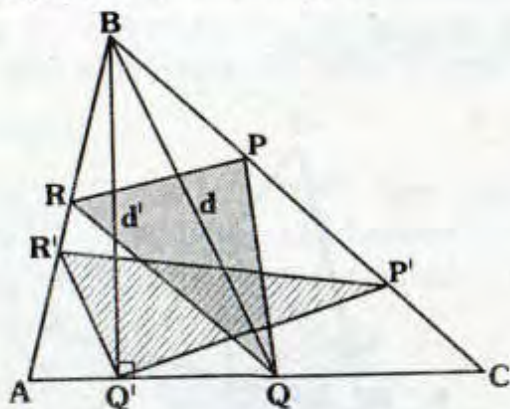
\therefore PMN es el menor recorrido.

Además:



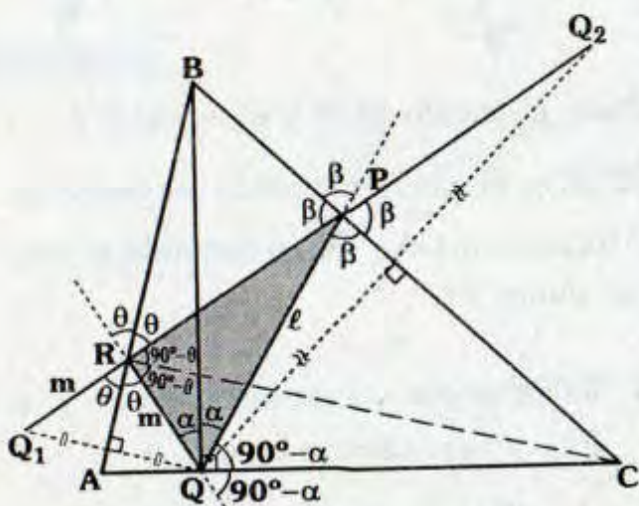
$\triangle P'OP''$: $2d > m+n+l$

Trabajando en el triángulo:



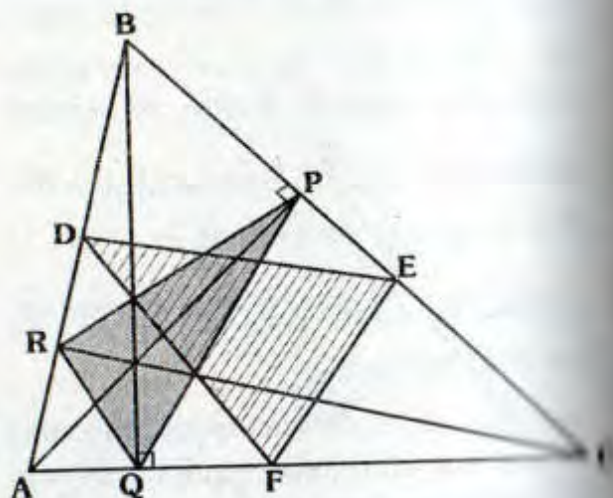
Se nota que "d" debe ser mínimo:

$\Rightarrow \overline{BQ}$: Altura



- El vértice Q ya es fijo, entonces debemos ubicar los otros vértices P y R, para lo cual procedemos ubicando los simétricos de Q respecto a \overline{AB} y \overline{BC} .
- B : Excentro del triángulo PQR.
 $\Rightarrow \overrightarrow{QB}$: Bisectriz interior
- C : Excentro del triángulo PQR.
 $\Rightarrow m\angle PRC = m\angle QRC = 90^\circ - \theta$
 $\Rightarrow \overline{CR}$: altura
 \overline{AP} : altura
 $\therefore \Delta PQR$ es órtico del ΔABC .

Demostración del recíproco:



- Se observa que: $FB > BQ$
- De lo anterior se obtiene:

$$\text{Perím. } \Delta PQR < \text{Perím. } \Delta DEF$$

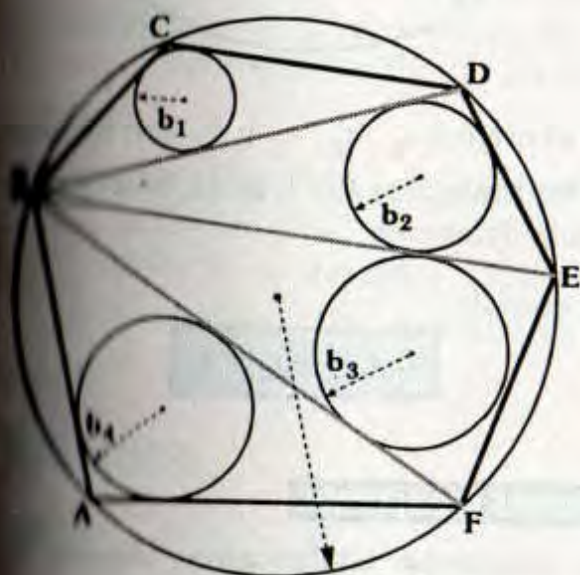
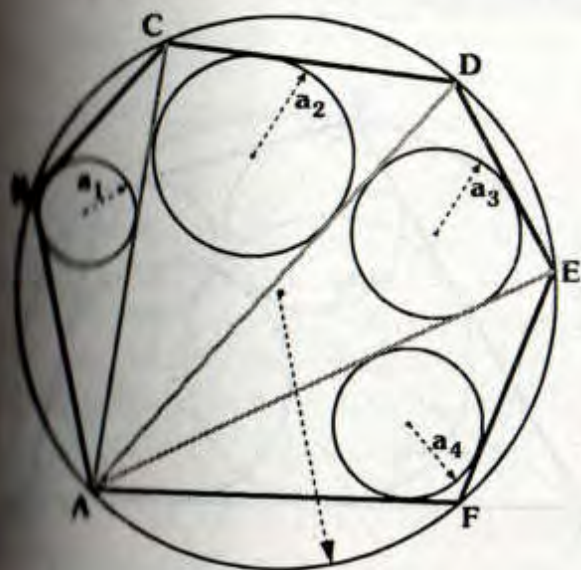
$\therefore \Delta PQR$ es el de menor perímetro

PRIMER TEOREMA DE MIKAMI Y KOVAYASHI

También se le conoce como primer teorema japonés, al teorema aquí mostrado se le denomina "**Problemas Sangaku**", problemas que colgaban los japoneses bajo las terrazas de templos y santuarios (aproximadamente 1 603 - 1 867).

El teorema establece:

Si en una circunferencia inscribimos un polígono y desde un vértice cualquiera trazamos todas las diagonales, la suma de radios de todas las circunferencias inscritas en los triángulos formados es una constante que es independiente del vértice que se elija para la triangulación.

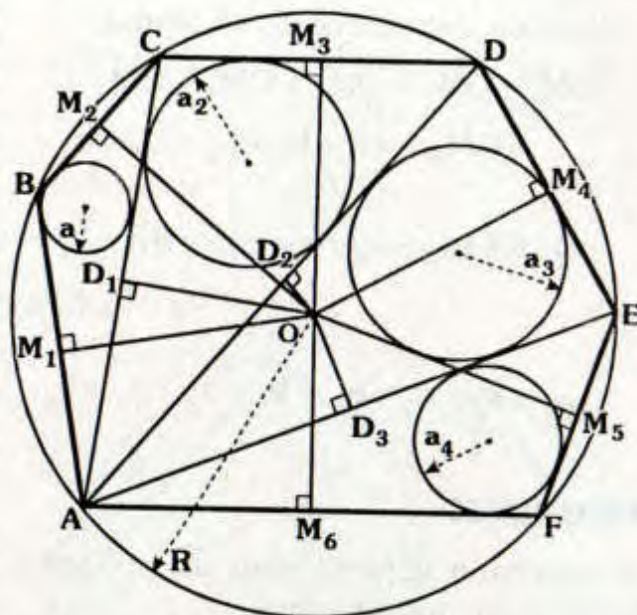


Se ha considerado en el gráfico un hexágono inscrito, pero puede ser cualquier polígono inscrito.

Se han considerado las triangulaciones desde A y B por separado para el mismo polígono (puede ser cualquier vértice), el teorema expresa la siguiente igualdad:

$$a_1 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

Demostración:



- Se ha considerada una triangulación arbitraria, de igual forma la ubicación de O.
- Se trazan las perpendiculares de O hacia cada lado y diagonal del polígono.
- Por teorema de Carnot. (Pág. 53)
 - $\triangle ABC: OM_1 + OM_2 - OD_1 = R + a_1$
 - $\triangle ACD: OD_1 + OM_3 - OD_2 = R + a_2$
 - $\triangle ADE: OD_2 + OM_4 + OD_3 = R + a_3$
 - $\triangle AEF: OM_5 - OD_3 + OM_6 = R + a_4$
- Sumando las expresiones anteriores:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5 + OM_6 = 4R + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
- Este resultado nos indica que la suma de distancias del centro de la circunferencia (cuando el centro es interior al polígono) hacia cada lado, en general para un polígono de "n" lados sería: $(n - 2)R$ más la suma de inradios para cualquier triangulación.

- Para el caso particular del hexágono ABCDEF, ahora escogemos la triangulación del vértice B, se tendrá:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5 + OM_6 = 4R + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\Rightarrow 4R + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4R + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

GENERALIZANDO:

La expresión general para un polígono de "n" lados inscrito será:

$$\sum_{i=1}^n OM_i = (n-2)R + \sum_{i=1}^{n-2} r_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-2} r_i = \sum_{i=1}^n OM_i - (n-2)R$$

Donde:

OM_i : Distancia del centro o de la circunferencia hacia cada lado del polígono.

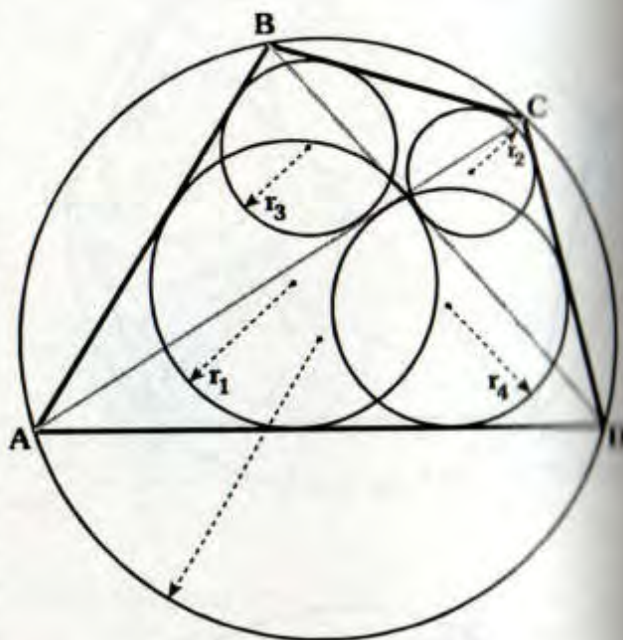
$\sum_{i=1}^{n-2} r_i$: Suma de inradios para una triangulación dada.

Podemos observar entonces que la suma de inradios en una triangulación dada es constante.

Observación

Recordar que si un triángulo es obtusángulo la distancia hacia el lado mayor "se puede considerar" como si fuera negativa.

Caso Particular (n=4)



En el gráfico r_1 , r_2 , r_3 y r_4 son inradios de los triángulos ABD, BCD, BCD y ACD respectivamente.

Se cumple:

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

LUGARES GEOMÉTRICOS

En esta parte, analizaremos algunos lugares geométricos, descritos por los puntos notables.

- ① Dada una semicircunferencia de diámetro AB y un punto P de la semicircunferencia, el lugar geométrico del incentro y baricentro del triángulo APB es un cuadrante y una semicircunferencia, respectivamente.
- ② En una circunferencia se ubican los puntos fijos A y B y el punto móvil P el lugar geométrico del incentro,

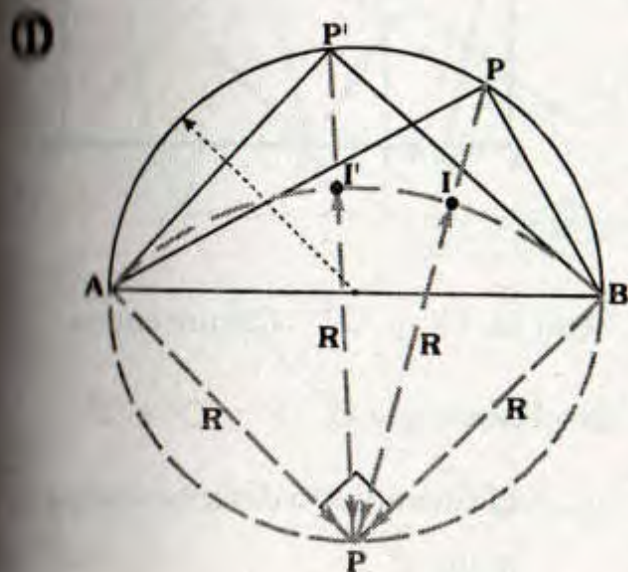
baricentro y ortocentro del triángulo ABP es un arco de circunferencia, circunferencia y una circunferencia congruente a la respectivamente.

1 Se tiene un cuadrado ABCD, en el cual se ubican los puntos fijos M y N y el punto móvil L, el lugar geométrico del circuncentro y baricentro del triángulo MNL es parte de la mediatriz de \overline{MN} y un cuadrado, respectivamente.

2 El lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas de Simson de un triángulo con respecto a dos puntos diametralmente opuestos es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo mencionado.

3 El lugar geométrico, del ortocentro del triángulo ABC, teniendo a B y C fijos y A se desplaza sobre una recta paralela a \overline{BC} , es una parábola.

Demostraciones:

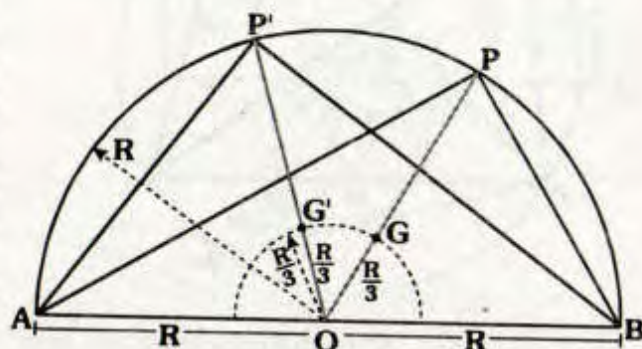


• Sean I e I' incentros de los triángulos.

• Por teorema: $IP = PB = AP = R$
y $I'P = PA = PB = R$

• Además: $m\angle APB = 90^\circ$

\therefore I describe el cuadrante AB.

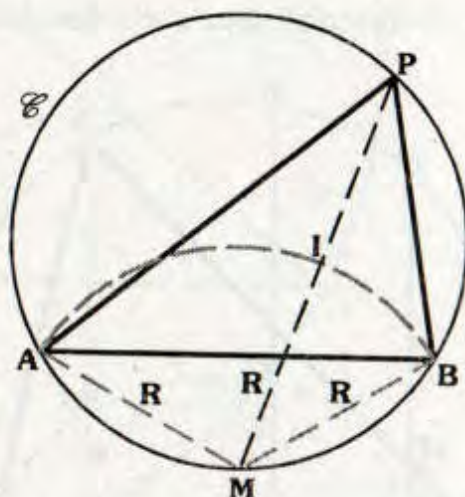


• $AO = OB = PO = PO' = R$

• Por teorema: $OG = OG' = \frac{R}{3}$

\therefore G describe una circunferencia de centro O y radio $R/3$.

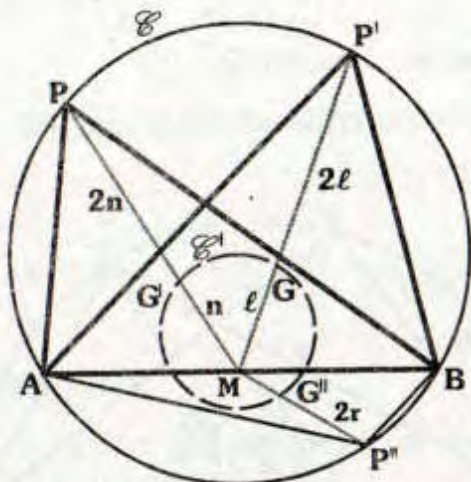
2



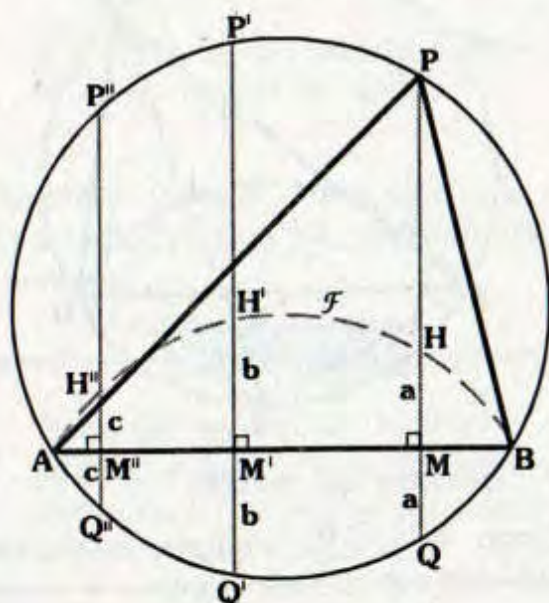
• I : Incentro del $\triangle APB$.

• Como \mathcal{C} y AB son fijos, entonces $AM = MB = R$ (R: constante).

- Por teorema: $MI=R$
- ∴ I describe un arco de circunferencia de centro M y radio R .

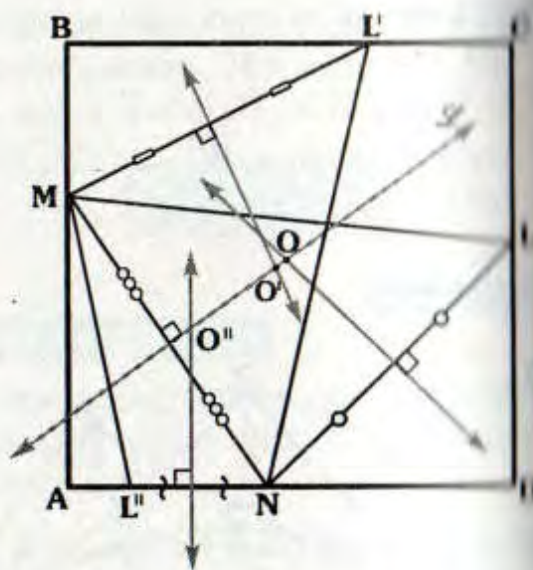


- G, G' y G'' son baricentros de los triángulos $APB, AP'B$ y $AP''B$ respectivamente.
- Se sabe: $\frac{MG}{MP} = \frac{MG'}{MP'} = \frac{MG''}{MP''} = \frac{1}{3}$
- \mathcal{C}' es homotético de \mathcal{C} , con respecto a M .
- ∴ G describe una circunferencia.



- Sean H, H' y H'' : Ortocentros
- Por teorema:
 $HM = MQ = a, H'M' = M'Q' = b$ y
 $H''M'' = M''Q'' = c$
 $\Rightarrow \mathcal{F}$ es simétrico del arco AB con respecto a \overline{AB} .
- Si el punto P se encuentra en el otro arco AB , los ortocentros describen un arco simétrico.
- ∴ El ortocentro describe una circunferencia congruente a la inicial.

③



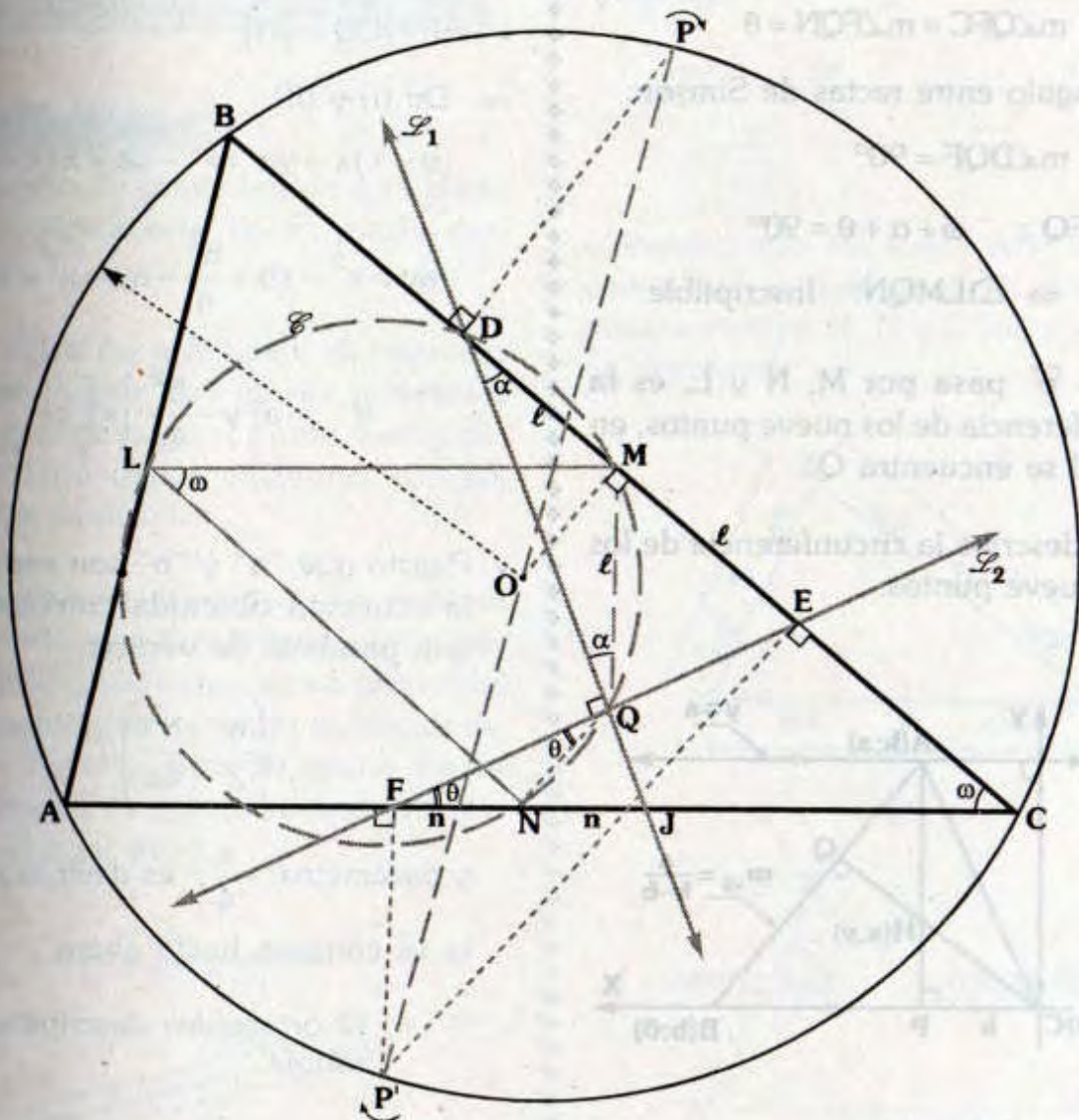
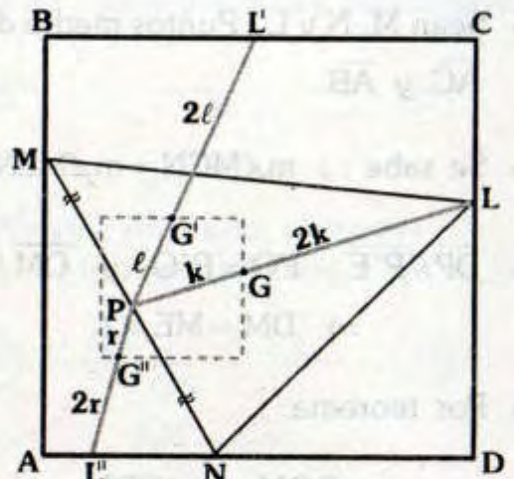
- Sean O, O' y O'' : Circuncentros
- Se observa que O, O' y $O'' \in \mathcal{L}$
- ∴ El circuncentro describe una parte de \mathcal{L} .

Sean G , G' y G'' : Baricentros.

$$\frac{PG}{PL} = \frac{PG'}{PL'} = \frac{PG''}{PL''} = \frac{1}{3}$$

Como L describe el cuadrado $ABCD$, por homotecia:

El baricentro describe un cuadrado.



- Sean M, N y L : Puntos medio de \overline{BC} , \overline{AC} y \overline{AB} .

- Se sabe : $m\angle MCN = m\angle MLN = \omega$

- $\overline{DP} \parallel \overline{P'E}$, $PO = P'O$ y $\overline{OM} \parallel \overline{P'E}$
 $\Rightarrow DM = ME = \ell$

- Por teorema:

$$m\angle DQM = m\angle QDM = \alpha$$

- Análogamente:

$$m\angle QFC = m\angle FQN = \theta$$

- Por ángulo entre rectas de Simson:

$$m\angle DQF = 90^\circ$$

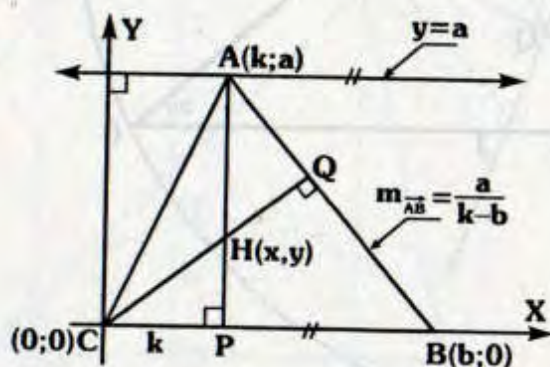
- $\angle DCFQ : \omega + \alpha + \theta = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle LMQN: \text{ Inscriptible}$$

- Como \mathcal{C} pasa por M, N y L, es la circunferencia de los nueve puntos, en la cual se encuentra Q.

\therefore Q describe la circunferencia de los nueve puntos.

5



- Sea H : Ortocentro

- Trazamos el plano cartesiano con:

$$\overleftrightarrow{AP}: x = k \quad \dots (I)$$

$$m_{\overleftrightarrow{CQ}} = \frac{b-k}{a}$$

$$\left(m_{\overleftrightarrow{CQ}} \right) \left(m_{\overleftrightarrow{AB}} \right) = -1$$

$$\overleftrightarrow{CQ}: (b-k)x = ya \quad \dots (II)$$

$$\overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{CQ} = \{H\}$$

\Rightarrow De (I) y (II) :

$$(b-k)x = ya \Rightarrow -ya = x(x-b)$$

$$-ay = x^2 - xb + \frac{b^2}{4} - ay = x^2 - xb + \frac{b^2}{4}$$

$$\mathcal{P}: -a \left(y - \frac{b^2}{4a} \right) = \left(x - \frac{b}{2} \right)^2$$

- Puesto que "a" y "b" son constantes, la ecuación obtenida corresponde a una parábola de vértice:

$$\left(\frac{b}{2}; \frac{b^2}{4a} \right)$$

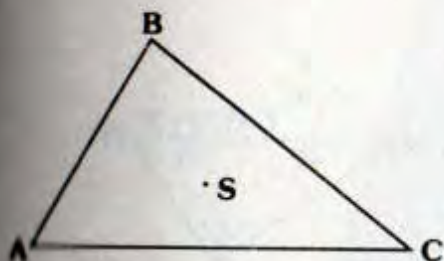
y parámetro $-\frac{a}{4}$; es decir la parábola es cóncava hacia abajo.

\therefore El ortocentro describe una parábola.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN TRIÁNGULO

El centro de gravedad de un triángulo es el punto de Spieker.

El punto de Spieker



S : Centro de gravedad del triángulo ABC.

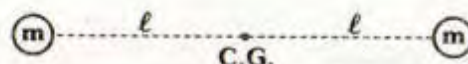
PRELIMINARES

- El centro de gravedad de una barra homogénea esta en su punto medio.
- El centro de gravedad, del sistema formado por dos masas puntuales de igual peso, es el punto medio del segmento cuyos extremos son las masas puntuales.
- El centro de gravedad, del sistema formado por dos masas puntuales de pesos diferentes, es un punto del segmento que tiene por extremos dichas masas cuya distancia hacia las masas es inversamente proporcional a su peso.

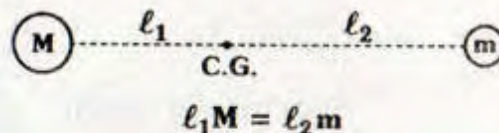
Barra homogénea



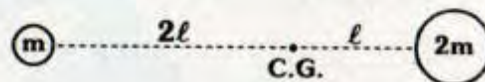
Sistema de masas puntuales (igual masa)



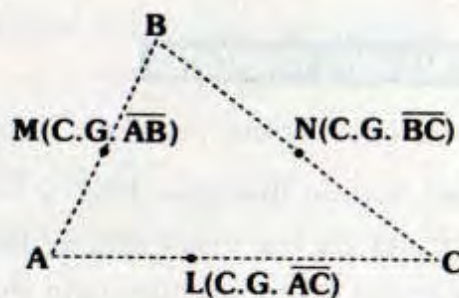
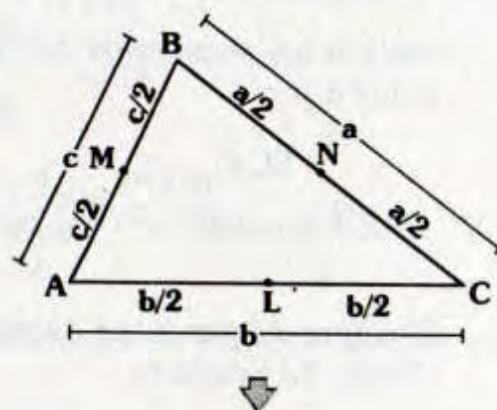
Sistema de masas puntuales (masas distintas)



Ejemplo:



Considerando los lados AB, BC y AC como "barras homogéneas", entonces los puntos medios M, N y L son sus centros de gravedad.



Debido a la homogeneidad de las barras las masas son proporcionales a las longitudes.

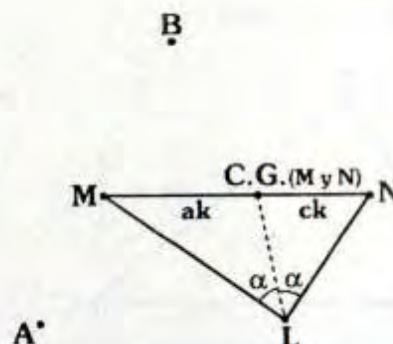
- Como:

$$\frac{MC \cdot G_{(M \text{ y } N)}}{NC \cdot G_{(M \text{ y } N)}} = \frac{a}{c} = \frac{ML}{LN}$$

$$\Rightarrow \overline{LC \cdot G_{(M \text{ y } N)}}$$

Bisectriz del $\triangle MNL$

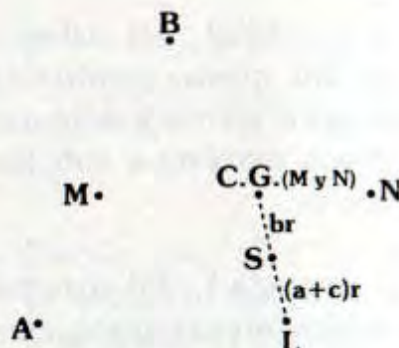
- Con lo cual el centro de gravedad del triángulo se encontrara en $\overline{LC \cdot G_{(M \text{ y } N)}}$.



Hallando el centro de gravedad de L y $C.G_{(M \text{ y } N)}$.

- Como L representa al segmento de longitud b y $C.G_{(M \text{ y } N)}$ representa a los segmentos de longitudes a y c.

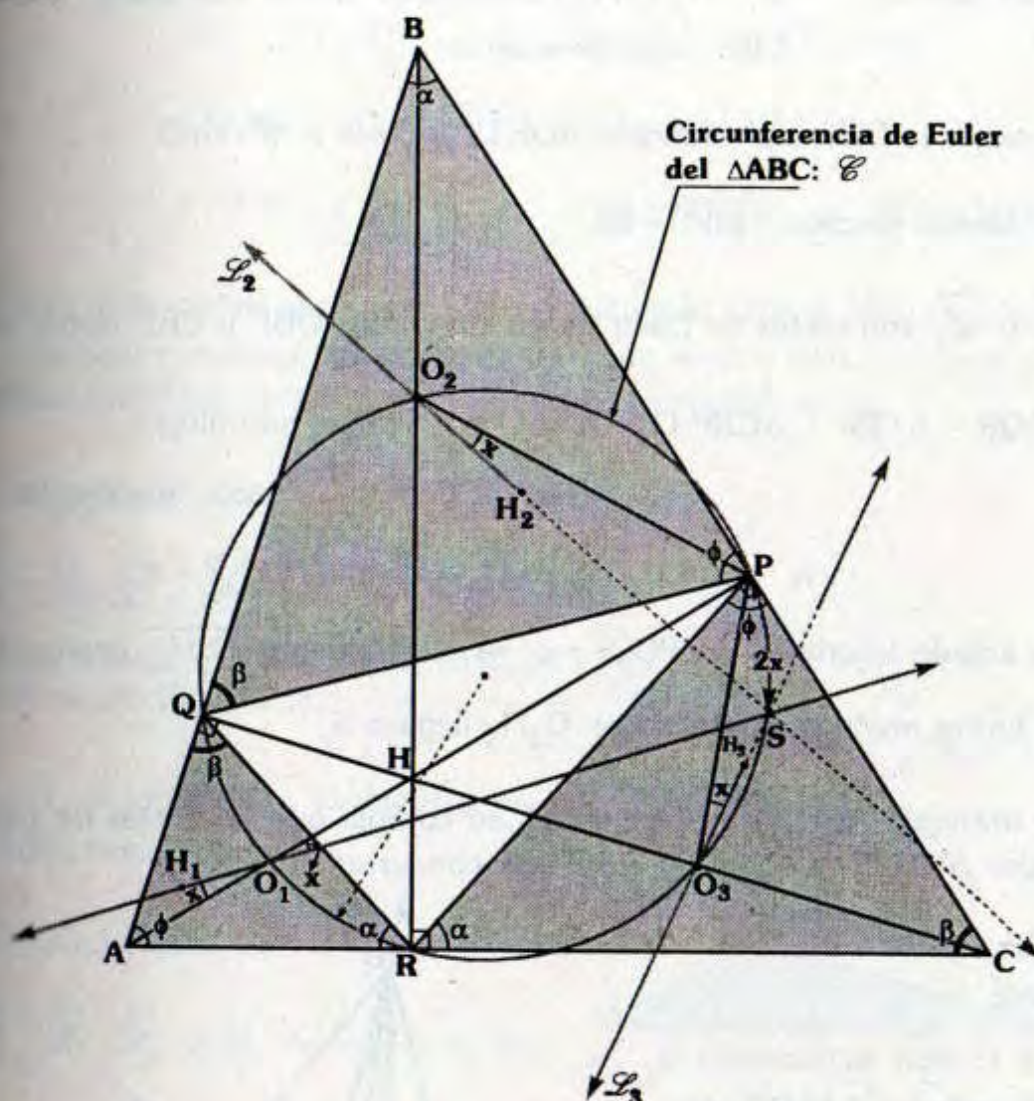
$$\Rightarrow \frac{SC \cdot G_{(M \text{ y } N)}}{SL} = \frac{b}{a+c}$$



- ∴ El centro de gravedad del triángulo ABC (S) es el incentro del triángulo MNL (Punto de Spieker).

DEMOSTRACIONES PENDIENTES

- En el tema sobre recta de Euler se enuncia el siguiente teorema (sin demostración), sea un triángulo ABC y sus alturas \overline{AP} , \overline{BR} y \overline{CQ} se cumple que las rectas de Euler de los triángulos AQR, BQR y CPR son concurrentes en un punto que pertenece a la circunferencia de Euler del $\triangle ABC$.



Del gráfico:

- H es ortocentro del ΔABC , entonces al ser los cuadriláteros AQHR, HQBP y RHPC inscriptibles se cumple:
- Las circunferencias circunscritas a los triángulos AQR, QBP y CRP contienen a H.
- Debido a que \mathcal{E} es la circunferencia de Euler del ΔABC , se cumple:

$$BO_2 = O_2H, \quad AO_1 = O_1H \quad \text{y} \quad CO_3 = O_3H$$

$\Rightarrow O_1$ es circuncentro del ΔAQR .

O_2 es circuncentro del ΔQBP .

O_3 es circuncentro del ΔCRP .

- Sean también: H_1, H_2 y H_3 ortocentros de los triángulos AQR, QBP y CRP respectivamente.
- La recta de Euler del triángulo AQR (\vec{L}_1) corta a \mathcal{C} en S .
- Por ángulo inscrito: $m\widehat{PS} = 2x$
- \vec{L}_2 y \vec{L}_3 son rectas de Euler de los triángulos QBP y CRP respectivamente
- $\Delta AQR \sim \Delta QBP \sim \Delta CRP$: O_1, O_2 y O_3 : Puntos homólogos
 H_1, H_2 y H_3 : Puntos homólogos
 $\Rightarrow m\angle H_1 O_1 A = m\angle H_3 O_3 P = m\angle H_2 O_2 P = x$
- Por ángulo inscrito: $m\angle PO_2 S = x \Rightarrow$ Al prolongar $\overline{O_2 H_2}$ llega a S .
- En forma análoga al prolongar $\overline{O_3 H_3}$ llega a S .

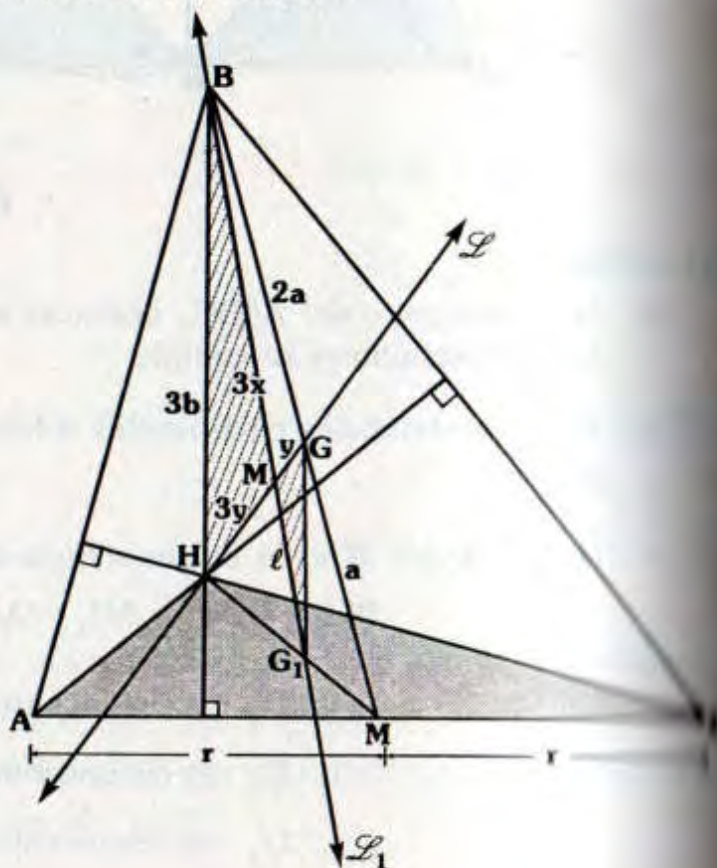
■ En un triángulo ABC de ortocentro H , se cumple que las rectas de Euler de los triángulos AHB, BHC, AHC y ABC son concurrentes.

Demostración :

En el gráfico:

- H y G son ortocentro y baricentro del ΔABC respectivamente.
- G_1 es baricentro del ΔABC y B su ortocentro.
- Se sabe que B es ortocentro del ΔAHC .

$\Rightarrow \vec{L}$ y \vec{L}_1 son rectas de Euler de los triángulos ABC y AHC respectivamente.



- Por teoremas sobre el baricentro:

$$HG_1 = 2(G_1M) \quad \text{y} \quad BG = 2(GM) \Rightarrow \overline{G_1G} \parallel \overline{HB}$$

$$\Delta G_1MG \sim \Delta HMB \Rightarrow HB = 3(G_1G)$$

$$\Delta HMB \sim \Delta GMG_1 \Rightarrow HM = 3(MG) \quad \text{y} \quad BM = 3(MG_1)$$

- Quiere decir que la recta de Euler del triángulo corta a \overline{HG} en la razón de 3 a 1 y en forma análoga las rectas de Euler de AHB y BHC cortarían a \overline{HG} en la misma razón por lo tanto todas serán concurrentes en M .

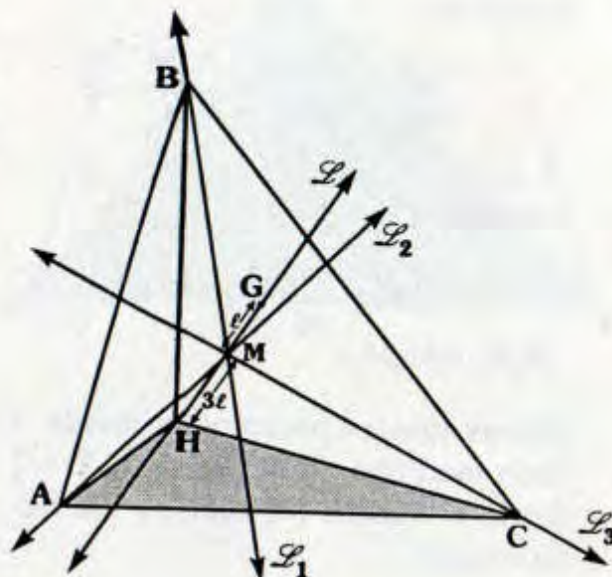
- En el gráfico:

$\vec{\mathcal{L}}, \vec{\mathcal{L}}_1, \vec{\mathcal{L}}_2$ y $\vec{\mathcal{L}}_3$ son rectas de Euler de los triángulos ABC , AHC , BHC y AHB respectivamente.

- H y G ortocentro y baricentro del $\triangle ABC$ respectivamente.

- Se cumple entonces:

$\vec{\mathcal{L}}, \vec{\mathcal{L}}_1, \vec{\mathcal{L}}_2$ y $\vec{\mathcal{L}}_3$ concurren en M .



INDUCCIÓN EN LA GEOMETRÍA

El método de inducción matemática es un método especial de demostración que permite a base de observaciones particulares llegar a deducciones generales.

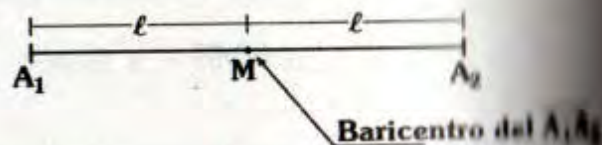
La demostración por el método por inducción consta de dos partes :

- Se comprueba que la proposición es válida para el menor de los valores de " n " para los cuales ella tiene sentido (no necesariamente $n=1$).
 - Se demuestra que si la proposición es válida para un número natural " n ", también es válida para el número siguiente inmediato, es decir $n+1$. (Hipótesis inductiva)
- La demostración del método de inducción no siempre es estricta bajo el esquema, a veces resulta necesario suponer que la proposición es válida para dos números sucesivos $n-1$ y n y demostrar que es válida para $n+1$.

El método de inducción matemática tiene su mayor aplicación en aritmética, Álgebra y la teoría de números pero en particular resaltan su belleza en la geometría, a continuación veremos dos teoremas interesantes que tienen que ver con la inducción.

BARICENTRO DE UN POLÍGONO

- Llamaremos baricentro de un segmento a su punto medio.



- Dado el $\Delta A_1A_2A_3$ sabemos que el baricentro del triángulo es el punto de concurrencia del segmento que une un vértice y los baricentros de los lados opuestos.

Teorema:

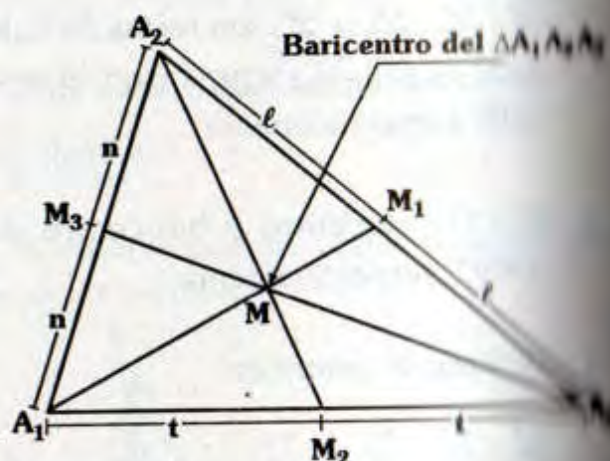
$$\frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_2M}{MM_2} = \frac{A_3M}{MM_3} = 2$$

También:

$$\overline{A_1A_3} \parallel \overline{M_3M_1}, \overline{A_1A_2} \parallel \overline{M_1M_2} \text{ y}$$

$$\overline{A_2A_3} \parallel \overline{M_3M_2}$$

Vemos que el baricentro divide a cada mediana en la razón de 2 a 1 desde el vértice (lo cual ya fue demostrada).



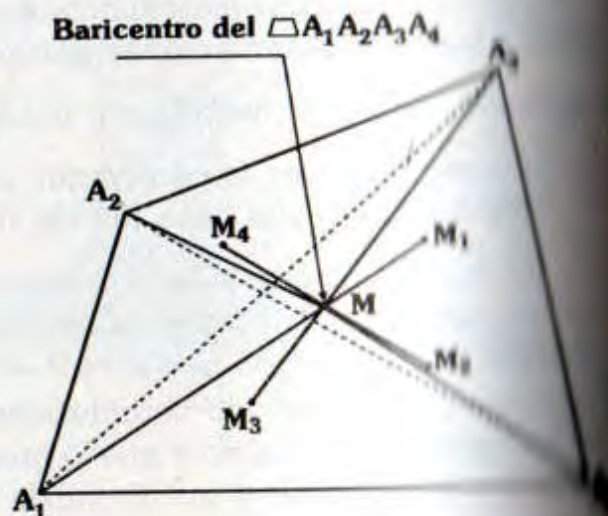
- Ahora vamos a definir el baricentro de un cuadrilátero.

En el gráfico:

M_1, M_2, M_3 y M_4 son baricentros de los $\Delta A_2A_3A_4, \Delta A_1A_3A_4, \Delta A_1A_2A_4$ y $\Delta A_1A_2A_3$ respectivamente.

Llamaremos medianas a :

$\overline{A_1M_1}, \overline{A_2M_2}, \overline{A_3M_3}$ y $\overline{A_4M_4}$ del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$.



Teorema: $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$, $\overline{A_3M_3}$ y $\overline{A_4M_4}$ son concurrentes

$$\frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_2M}{MM_2} = \frac{AM}{MM_3} = \frac{A_4M}{MM_4} = 3$$

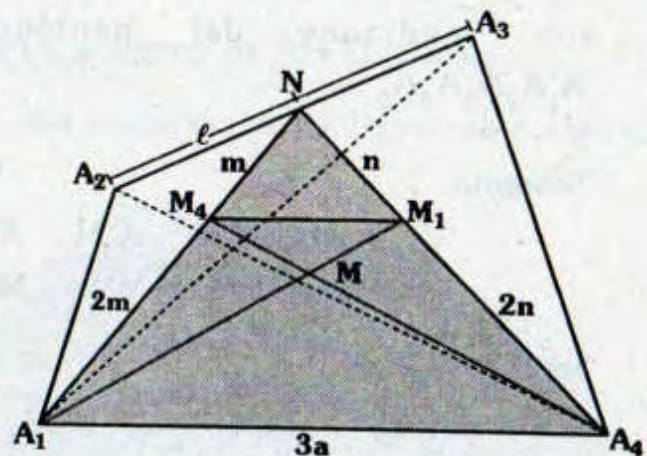
$$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{M_2M_1}, \quad \overline{A_1A_3} \parallel \overline{M_3M_2}, \quad \overline{A_3A_4} \parallel \overline{M_4M_3} \quad \text{y} \quad \overline{A_2A_4} \parallel \overline{M_4M_1}$$

Vamos a demostrar que cada dos medianas se cortan en la misma razón.

Sean M_4 y M_1 baricentros de los triángulos $A_1A_2A_3$ y $A_2A_3A_4 \Rightarrow$ al prolongar $\overline{A_1M_4}$ y $\overline{A_4M_1}$ cortaran a $\overline{A_1A_4}$ en su punto medio (N).

Se sabe: $A_2M_4 = 2(M_4N)$

$$A_4M_1 = 2(M_1N)$$



Por teorema de Tales: $\overline{M_4M_1} \parallel \overline{A_1A_4}$

$$\Delta A_1NA_4 \sim \Delta M_4NM_1$$

$$\Rightarrow A_1A_4 = 3(M_4M_1)$$

$$\Delta M_4M_1M \sim \Delta M_4MA_1$$

$$\Rightarrow \frac{A_1M}{MM_1} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{A_4M}{MM_4} = 3$$

De lo anterior se deduce que cada dos medianas del cuadrilátero se cortan en la razón de 3 a 1 desde el vértice.

- En el pentágono ocurre algo análogo.

En el gráfico :

M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5 son baricentros de $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_2A_4A_5A_1$, $A_3A_5A_1A_2$ y $A_1A_2A_3A_4$ respectivamente.

$\overline{A_1M_1}, \overline{A_2M_2}, \overline{A_3M_3}, \overline{A_4M_4}$ y $\overline{A_5M_5}$ son medianas del pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Teorema:

$$\frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_2M}{MM_2} = \frac{A_3M}{MM_3} = \frac{A_4M}{MM_4} = \frac{A_5M}{MM_5} = 4$$

También:

$$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{M_2M_1}, \overline{A_2A_3} \parallel \overline{M_3M_2}, \overline{A_3A_4} \parallel \overline{M_4M_3}, \overline{A_4A_5} \parallel \overline{M_5M_4} \text{ y } \overline{A_5A_1} \parallel \overline{M_1M_5}$$



- Ahora supongamos que se cumple que el baricentro de un polígono de "n" lados divide a cada mediana en la razón $(n-1)$ a 1.

Las medianas del polígono son aquellos segmentos que unen sus vértices con baricentros de los polígonos de $(n-1)$ lados formados por los $(n-1)$ vértices restantes.

En el gráfico:

$A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$:

Polígono de "n" lados

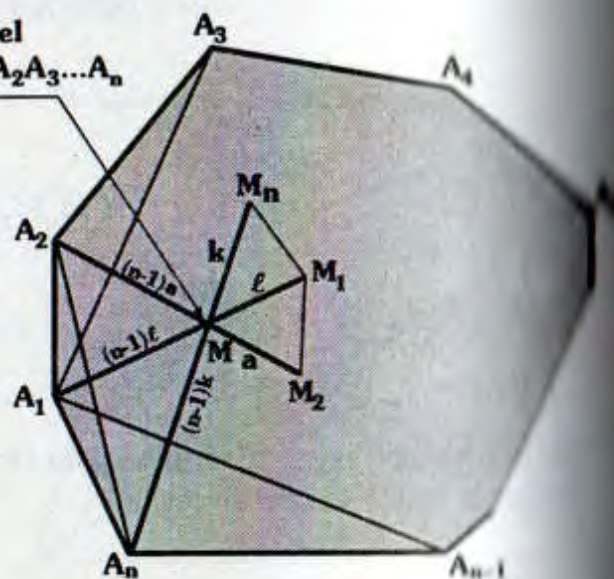
M_1 : Baricentro de $A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$

M_2 : Baricentro de $A_1A_3A_4 \dots A_n$

M_n : Baricentro de $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}$

$\overline{A_1M_1}, \overline{A_2M_2}$ y $\overline{A_nM_n}$ son algunas de las "n" medianas.

Baricentro del polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$



Suponiendo que M divide a cada mediana en la razón $(n-1)$ a 1.

Así tenemos:
$$\frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_2M}{MM_2} = \frac{A_nM}{MM_n} = n$$

Similar para las demás medianas, pero como se ha indicado analizaremos solo dos medianas.

También: $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{M_2M_1}$ y $\overline{A_1A_n} \parallel \overline{M_1M_n}$

Vamos a demostrar que se cumple para un polígono de $(n+1)$ lados.

Será suficiente con demostrar que cada dos medianas del polígono se cortan en la razón de "n" a "1".

En el gráfico:

$A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$:

Polígono de $n+1$ lados

Sea:

M_1 : Baricentro de $A_2A_3A_4 \dots A_nA_{n+1}$

M_{n+1} : Baricentro de $A_1A_2A_3 \dots A_n$

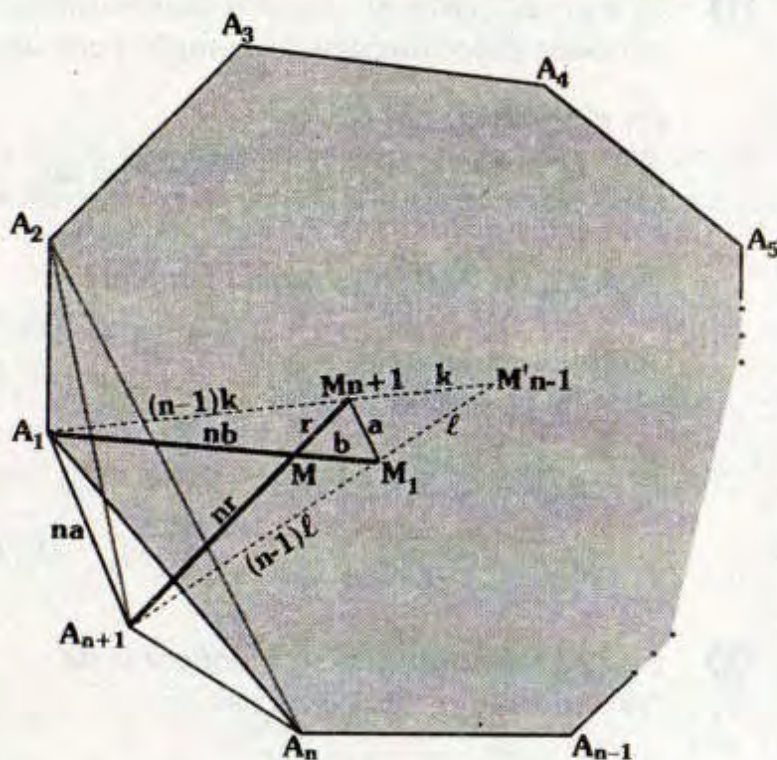
Ya que $A_1A_2A_3 \dots A_n$ y $A_2A_3A_4 \dots A_nA_{n+1}$ son polígonos de "n" lados, lo cual es nuestra suposición.

Considerando:

M_{n-1} : Es el baricentro del polígono de "n-1" lados: $A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$

Las medianas de $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ y $A_2A_3A_4 \dots A_nA_{n+1}$ trazadas de A_1 y A_{n+1} tienen como extremo: M'_{n-1}

Se tendrá:
$$\frac{A_1M_{n+1}}{M_{n+1}M'_{n-1}} = \frac{A_{n+1}M_1}{M_1M'_{n-1}} = n-1$$



Por teorema de Tales se tendrá: $\overline{A_1 A_{n+1}} // \overline{M_{n+1} M_1}$

$$\Delta A_1 M'_{n-1} A_{n+1} \sim \Delta M_{n+1} M'_{n-1} M_1 \Rightarrow \frac{A_{n+1} A_1}{M M_{n+1}} = n$$

$$\Delta M_1 M M_{n+1} \sim \Delta A_1 M A_{n+1} \Rightarrow \frac{A_1 M}{M M_1} = \frac{A_{n+1} M}{M M_{n+1}} = n$$

Con lo cual estamos demostradas que cada dos medianas del polígono $A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1}$ se cortan en la razón de "n" a 1.

- ① Si bien es cierto en nuestra demostración hemos considerado un polígono convexo pero también se cumple para un polígono no convexo.

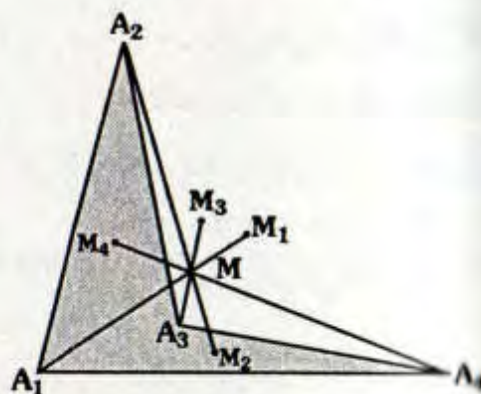
En el gráfico:

M_1, M_2, M_3 y M_4 son baricentros de los triángulos: $A_2 A_3 A_4, A_1 A_3 A_4, A_1 A_2 A_4$ y $A_1 A_2 A_3$ respectivamente.

También se cumple:

$$\bullet \frac{A_1 M}{M M_1} = \frac{A_2 M}{M M_2} = \frac{A_3 M}{M M_3} = \frac{A_4 M}{M M_4} = 3$$

$$\bullet \overline{A_1 A_2} // \overline{M_2 M_1}, \overline{A_3 A_4} // \overline{M_4 M_3}, \overline{A_2 A_3} // \overline{M_2 M_3} \text{ y } \overline{A_1 A_4} // \overline{M_4 M_1}$$



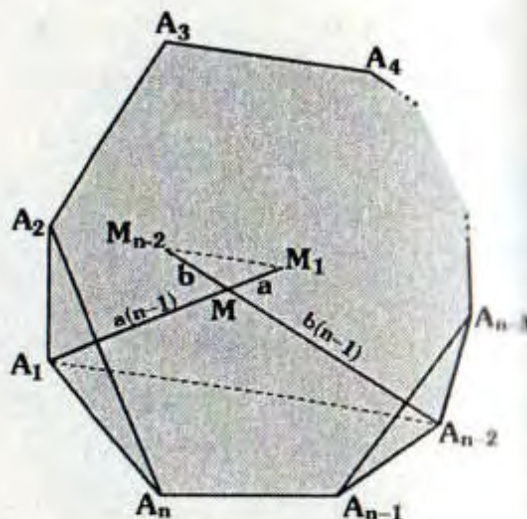
- ② En el gráfico se tiene un polígono de "n" lados cuyo baricentro es M.

Si ubicamos dos vértices cualesquiera.

Por ejemplo:

A_1 y A_{n-2} y sean $\overline{A_1 M_1}$ y $\overline{A_{n-2} M_{n-2}}$ las medianas trazadas desde dichos puntos se cumple:

$$\overline{A_1 A_{n-2}} // \overline{M_{n-2} M_1}$$



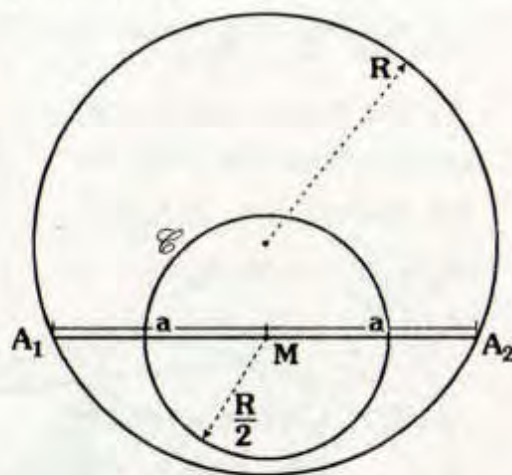
CIRCUNFERENCIA DE EULER PARA POLÍGONOS INSCRITOS

En forma análoga al análisis anterior, definamos así: primero para una cuerda, el triángulo y el cuadrilátero, y luego el caso de un polígono de "n" lados.

- Dada una circunferencia de radio R se denomina circunferencia de Euler de una cuerda a la circunferencia cuyo centro es el punto medio de la cuerda y su radio $R/2$.

En el gráfico: $A_1M = MA_2$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ es la circunferencia de Euler de $\overline{A_1A_2}$.

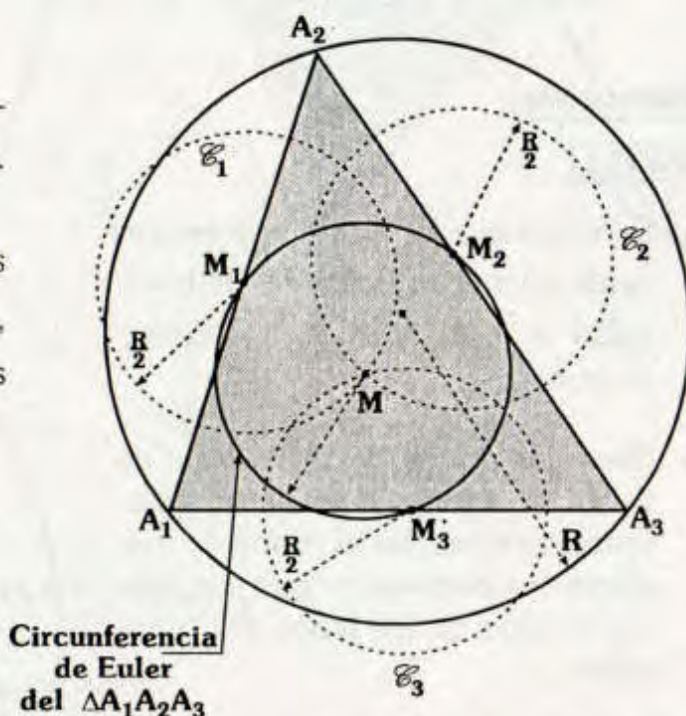


- Sea el triángulo $A_1A_2A_3$ inscrito en la circunferencia de radio R , las tres circunferencias de radio $R/2$ y pasa por los centros de las circunferencias de Euler de las tres cuerdas.

Circunferencia se denomina circunferencia de Euler del triángulo $A_1A_2A_3$.

En el gráfico \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 son las circunferencias de Euler de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ y $\overline{A_3A_1}$ respectivamente las cuales son concurrentes en M .

En el capítulo sobre circunferencia de Euler (para el triángulo) ya hemos analizado sus propiedades, así como sus demostraciones.



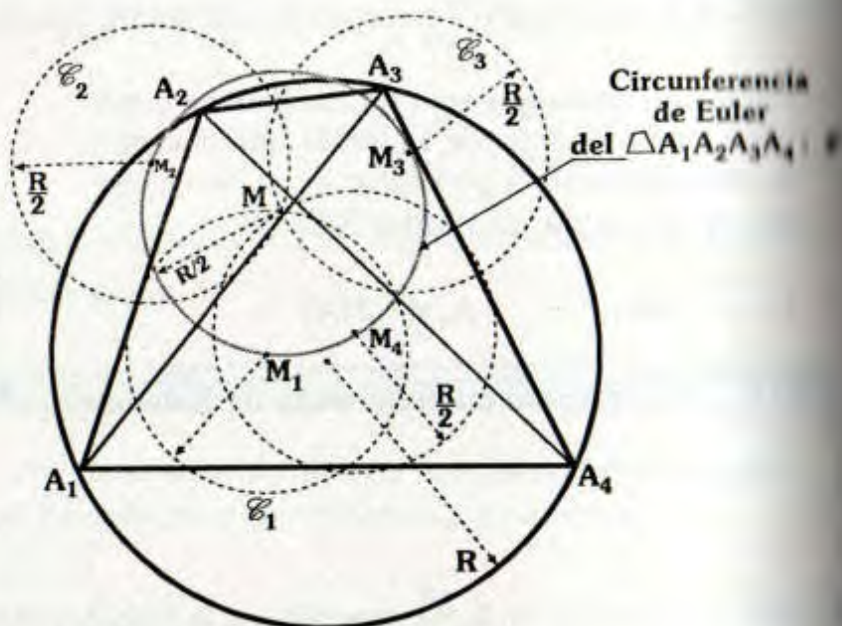
- Dado el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ inscrito en una circunferencia de radio R , las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ son concurrentes en un punto el cual es centro de una circunferencia de radio $R/2$ y pasa por los centros de las circunferencias de Euler de los cuatro triángulos mencionados a la circunferencia.

A dicha circunferencia se le denomina circunferencia de Euler del $\triangle A_1 A_2 A_3 A_4$.

En el gráfico:

M_1, M_2, M_3 y M_4 centros de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 las cuales son las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1 A_2 A_3, A_2 A_3 A_4, A_3 A_4 A_1$ y $A_4 A_1 A_2$ respectivamente.

\mathcal{C} : Circunferencia de Euler del $\triangle A_1 A_2 A_3 A_4$.

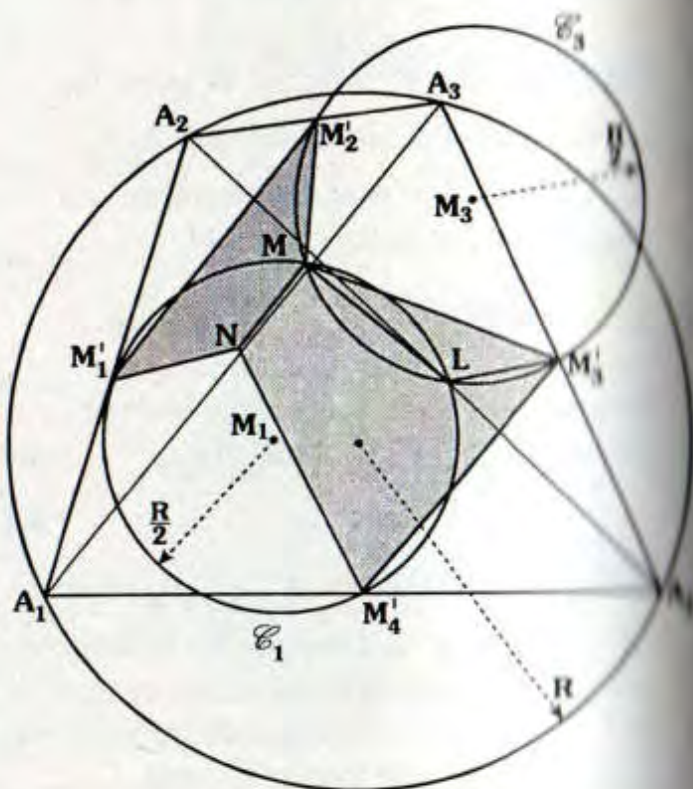


Notar : M_1, M_2, M_3 y $M_4 \in \mathcal{C}$

Demostración:

Paso 1

- En el gráfico \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1 A_2 A_4$ y $A_3 A_4 A_2$ respectivamente.
- Recordar que la circunferencia de Euler del triángulo es la circunferencia circunscrita al triángulo mediano (es decir pasa por los puntos medios de los lados del triángulo).
- Consideremos: M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 , N y L son puntos medios de $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_3 A_4}$, $\overline{A_1 A_4}$, $\overline{A_1 A_3}$ y $\overline{A_2 A_4}$ respectivamente.



Debido a que "L" es punto medio de $\overline{A_2A_4}$, entonces "L" pertenece a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , M es el otro punto de intersección.

Se va a demostrar que los cuadriláteros $M_1'M_2'MN$ y $M_3'M_4'MN$ son inscriptibles, con ello se demostrará la concurrencia de las cuatro circunferencias de Euler en M.

Prueba

Notar:

$A_1M_1'NM_3'$, $A_4M_4'M_1'L$ y $M_2'M_3'A_4$ son paralelogramos

$$\Rightarrow m\angle M_4'M_1'L = x \quad y$$

$$m\angle M_3'M_2'L = y$$

$$\text{En } A_4: \quad x + y = \phi$$

En \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_3 por ángulo inscrito:

$$m\angle M_4'ML = x \quad y$$

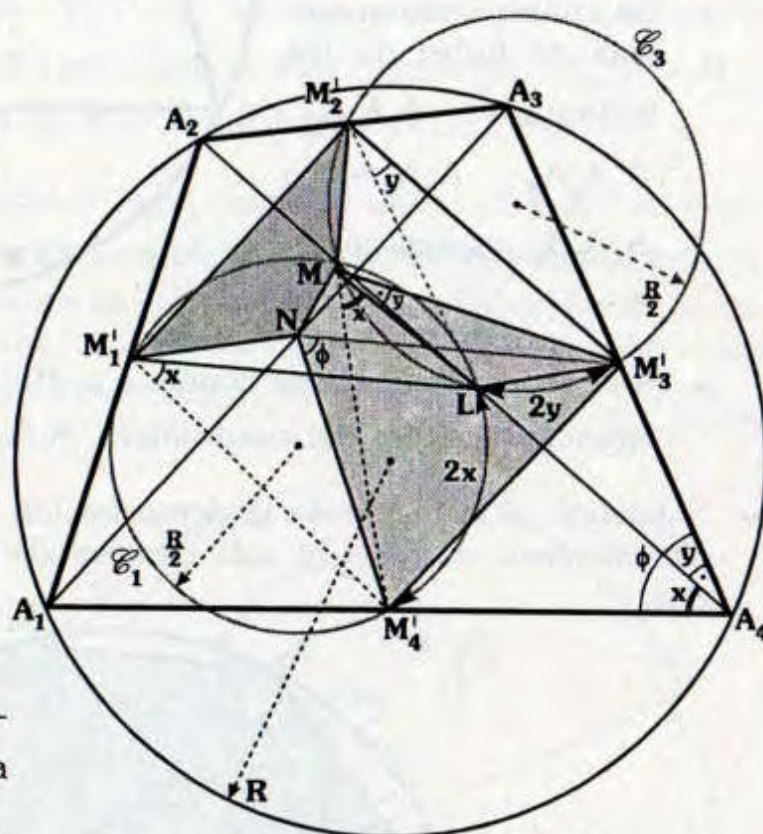
$$m\angle LMM_3' = y$$

$$\Rightarrow m\angle M_4'MM_3' = x + y = \phi$$

Luego el $\triangle M_4'NMM_3'$ es inscriptible, es decir la circunferencia circunscrita al triángulo $M_4'NL$ contiene a M.

En forma análoga se demuestra: $m\angle M_1'NM_2' = m\angle M_2'MM_1'$

Es decir el cuadrilátero $M_1'NMM_2'$ es inscriptible.



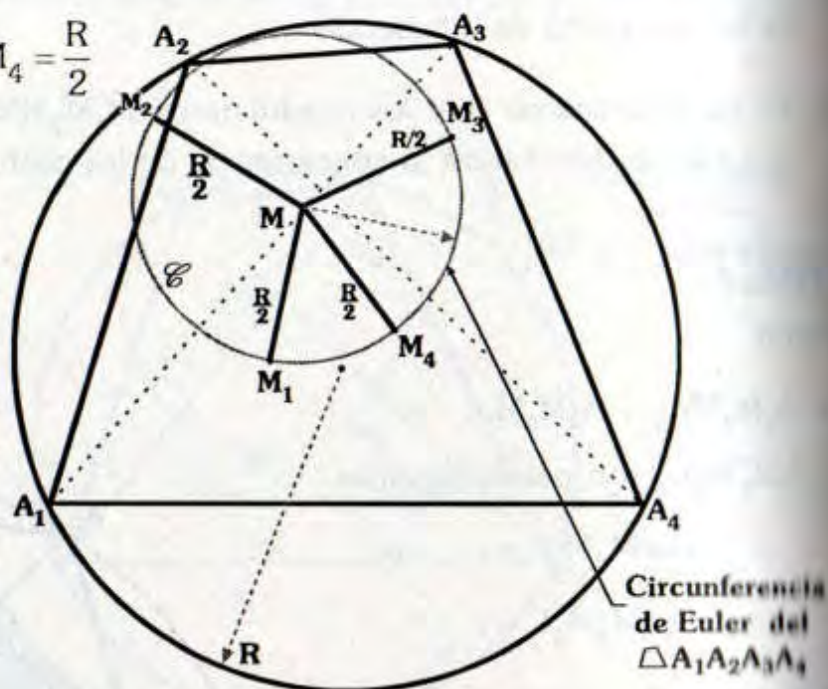
Conclusión

Ya con la demostración anterior se ha demostrado que las cuatro circunferencias de Euler son concurrentes en M.

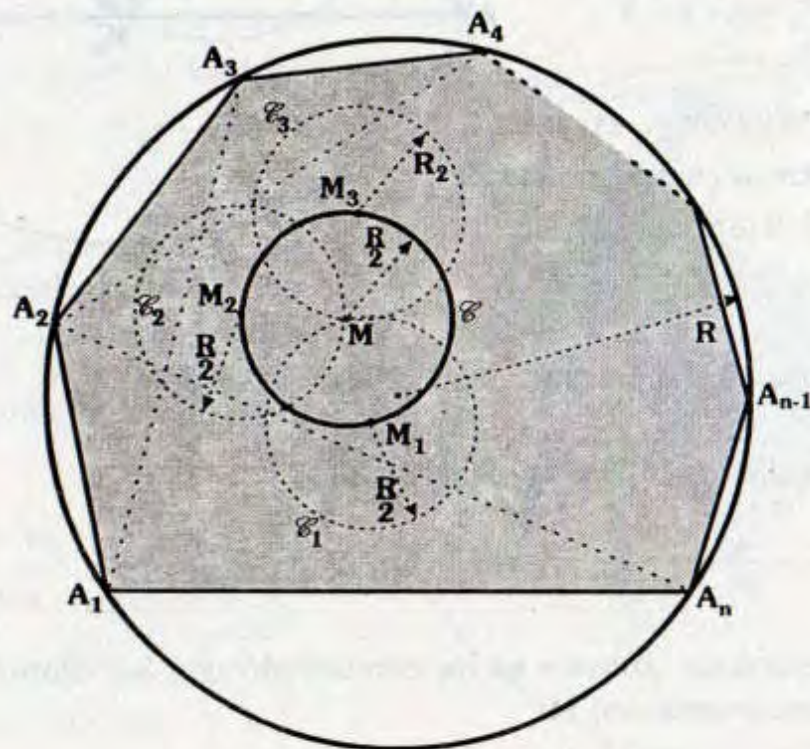
- Luego se puede observar:

$$MM_1 = MM_2 = MM_3 = MM_4 = \frac{R}{2}$$

- Con lo cual se demuestra que M es centro de una circunferencia que pasa por los centros M_1 , M_2 , M_3 y M_4 de las cuatro circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ respectivamente.



- A la circunferencia que contiene a M_1, M_2, M_3 y M_4 se le llama circunferencia de Euler del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. (\mathcal{C})
- Siguiendo el esquema de la demostración por inducción, supongamos que la circunferencia de Euler ha sido demostrada para un polígono inscrito de "n" lados.



Del gráfico:

\mathcal{C}_1 : Es la circunferencia de Euler de $A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$.

\mathcal{C}_2 : Es la circunferencia de Euler de $A_3A_4A_5 \dots A_{n-1}A_1$.

\mathcal{C}_3 : Es la circunferencia de Euler de $A_4A_5 \dots A_nA_1A_2$.

y así sucesivamente para las demás circunferencias (hasta \mathcal{C}_n).

M_1, M_2, M_3 son centros de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ respectivamente.

Estamos suponiendo que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$ son concurrentes en M entonces M es centro de una circunferencia (\mathcal{C}) que contiene a los centros ($M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$). A \mathcal{C} se denomina circunferencia de Euler del polígono $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Ahora en el gráfico anterior en el arco A_1A_n vamos a ubicar un punto tal como A_{n+1} y vamos a demostrar que las circunferencia de Euler de los polígonos de "n" lados considerados con concurrentes en un punto el cual será centro de la circunferencia de radio $R/2$ y contiene a los demás centros. A dicha circunferencia se le denominará circunferencia de Euler para el polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_nA_{n+1}$.

Bastará con demostrar que se cortan en un mismo punto tres circunferencia (cualquiera) de Euler de los polígonos de "n" lados.

Por ejemplo:

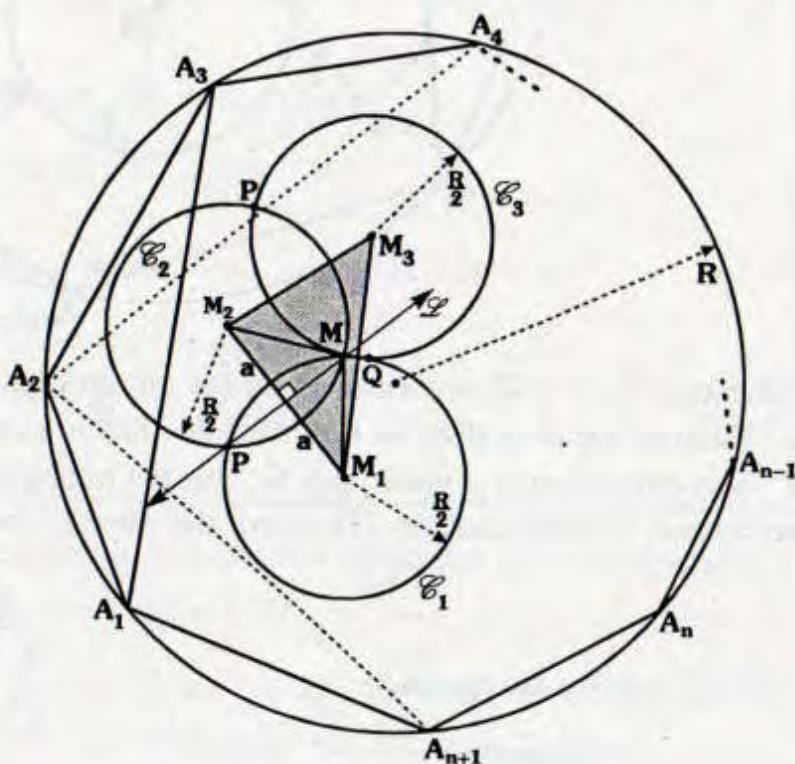
$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3

\mathcal{C}_1 : Circunferencia de Euler de $A_2A_3A_4 \dots A_nA_{n+1}$

\mathcal{C}_2 : Circunferencia de Euler de $A_3A_4A_5 \dots A_nA_{n+1}A_1$

\mathcal{C}_3 : Circunferencia de Euler de $A_4A_5 \dots A_{n+1}A_1A_2$

Notar que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 son congruentes y de radio $R/2$.

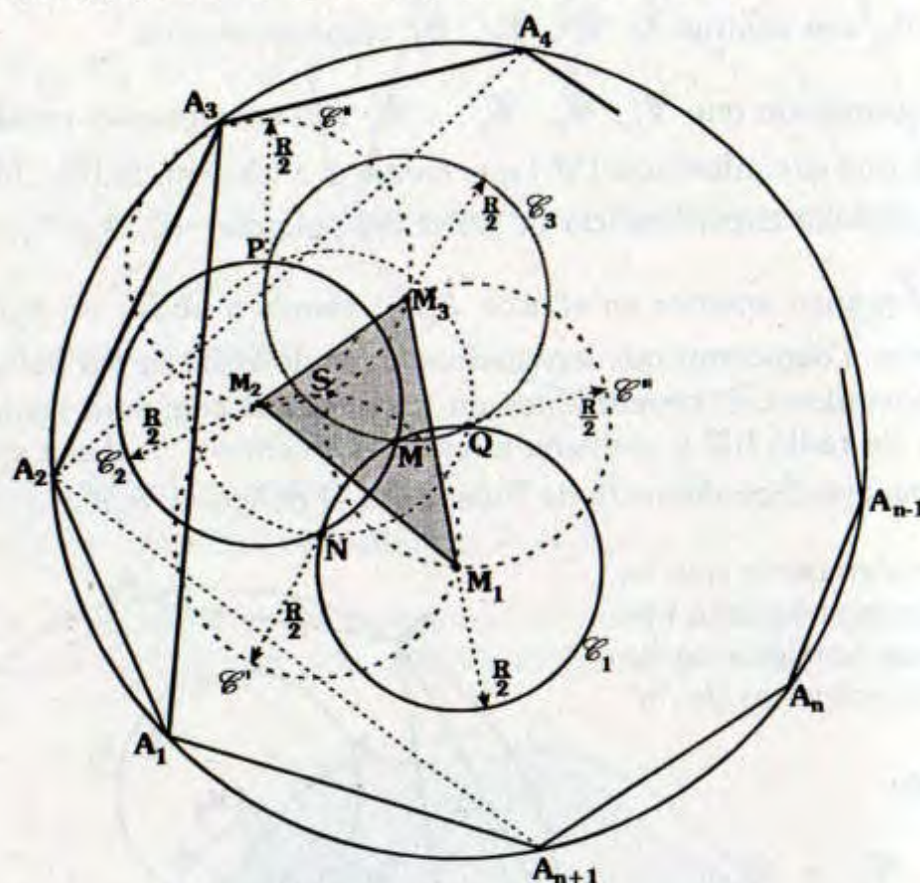


Vamos a demostrar que M es circuncentro del $\Delta M_1 M_2 M_3$.

Se observa \vec{L} es mediatriz de $M_1 M_2$ ($M_1 N M_2 M$ es rombo)

De la suposición:

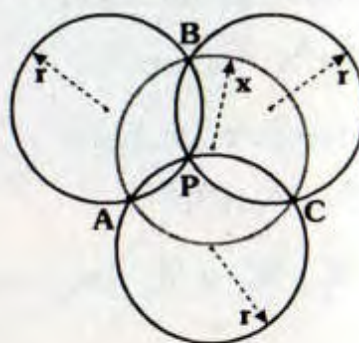
La circunferencia de Euler del polígono inscrito de " n " lados contiene a los centros de las circunferencias de Euler del polígono de $n-1$ lados y estos a su vez contienen a los centros de los polígonos de $n-2$ lados y así sucesivamente.



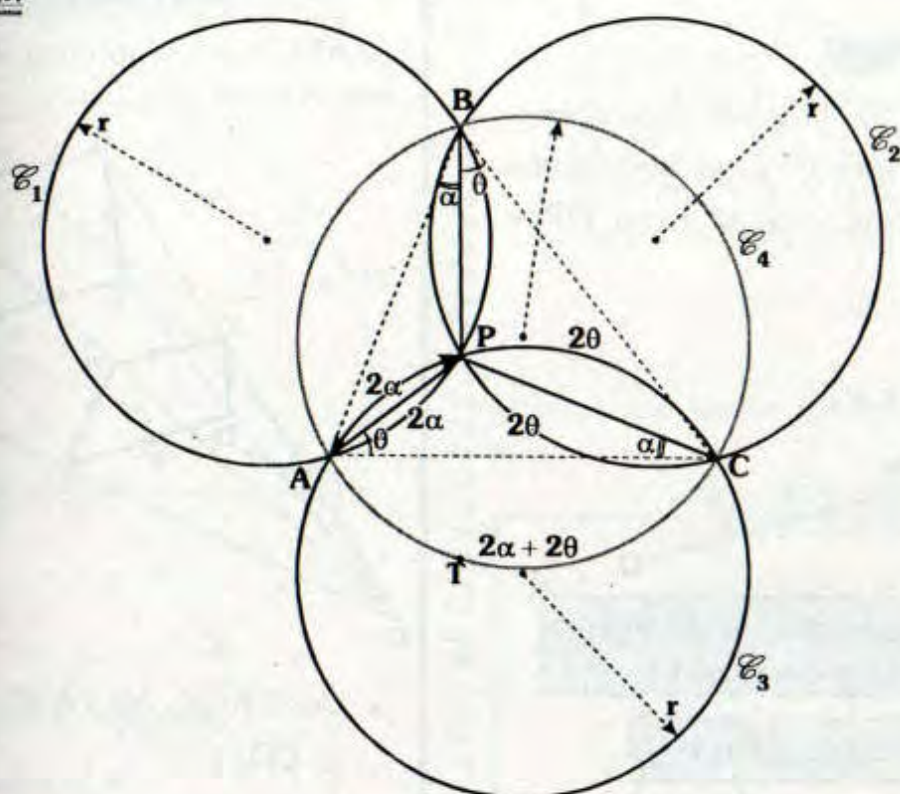
Notar que N , P y Q son centros de las circunferencias de Euler de los polígonos de $n-1$ lados, en el gráfico se han trazado dichas circunferencias tales como \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' y \mathcal{C}''' son congruentes y pasan por S , nuestro problema se reduce a un teorema, el cual mostramos a continuación (Teorema del círculo medio).

En el gráfico se cumple:

$$x = r$$



Demostración:



- Se tiene $C_1 \equiv C_2 \equiv C_3$
- Para C_1 y C_3 los arcos comunes \widehat{AP} miden 2α .
 C_2 y C_3 los arcos comunes \widehat{PC} miden 2θ .
- Por ángulo inscrito: $m\angle ABC = \alpha + \theta \Rightarrow m\angle ATC = 2\alpha + 2\theta$
- Debido a que: $m\angle ATC = m\angle APC = 2\alpha + 2\theta$
 $\Rightarrow C_4 \equiv C_3$
 $\therefore x=r$

En nuestro gráfico en virtud del teorema ya demostrado se tendrá que la circunferencia circunscrita al triángulo $M_1M_2M_3$ tiene radio $R/2$.

Además se observa: $MM_2 = MM_1 = \frac{R}{2} \Rightarrow M$ es circuncentro del $M_1M_2M_3$ con lo cual queda demostrado que cada tres circunferencias de Euler del polígono de "n" lados pasan por M, el cual será el centro de una circunferencia de radio $R/2$ y que pasa por $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, dicha circunferencia es la circunferencia de Euler del polígono inscrito de $n+1$ lados.

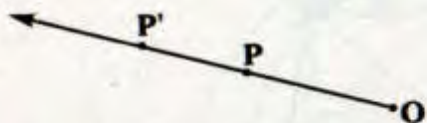
HOMOTECIA

HOMOTECIA DE UN PUNTO

Dado un punto fijo O y una razón constante k se dice que P' es el homotético de P , si P' pertenece al rayo OP y

$$\frac{OP'}{OP} = k.$$

Si $\frac{OP'}{OP} = k \quad (k \in \mathbb{R})$



\Rightarrow **P' es el homotético de P , respecto de O y de razón k**

Notación:

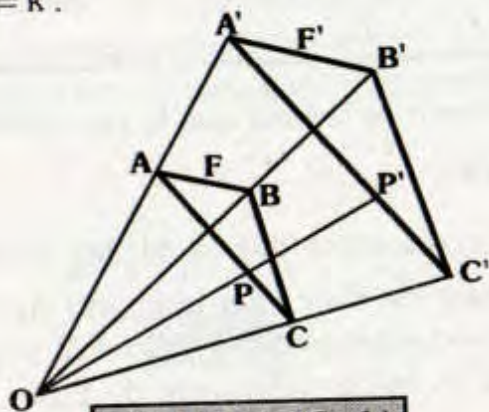
$P' = \text{Hom. } P(O; k)$

HOMOTECIA DE UNA FIGURA

Dado un punto fijo O y una razón constante k se dice que la figura F' es homotética de F , si para todo punto P' de F' le corresponde un punto P de F , tal que P' es homotético de P respecto de O .

Si $\forall P' \in F' \exists P \in F$, tal que $P' \in \overrightarrow{OP}$ y

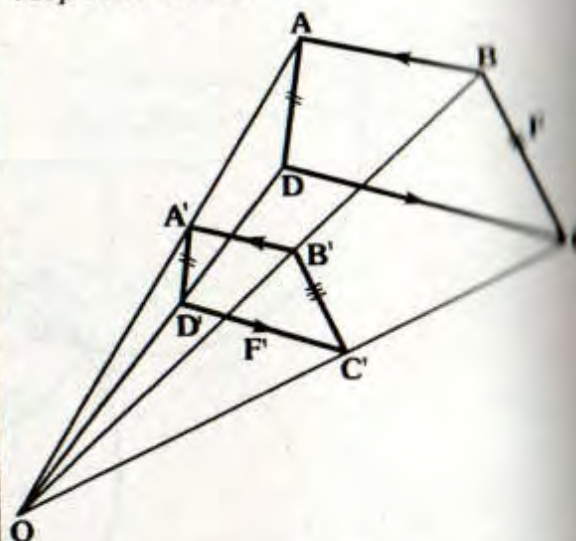
$$\frac{OP'}{OP} = k.$$



\Rightarrow **$F' = \text{Hom. } F(O; k)$**

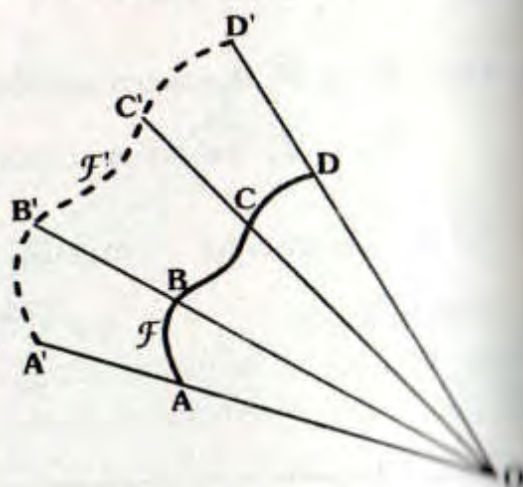
Observación

Si $ABCD$ es homotético de $A'B'C'D'$, respecto de O .



- $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$

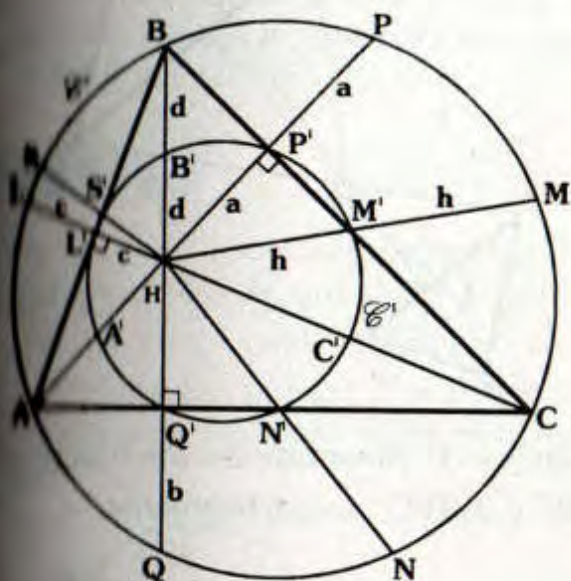
- $\triangle ABCD \sim \triangle A'B'C'D'$



Si A' , B' , C' y D' son puntos homotéticos de A , B , C y D respectivamente, con respecto a O .

Si seguimos ubicando los homotéticos de todos los puntos de F , notaremos que dichos puntos describen una curva F' es semejante a F .

CONSTRUCCIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS



• H: Ortocentro de $\triangle ABC$.

• Por el teorema 8.5:

$$HP' = PP' = a, \quad HQ' = QQ' = b \quad y$$

$$HL' = LL' = c$$

• Por dato:

$$HA' = AA' = c, \quad HB' = BB' = d \quad y$$

$$HC' = CC' = f$$

• Como M' , N' y S' son puntos medios (de la observación posterior)

$$HM' = M'M = h$$

$$HN' = N'N = i$$

$$HS' = S'S = g$$

• Se observa:

$$\frac{AH}{A'H} = \frac{BH}{B'H} = \frac{CH}{C'H} = \frac{PH}{P'H} = \frac{QH}{Q'H} =$$

$$\frac{LH}{L'H} = \frac{NH}{N'H} = \frac{SH}{S'H} = 2$$

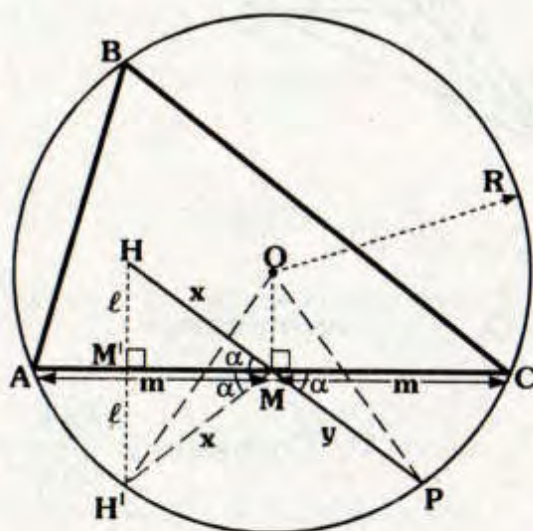
$\Rightarrow A', B', C', P', Q', L', M', N'$ y S' son homotéticos de A, B, C, P, Q, L, M, N y S respectivamente, con respecto a H , entonces $A', B', C', P', Q', L', M', N'$ y S' describen o pertenecen a la circunferencia \mathcal{C}_1 , cuya razón de homotecia 2.

$$\therefore \mathcal{C}' = \text{Hom } \mathcal{C} (H; 2)$$

Además la relación de radios de \mathcal{C} y \mathcal{C}' es 2.

Observación

Sea H : Ortocentro y $AM = MC$



$$\Rightarrow x = y$$

• Por teorema:

$$HM' = M'H' = \ell \Rightarrow H'M = x \quad y$$

$$m\angle HMM' = m\angle M'MH' = m\angle CMP = \alpha$$

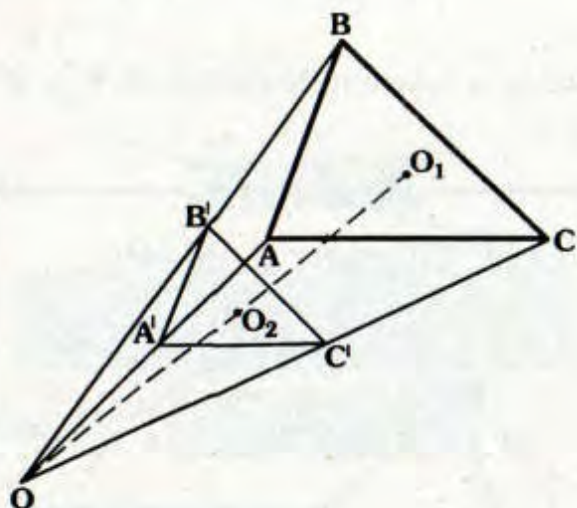
• $\triangle OMH' \cong \triangle OPM$

$$\therefore x = y$$

CONCLUSIONES IMPORTANTES

• Si $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = k$

\Rightarrow El $\triangle ABC$ es homotético del $\triangle A'B'C'$.



$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Sean O_1 y O_2 circuncentros

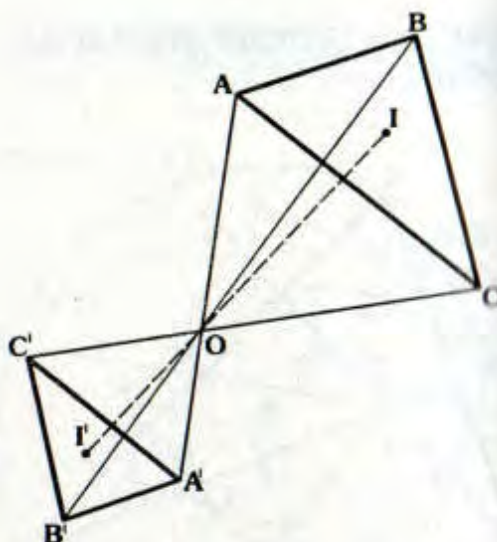
$\Rightarrow O_1, O_2$ y O : Colineales y $\frac{OO_1}{OO_2} = k$

Del mismo modo podemos trabajar con los demás puntos notables.

También:

• Si $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = r$

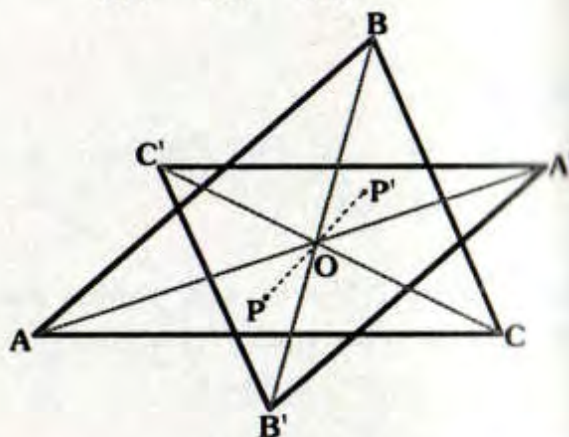
\Rightarrow El $\triangle A'B'C'$ es homotético del $\triangle ABC$.



Sean I e I' incentros de los triángulos ABC y $A'B'C'$ respectivamente.

$\Rightarrow I, O$ y I' : Colineales y $\frac{OI'}{OI} = r$

• Si $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$



\Rightarrow El $\triangle A'B'C'$ es homotético del $\triangle ABC$, respecto de O .

Sean P y P' puntos notables de una misma característica de los triángulos ABC y $A'B'C'$, respectivamente.

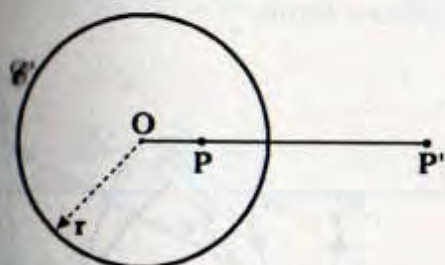
$\Rightarrow P, O$ y P' son colineales y $\frac{OP'}{OP} = k$

INVERSIÓN

Es una transformación geométrica anamórfica (es decir cambia la forma de la figura original), la inversión fue creada por Steiner (1796 - 1863).

PUNTOS INVERSOS

Sean P y P' son colineales con O , el cual es centro de una circunferencia de radio r , tal que $(OP)(OP') = r^2$, cada uno de los puntos P y P' es inverso del otro respecto de la circunferencia.



En el gráfico:

$$(OP)(OP') = r^2$$

O : Centro de inversión

\mathcal{C} : Circunferencia de inversión

P y P' son inversos

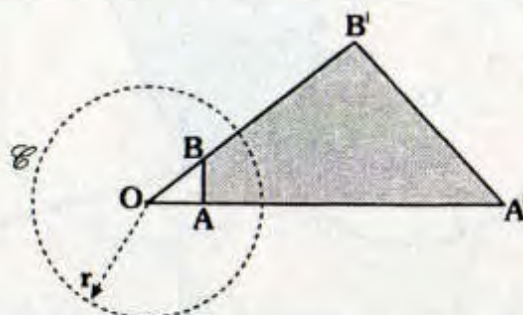
Observación

1. Si un punto está en la circunferencia de inversión en su propio inverso.
2. Si un punto está en la región interior su inverso está en la parte externa.

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE INVERSIÓN

- Dos puntos y sus respectivos inversos respecto a un centro de inversión son vértices de un cuadrilátero inscriptible.

Demostración:



- Sea O y \mathcal{C} centro y la circunferencia de inversión.

- A y A' : Puntos inversos respecto de \mathcal{C} .

$$\Rightarrow (OA)(OA') = r^2$$

- B y B' : Puntos inversos respecto de \mathcal{C} .

$$\Rightarrow (OB)(OB') = r^2$$

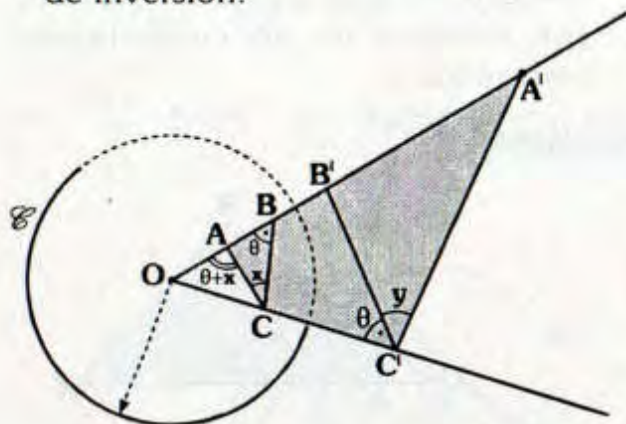
- Luego $(OA)(OA') = (OB)(OB')$
- Por recíproco del teorema de la secante el $\triangle AA'B'B$ es inscriptible.

- Sean A y B dos puntos colineales con el centro de la circunferencia de inversión y sea C un punto que no está en AB y sean A' , B' y C' sus inversos, se cumple:

$$m\angle ACB = m\angle A'C'B'$$

Demostración:

- Sea O y \mathcal{C} : Centro y circunferencia de inversión.



- A' , B' y C' puntos inversos de A , B y C respectivamente.
- Por el teorema anterior :

$\triangle CBB'C'$ y $\triangle CAA'C'$ son inscriptibles.

$$\Rightarrow m\angle OBC = m\angle OC'B = \theta$$

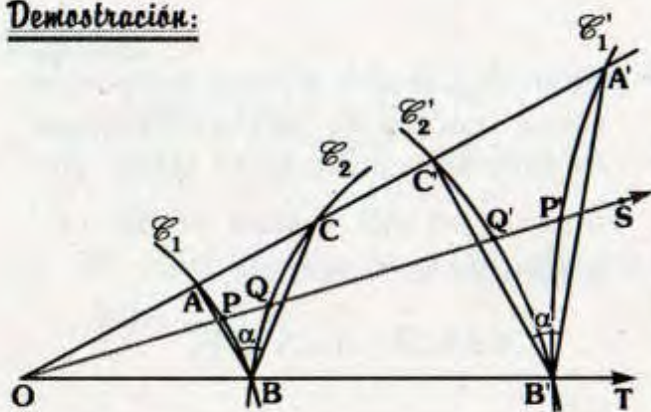
$$m\angle OAC = m\angle OC'A'$$

$$\Rightarrow \theta + x = \theta + y$$

$$\therefore x = y$$

- Si dos curvas se intersecan en un punto distinto del centro de inversión, la medida del ángulo en ese punto es el mismo que el de sus inversos.

Demostración:



- Sea O el centro de inversión.
- A' , B' y C' son inversos de A , B y C respectivamente.

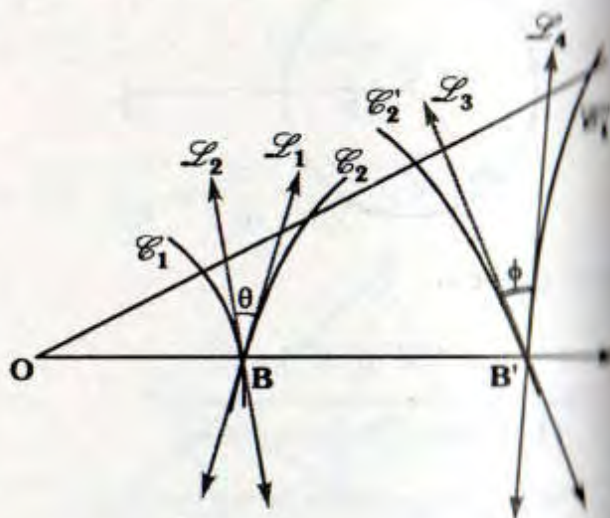
- Por el teorema anterior:

$$m\angle ABC = m\angle A'B'C'$$

- Si nos aproximamos a \vec{OT} y trazamos \vec{OS} (P' y Q' son inversos de P y Q).

$$\Rightarrow m\angle PBQ = m\angle P'B'Q'$$

- En el caso límite:



- \mathcal{C}_1' y \mathcal{C}_2' son curvas inversas de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 respectivamente.

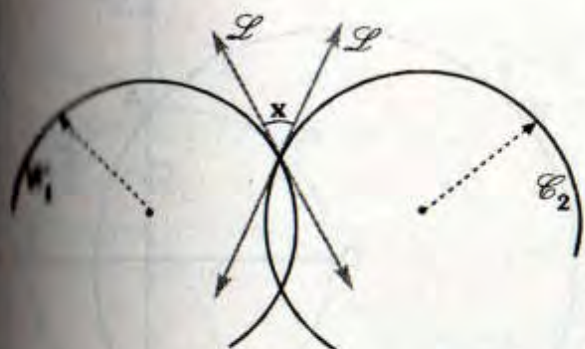
θ : medida de ángulo entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2

ϕ : medida de ángulo entre \mathcal{C}_1' y \mathcal{C}_2'

- Se cumple:

$$\theta = \phi$$

Observación



L_1 y L_2 son tangentes a C_1 y C_2

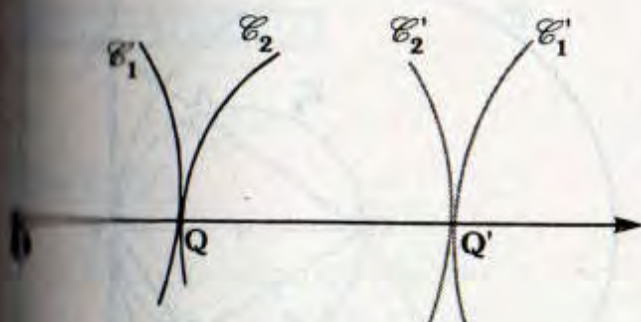
x medida del ángulo entre C_1 y C_2

iii) $x = 90^\circ$

$\Rightarrow C_1$ y C_2 son ortogonales

COROLARIO

Si dos curvas son tangentes sus inversas también lo son :



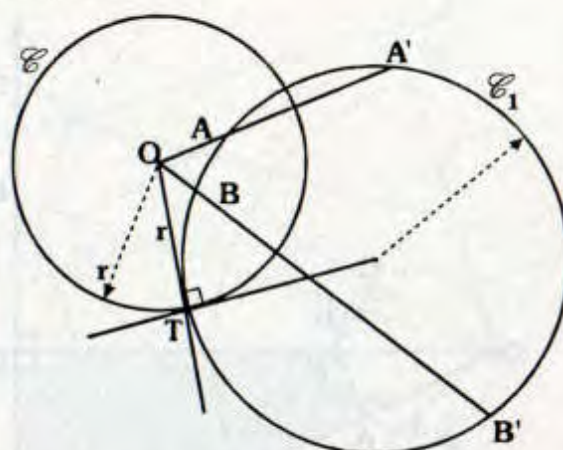
C_1' y C_2' son inversas de C_1 y C_2 respecto al centro de inversión O.

iii) C_1' y C_2' son tangentes en Q .

$\Rightarrow C_1'$ y C_2' son también tangente en Q' (Q' y Q son inversas)

➤ Toda circunferencia que pasa por dos puntos inversos es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión.

DEMOSTRACIÓN



- Sea A y A' inversos respecto de la circunferencia de inversión C y centro O.

$$\Rightarrow (OA)(OA') = r^2$$

- Por teorema de la tangente: \overline{OT} es tangente a C_1 .

$$\Rightarrow C \text{ y } C_1 \text{ son ortogonales}$$

- También $(OB)(OB') = r^2 \Rightarrow B$ y B' son inversos.

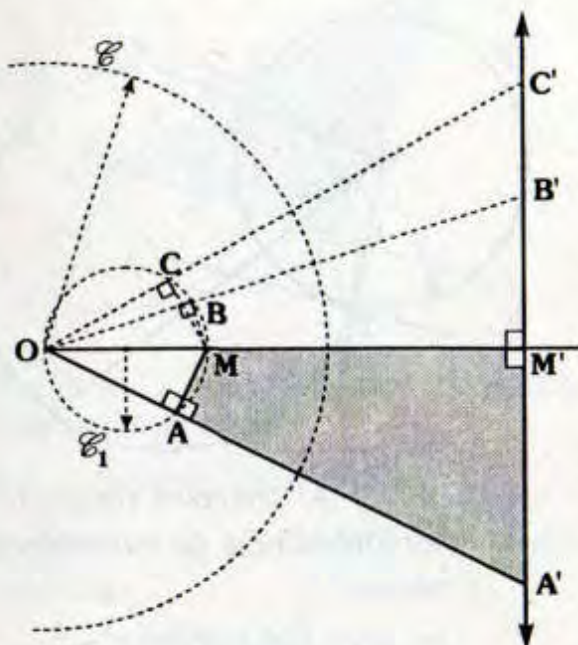
Importante:

Dada una circunferencia entonces las siguientes figuras son sus propias inversas:

- La circunferencia de inversión.
- Las rectas que pasan por el centro de inversión.
- Las circunferencias ortogonales a la circunferencia de inversión.

INVERSIÓN DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

- El inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el centro de inversión y recíprocamente.



Sea \mathcal{C} y O la circunferencia y centro de inversión.

Se traza $\overline{OM'} \perp$ a \mathcal{L}_1

Se ubica M inverso de M'

Sean A, B y C inversos de A', B' y C' sus respectivos inversos.

$$\Rightarrow \triangle A'AMM', \triangle M'MBB' \text{ y } \triangle M'MCC'$$

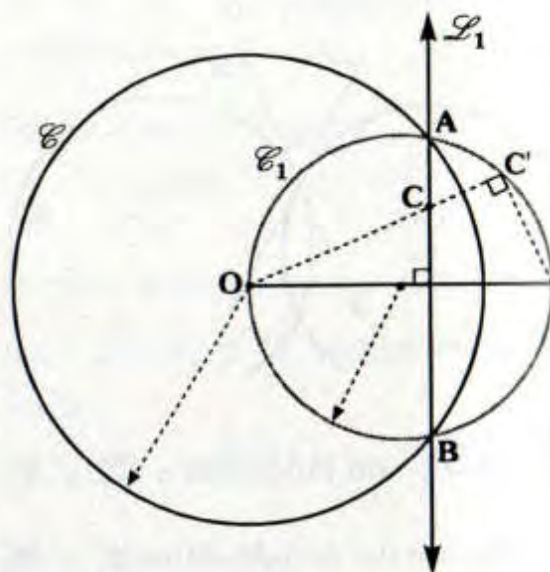
Son inscriptibles:

$$\Rightarrow m\angle OAM = m\angle MBO = m\angle MCO = 90^\circ$$

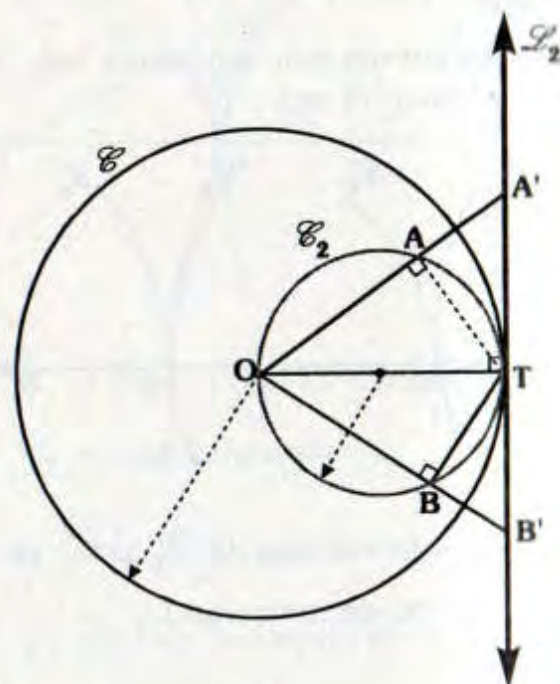
Finalmente O, A, M, B y C son concíclicos

Luego \mathcal{C}_1 es inverso de \mathcal{L}_1 para la demostración del recíproco es análogo.

Observación



\mathcal{L}_1 es inverso de \mathcal{C}_1 y recíprocamente respecto de la circunferencia de inversión \mathcal{C} .



\mathcal{L}_2 y \mathcal{C}_2 son inversos respecto de la circunferencia de inversión \mathcal{C} .

- El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que no pasa por ese punto.

Sean O y \mathcal{C}_1 centro y circunferencia de inversión P' y Q' son inversos de P y Q respectivamente.

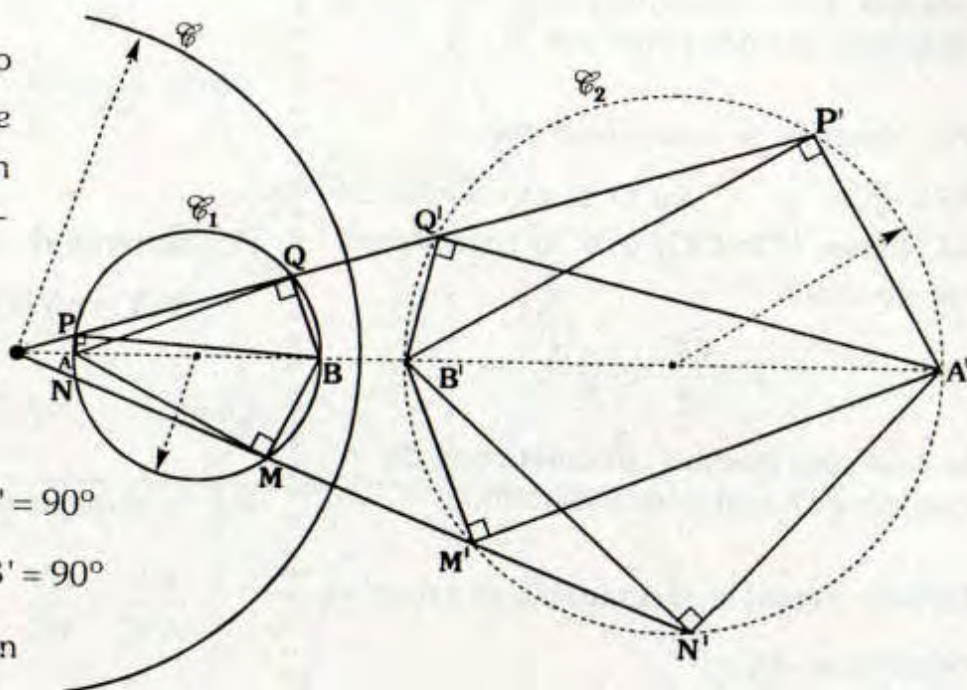
Por teorema:

$$m\angle APB = m\angle A'P'B' = 90^\circ$$

$$m\angle AQB = m\angle A'Q'B' = 90^\circ$$

$\Rightarrow A'B'Q'$ y P' son concíclicos.

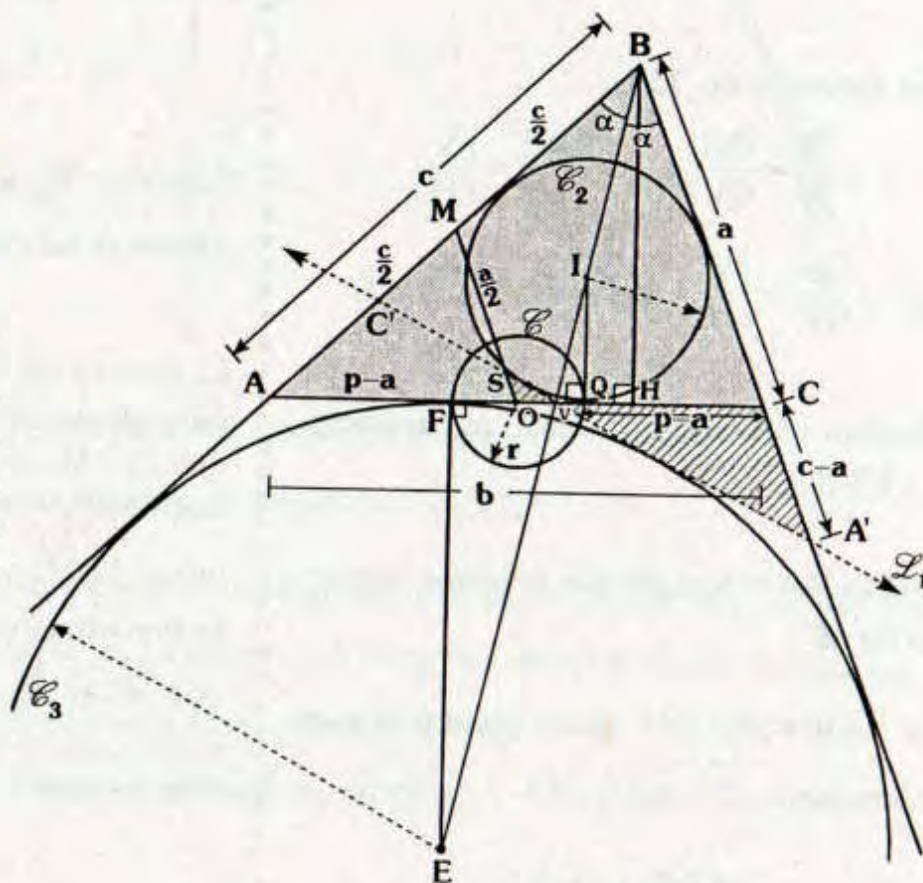
$\therefore \mathcal{C}_1$ y \mathcal{C}_2 son inversas.



TEOREMAS FEUERBACH

DEMOSTRACIÓN:

La circunferencia de Euler de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias exinscritas.



En el gráfico se ha trazado \mathcal{L}_1 tangente interior a la circunferencia inscrita y exinscrita la cual paras por V.

Por teorema de circunferencia:

$AF=QC= p-c$, sea O punto medio de \overline{AC} (notar $FO=OQ$) y \mathcal{C} la circunferencia de radio: r

$$r = \frac{QF}{2} = \frac{c-a}{2},$$

la cual será nuestra circunferencia de inversión y O centro de inversión.

Debido a que I es incentro y E es excentro relativo a \overline{AC} :

$$\Rightarrow \frac{BI}{IV} = \frac{VE}{BE}$$

Por teorema de Tales:

$$\frac{BI}{IV} = \frac{QH}{QV} \quad y \quad \frac{VE}{BE} = \frac{FV}{FH}$$

$$\Rightarrow \frac{QH}{QV} = \frac{FV}{FH}, \text{ luego F, V, Q y H.}$$

Forman cuaterna armónica, por teorema

$$\Rightarrow (OV)(OC) = r^2$$

Luego V y H son puntos inversos respecto de \mathcal{C} .

Se ha trazado \overline{OM} (base media) la cual interseca a \mathcal{L}_1 en S:

$$\Rightarrow \triangle OSV \sim \triangle CA'V$$

Por teorema de la bisectriz:

$$\frac{VC}{VA} = \frac{a}{c} \Rightarrow VC = \frac{ab}{a+c}$$

$$OV = \frac{b}{2} - \frac{ab}{a+c} = \frac{b}{2} \frac{(c-a)}{(a+c)}$$

Por teorema de circunferencia :

$$\triangle ABC \cong \triangle A'BC' \Rightarrow BA' = c$$

$$\text{Luego: } A'C = c - a$$

Por la semejanza de OSV y CA'V:

$$\frac{OS}{A'C} = \frac{OV}{VC} \Rightarrow OS = \frac{(c-a)^2}{2a}$$

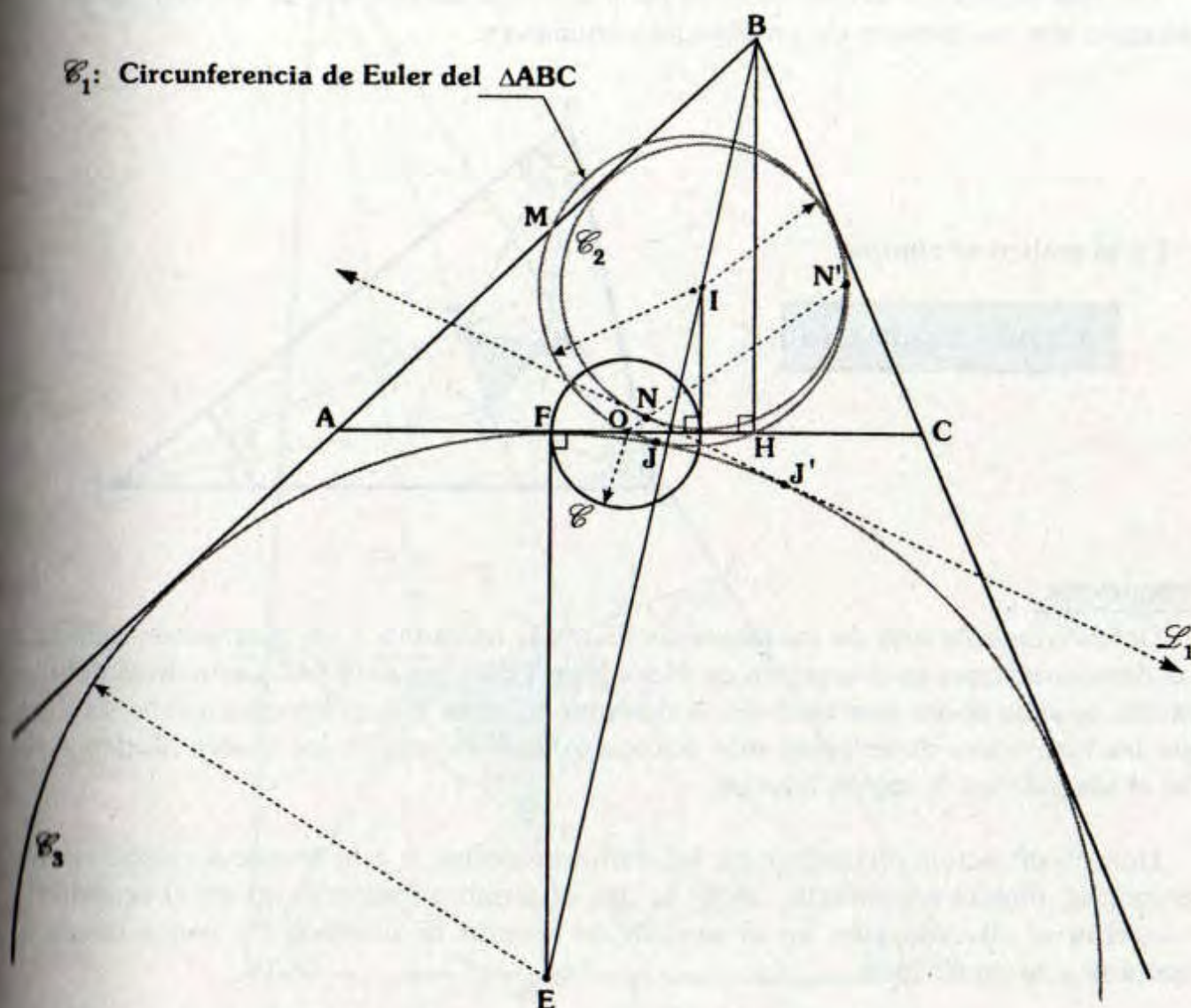
$$\text{Luego: } (OS)(OM) = \left(\frac{c-a}{2} \right)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \text{S y M son puntos inversos}$$

También \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 son ortogonales a \mathcal{C} entonces son sus propios inversos.

El inverso de \mathcal{L}_1 respecto de \mathcal{C} es una circunferencia que pasa por O y debido que H y M son inversos de O y S respectivamente, entonces la circunferencia inversa de \mathcal{L}_1 pasa por H y M, pero esta es precisamente la circunferencia de Euler, que al ser \mathcal{L}_1 tangente a la circunferencia inscrita y exinscrita su inverso también lo será.

Luego el gráfico quedará así:



Del gráfico: \mathcal{L}_1 y \mathcal{C}_1 son inversos respecto de \mathcal{C} .

\mathcal{C}_1 : Circunferencia de Euler del $\triangle ABC$.

\mathcal{C}_1 es tangente a la circunferencia inscrita \mathcal{C}_2 y a la exinscrita \mathcal{C}_3 , en forma análoga se demuestra que \mathcal{C}_1 es tangente a las otras dos circunferencias exinscritas.

Notar que J y J' son puntos inversos lo mismo N y N' .

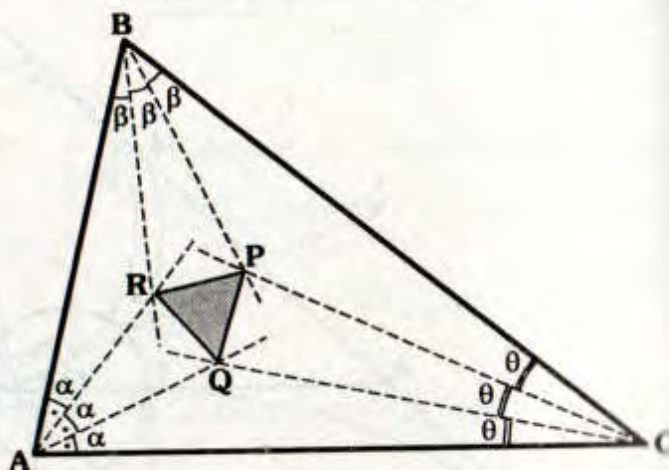
Si analizamos las circunferencias exinscritas relativas a \overline{AB} y \overline{BC} se demuestra en forma análoga.

TEOREMA DE MORLEY

Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo son los vértices de un triángulo equilátero.

En el gráfico se cumple:

ΔPQR : Equilátero



DEMOSTRACIÓN:

Definitivamente uno de los teoremas que más apasiona a los geómetras, debido a sus demostraciones es el teorema de Morley, en esta constante búsqueda de la demostración se sabe ahora que también se determinan otros triángulos equiláteros, es decir que las trisectrices determinan más triángulos equiláteros, de los cuales Morley estudió el ubicado en la región interior.

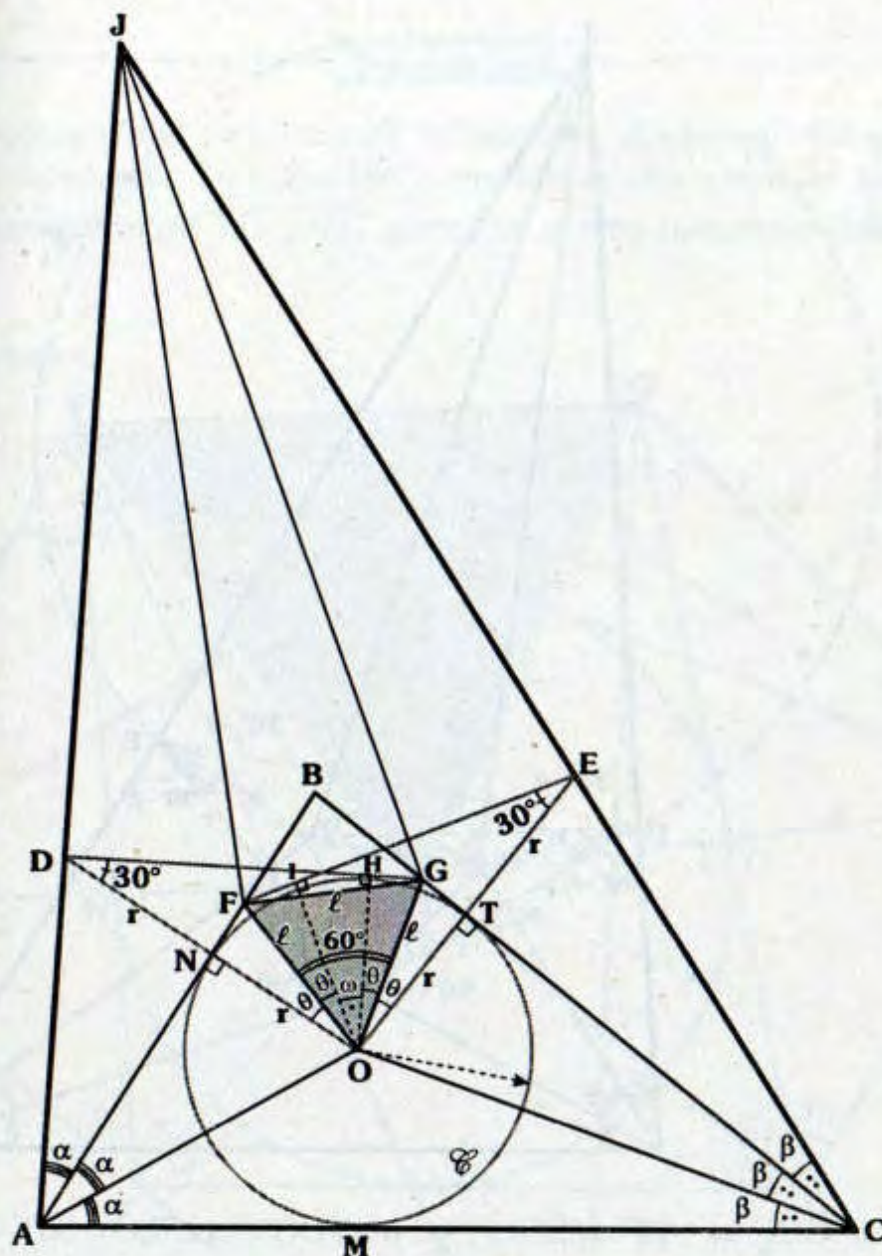
Una clasificación preliminar de las demostraciones a este teorema establece dos categorías, directa e indirecta. Aquí se usa el término indirecto no en el sentido de reducción al absurdo sino en el sentido de invertir la sucesión de pasos desde la hipótesis a la conclusión.

El gran espectro de las demostraciones han sido plasmadas en 1 993 en el libro titulado "Le Theoreme de Morley" de André Viricel.

Aquí mostramos una demostración indirecta.

Paso 1

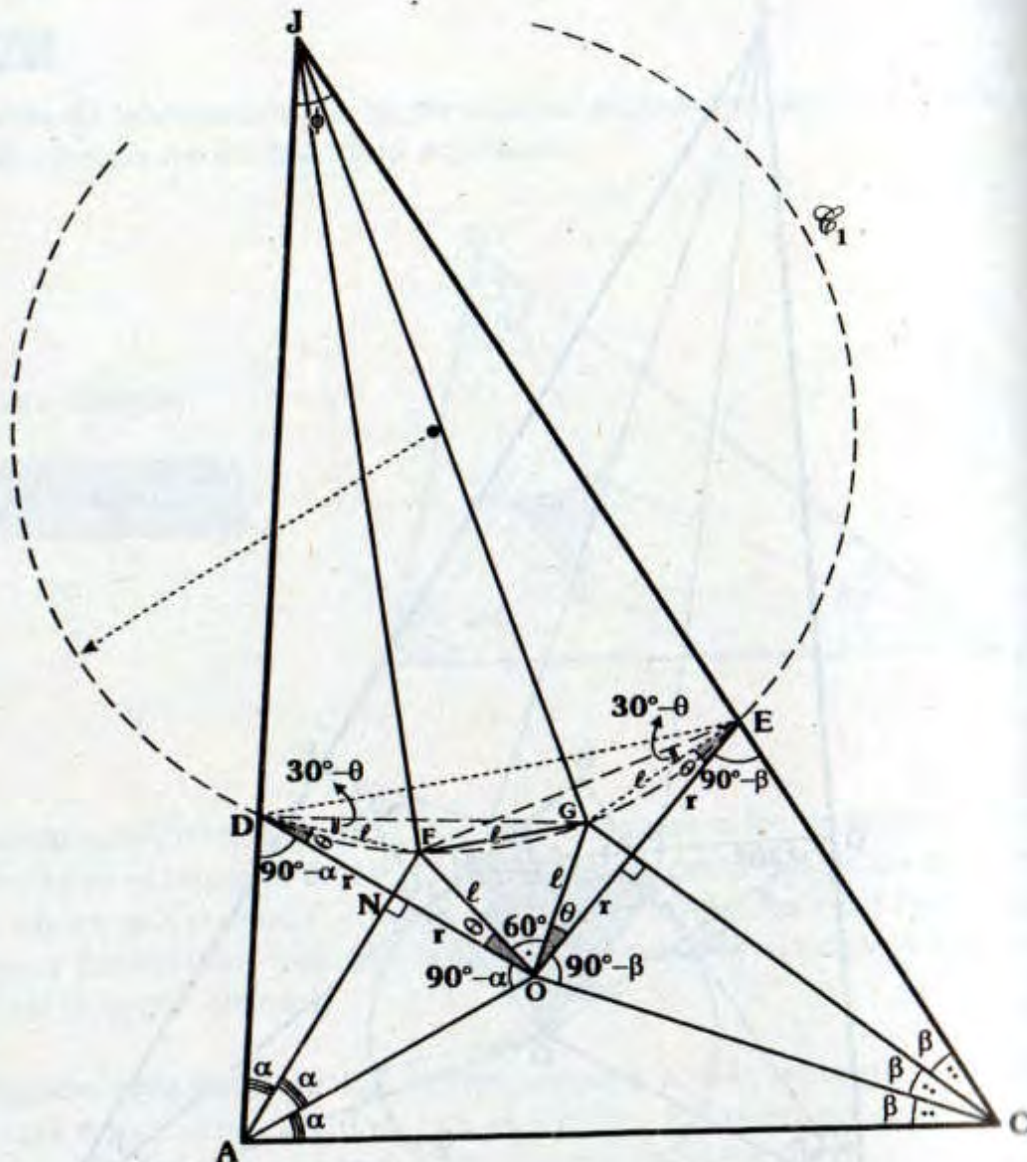
Partimos del triángulo ABC, circunscrito a la circunferencia \mathcal{C} de centro O y radio r (M, N y T : puntos de tangencia), prolongamos \overline{OT} y \overline{ON} hasta E y D respectivamente, tal que $ON=ND=TE=r$. Se ubican F en \overline{AB} y G en \overline{BC} , tal que \overline{FE} y \overline{DG} son tangentes a \mathcal{C} en I y H.



- \overline{OG} : Bisectriz $\Rightarrow m\angle HOG = m\angle GOT = \theta$
- $\triangle OIE$: Notable $\Rightarrow \omega + 2\theta = 60^\circ$
- $\triangle DHO$: Notable $\Rightarrow m\angle HOD = 60^\circ \Rightarrow m\angle IOD = 2\theta$
- \overline{OF} : Bisectriz $\Rightarrow m\angle IOF = m\angle FON = \theta$
- $\triangle OFN \cong \triangle OGT$ (ALA) $\Rightarrow FO = OG = \ell$
- Puesto que : $m\angle FOG = \theta + \omega + \theta = 60^\circ \Rightarrow \triangle FOG$: Equilátero ...(a)

Para demostrar el teorema de Morley, faltaría demostrar que \overline{JF} y \overline{JG} trisecan al $\angle AJC$.

Paso 2

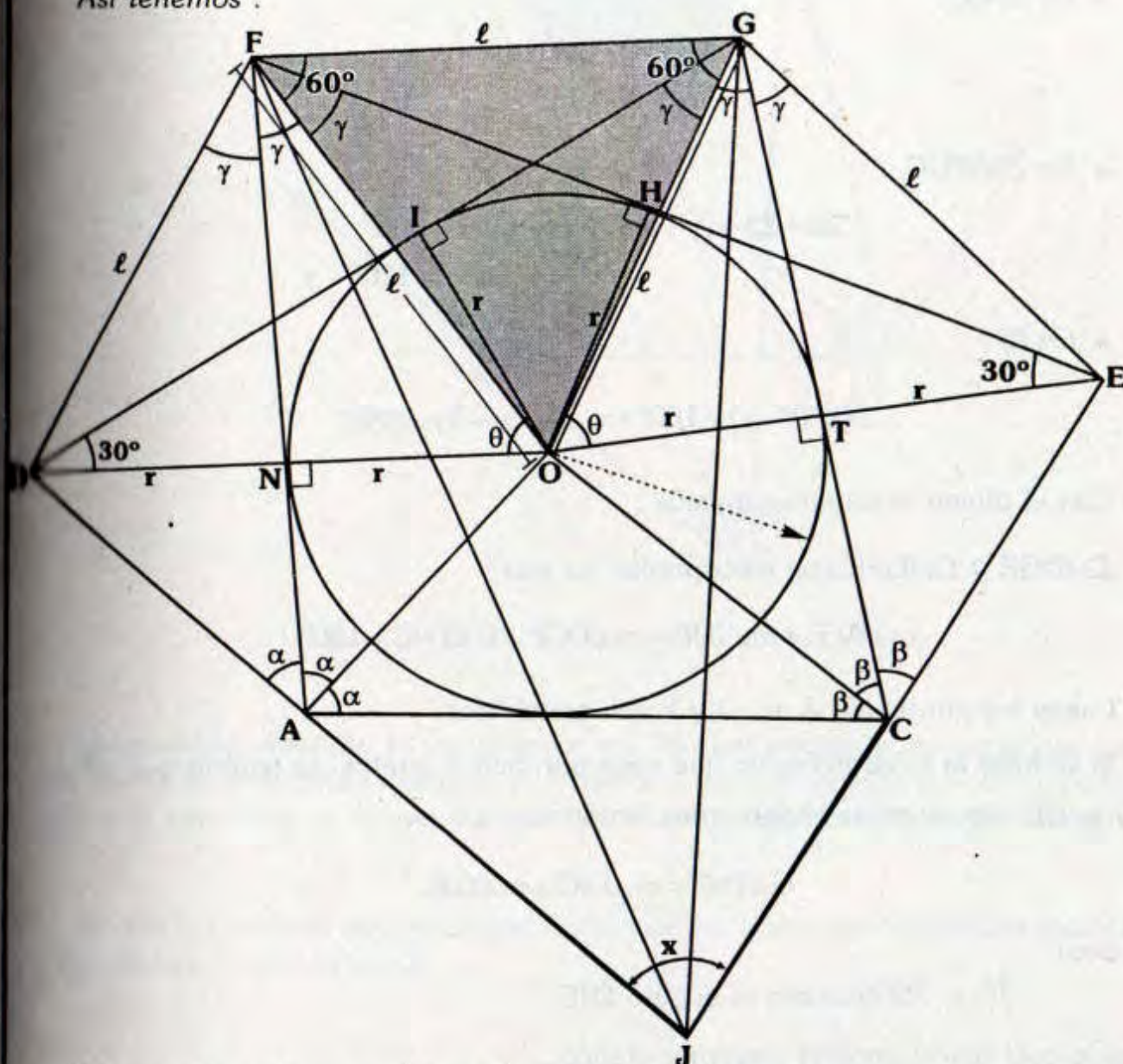


- Trazamos \overline{DF} y $\overline{GE} \Rightarrow DF = GE = \ell$ y $m\angle FDG = m\angle FEG = 30^\circ - \theta$
- $\triangle DFG E$: Inscriptible, al trazar la circunferencia \mathcal{C}_1 se observa:
 $m\widehat{DF} = m\widehat{FG} = m\widehat{GE} = 60^\circ - 2\theta$
- $\triangle ACJ$: $3\alpha + 3\beta + \phi = 180^\circ \quad \dots(I)$
- En $\triangle DOEJ$: $60^\circ + 2\theta + \phi = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta \quad \dots(II)$
- De (I) y (II) : $\phi = 90^\circ - 3\theta \Rightarrow \triangle DGEJ$ es inscriptible, pues en $\triangle DOEJ$
 $m\angle DGE = 90^\circ + 3\theta$
 $\Rightarrow D, F, G, E$ y J son concíclicos.
 $\therefore \overline{JF}$ y \overline{JG} trisecan al $\angle AJC$

Observación

Demostremos ahora un caso muy interesante. En forma análoga al anterior, en el cual se consideró: $3\alpha + 3\beta < 180^\circ$, analicemos ahora cuando $3\alpha + 3\beta > 180^\circ$, ahora la intersección de \overline{AD} y \overline{EC} estará en el otro semiplano determinado por \overline{AC} .

Así tenemos :



Se procede en forma análoga a la anterior (solo que no estamos considerando la intersección de \overline{AN} y \overline{CT}), se demuestra que el triángulo FOG es equilátero. Son los mismos pasos hasta (a), notar que se han considerado los mismos puntos. Lo que se va a demostrar que \overline{JF} y \overline{JG} trisecan al $\angle AJC$.

- Por teorema de la mediatriz :

$$DF = FO = OG = GE = \ell$$

- $\triangle DFO \cong \triangle OGE$ (L.L.L) $\Rightarrow m\angle DFO = m\angle OGE = 2\gamma$
- \overline{FO} es bisectriz del $\angle NFH$ y \overline{GO} es bisectriz del $\angle IGT$
- En $\triangle AJC$:

$$3\alpha + 3\beta = 180^\circ + x$$

$$3(\alpha + \beta) = 180^\circ + x \quad \dots (I)$$

- En $\triangle AFGC$:

$$2\alpha + 2\beta + (\gamma + 60^\circ) + (\gamma + 60^\circ) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 120^\circ - \gamma$$

- En (I) :

$$3(120^\circ - \gamma) = 180^\circ + x \Rightarrow x + 3\gamma = 180^\circ$$

Con el último resultado tenemos :

$\triangle JDGE$ y $\triangle JDFE$ son inscriptibles, ya que :

$$m\angle AFE + m\angle DJE = m\angle DGE + m\angle DJE = 180^\circ$$

Luego los puntos D, J, E, G y F son concíclicos.

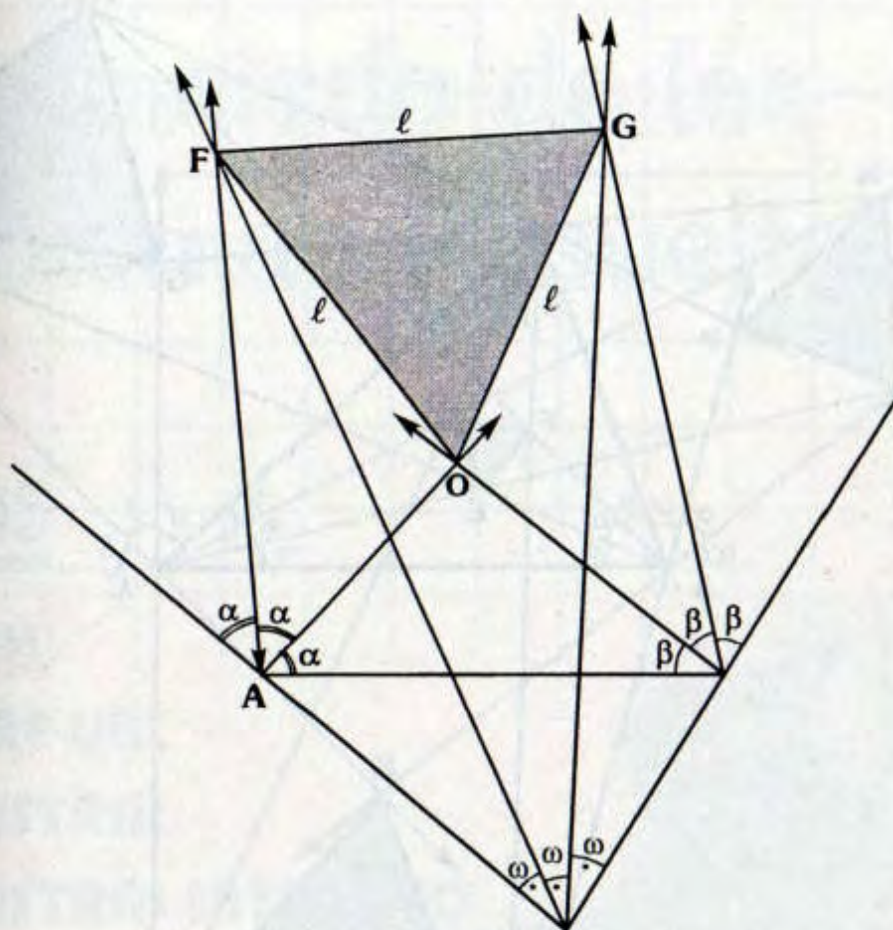
Si se traza la circunferencia que pasa por dichos puntos, se tendría que \overline{AF} , \overline{FG} y \overline{GE} son cuerdas congruentes, entonces :

$$m\angle DJF = m\angle FJG = m\angle GJE$$

Es decir :

\overline{JF} y \overline{JG} trisecan al ángulo DJE

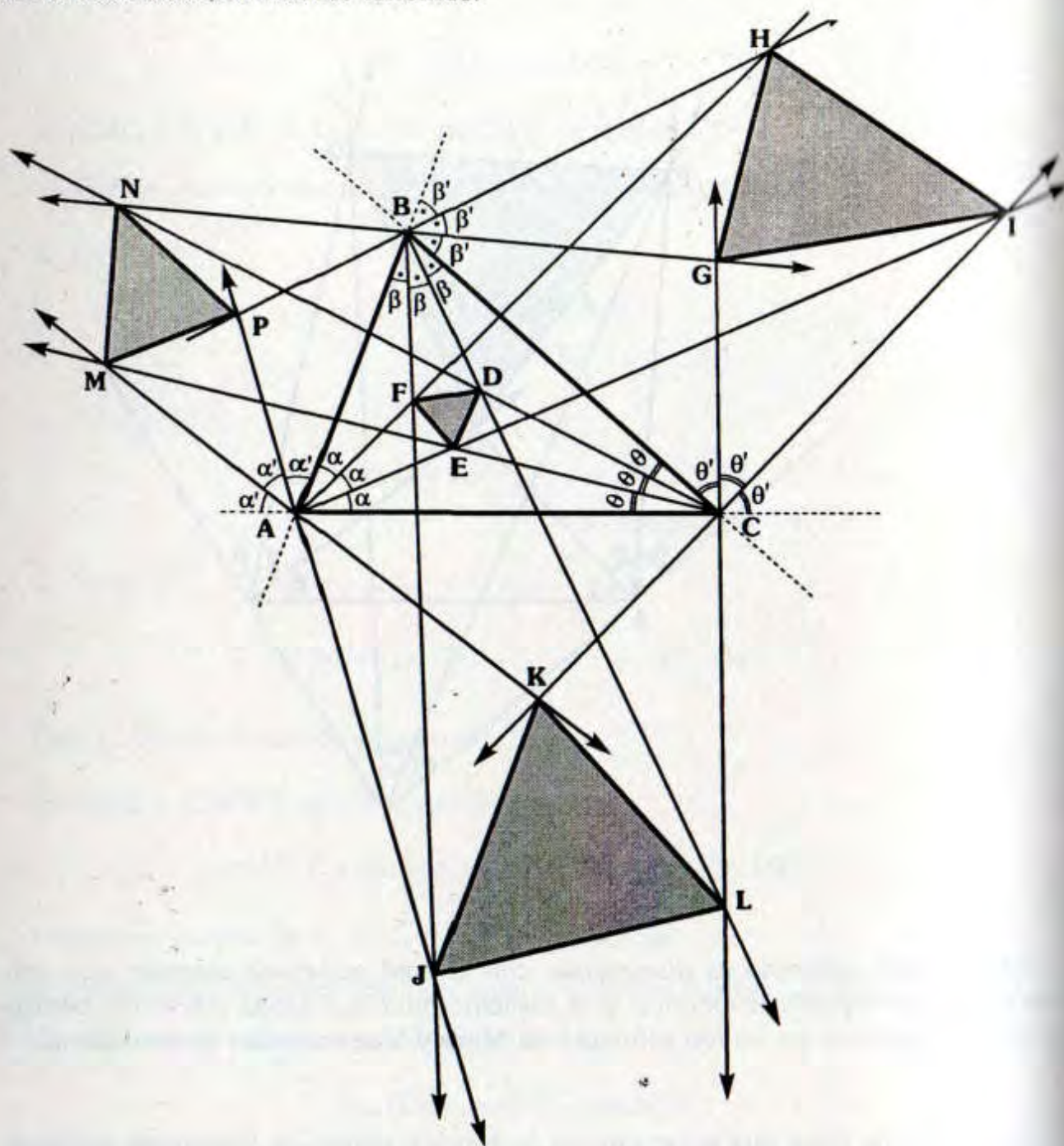
Con lo cual tendríamos el siguiente gráfico.



El resultado obtenido es interesante, con lo cual podemos asegurar que con dos partes de trisectrices externas y la trisectriz interna trazada del tercer vértice se puede encontrar un nuevo triángulo de Morley, denominado no tradicional.

El estudiante tiene que notar que no se pueden tomar las trisectrices externas e internas de cualquier modo.

De los resultados anteriores tenemos:



Al trisecar los ángulos internos como externos del triángulo ABC, los triángulos DEF, GHI, JKL y MNP son equiláteros.

Otras pruebas indirectas son las de Naraniengar, Dodds y Child y la directa es la forma trigonométrica, las cuales se encuentran en las páginas indicadas en la bibliografía.

Enunciado de los Problemas Resueltos

■ Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO



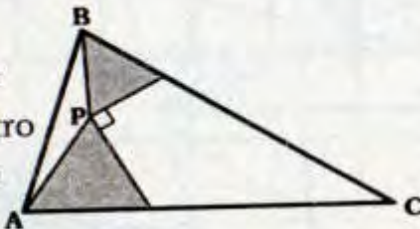
Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

Si las regiones sombreadas son regulares. ¿Qué punto notable es P del triángulo ABC?

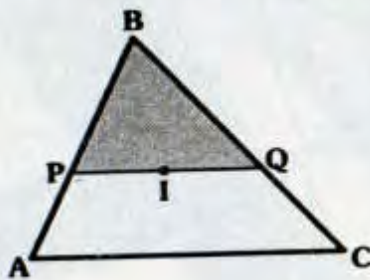
- A) Incentro
- B) Ortocentro
- C) Circuncentro
- D) Baricentro
- E) Excentro



PROBLEMA Nº 2

En el gráfico $AB=6$, $BC=8$, I es incentro del triángulo ABC y $PQ \parallel AC$. Calcule el perímetro de la región de la región sombreada.

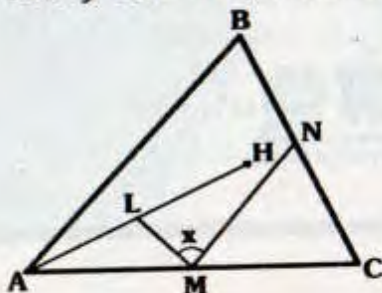
- A) 10
- B) 11
- C) 12
- D) 13
- E) 14



PROBLEMA Nº 3

Si H es ortocentro del triángulo ABC, $AL=LH$, $AM=MC$ y $BN=NC$, calcule x.

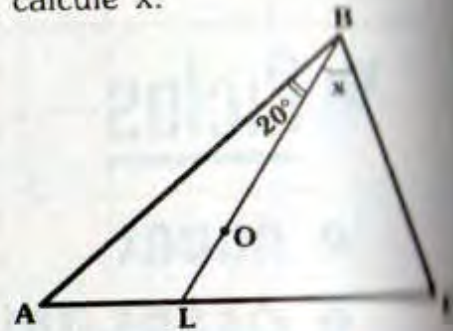
- A) 30°
- B) 45°
- C) 60°
- D) 90°
- E) 120°



PROBLEMA Nº 4

En el gráfico O es circuncentro de ABC si $BC=LC$, calcule x.

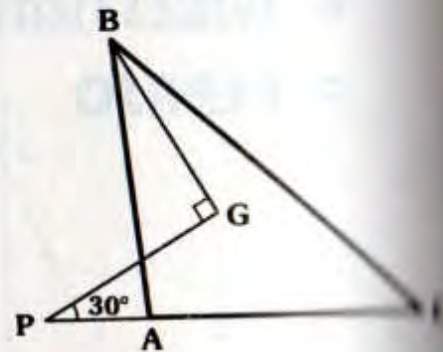
- A) 55°
- B) 60°
- C) 65°
- D) 70°
- E) 75°



PROBLEMA Nº 5

Si G es baricentro de ABC y $BG=3(AP)=6$. Calcule AC.

- A) 6
- B) 7
- C) 8
- D) 9
- E) 10



PROBLEMA Nº 6

Si $\widehat{AC} = 150^\circ$, calcule x.

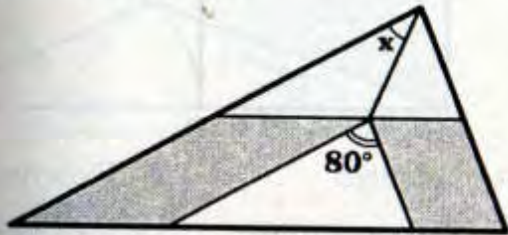
- A) 10°
- B) 14°
- C) 15°
- D) 25°
- E) 30°



PROBLEMA N° 7

En el gráfico si las regiones sombreadas son rombales, calcule x .

- A) 50°
- B) 40°
- C) 30°
- D) 20°
- E) 10°



PROBLEMA N° 8

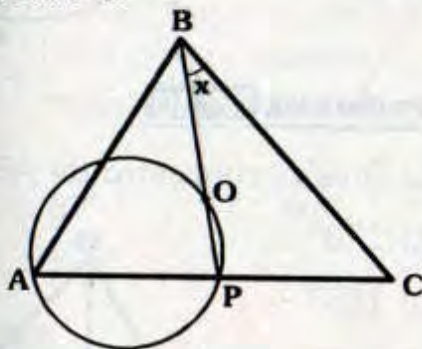
Se tiene el triángulo ABC, $m\angle ABC = 50^\circ$, se traza la ceviana interior BF, si M y N son los ortocentros de los triángulos ABF y BFC respectivamente, calcule $m\angle MFN$.

- A) 25°
- B) 35°
- C) 40°
- D) 45°
- E) 50°

PROBLEMA N° 9

Si O es circuncentro de ABC, $AP = BO$ y $m\angle OP = 40^\circ$, calcule x .

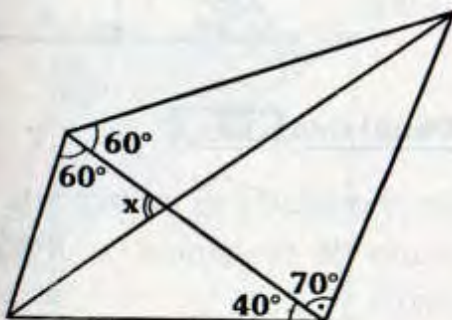
- A) 28°
- B) 22°
- C) 25°
- D) 30°
- E) 37°



PROBLEMA N° 10

Calcule x .

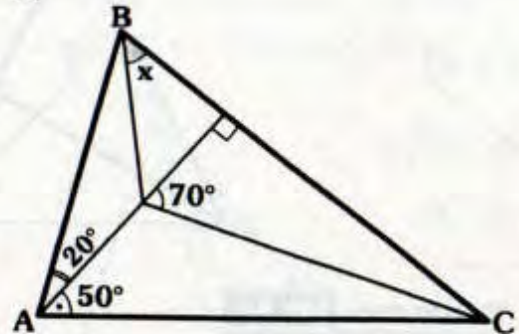
- A) 70°
- B) 80°
- C) 90°
- D) 100°
- E) 120°



PROBLEMA N° 11

Calcule x .

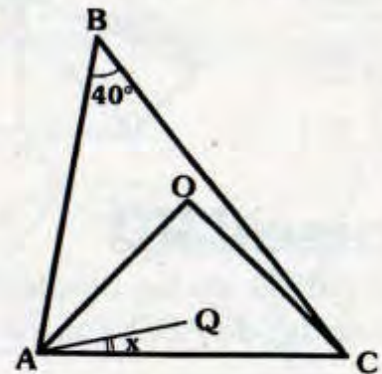
- A) 30°
- B) 40°
- C) 50°
- D) 60°
- E) 70°



PROBLEMA N° 12

Si O y Q son circuncentros de ABC y AOC respectivamente, calcule x .

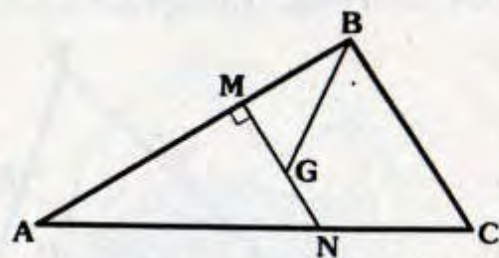
- A) 4°
- B) 6°
- C) 8°
- D) 10°
- E) 12°



PROBLEMA N° 13

Si G es baricentro de ABC, $MG = GN$ y $AN = 2(NC) = 8$, calcule BG.

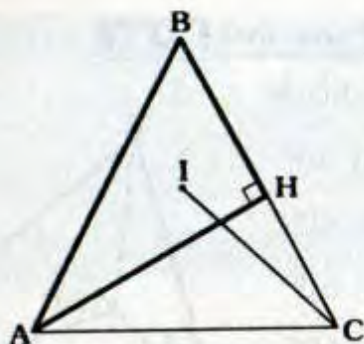
- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6



PROBLEMA N° 14

En el gráfico, si $AB = BC$ e I es incentro de ABH, calcule IC/AC .

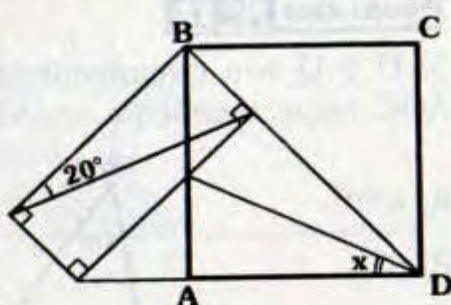
- A) 1
- B) $1/2$
- C) $\sqrt{2}$
- D) $\sqrt{2}/2$
- E) $1/3$



PROBLEMA N° 15

Si ABCD es un cuadrado, calcule x.

- A) 25°
- B) 24°
- C) 23°
- D) 22°
- E) 21°



PROBLEMA N° 16

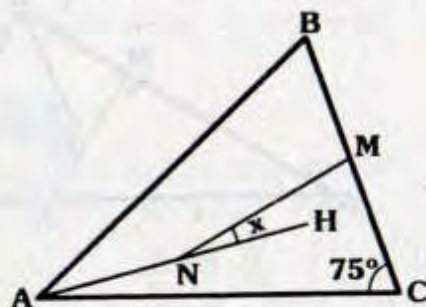
Si ABCD es un paralelogramo y C es excentro de ABD, calcule $m\angle ABD$.

- A) 45°
- B) 60°
- C) 70°
- D) 80°
- E) 90°

PROBLEMA N° 17

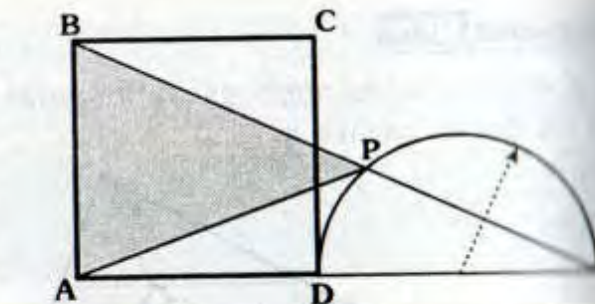
En el gráfico H es ortocentro de ABC, si $AN = NH = BM = MC$, calcule x.

- A) 10°
- B) 11°
- C) 12°
- D) 14°
- E) 15°



PROBLEMA N° 18

En el gráfico, ¿Qué punto notable es, el centro del cuadrado ABCD, del triángulo ABP?



- A) Incentro
- B) Excentro
- C) Circuncentro
- D) Ortocentro
- E) Baricentro

PROBLEMA N° 19

Si H es ortocentro de ABC y $BC = 12$, calcule PQ.

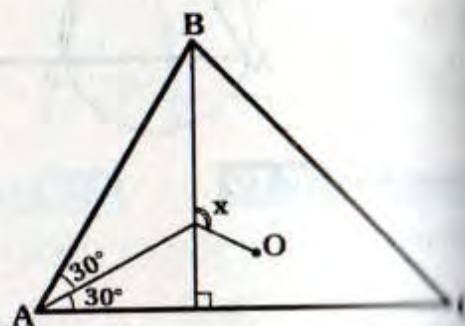
- A) 6
- B) 8
- C) 10
- D) 12
- E) 14



PROBLEMA N° 20

Si O es circuncentro de ABC, calcule x.

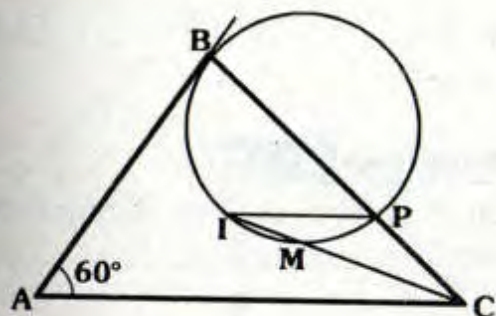
- A) 120°
- B) 115°
- C) 105°
- D) 100°
- E) 90°



PROBLEMA N° 21

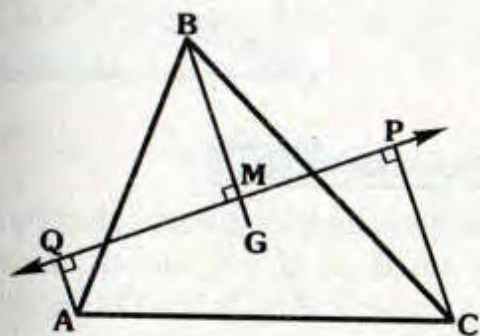
En el gráfico I es incentro de ABC y H es punto de tangencia, si $\overline{IP} \parallel \overline{AC}$, calcule $m\widehat{MP}$.

- A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 60°

**PROBLEMA N° 22**

11) G es baricentro de ABC,
 $HM=5(MG)=5$, calcule $AQ+PC$.

- A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

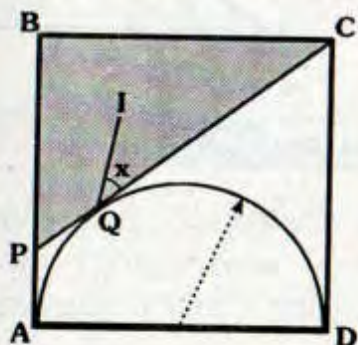
**PROBLEMA Nº 23**

Se tiene el triángulo ABC, cuyo ortocentro es H, si L, M y N son puntos medios de \overline{AC} , \overline{AH} y \overline{BH} respectivamente, calcule $m\angle NML$.

- A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 24

Si ABCD es un cuadrado, Q es punto de tangencia e I es incentro de BPC. Calcule

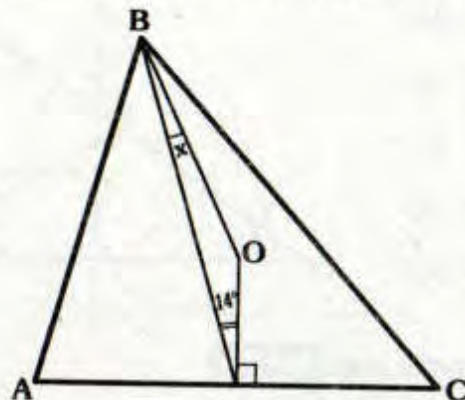


- A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53°

PROBLEMA Nº 25

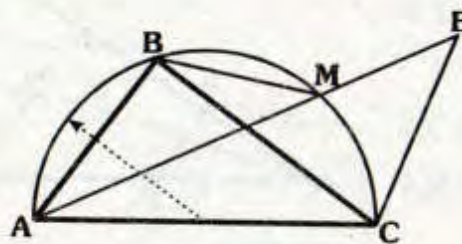
En el gráfico O es circuncentro de ABC,
si $m\angle BAC - m\angle BCA = 20^\circ$, calcule x.

- A) 2°
B) 4°
C) 6°
D) 8°
E) 10°

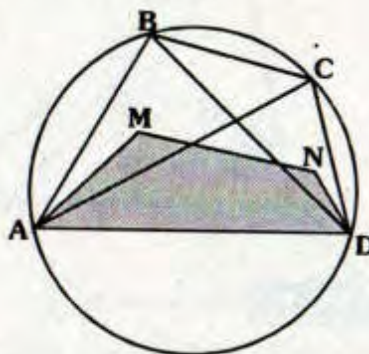
**PROBLEMA Nº 26**

Si E es excentro de ABC y $BM=6$, calcule EC.

- A) $6\sqrt{2}$
B) 6
C) $8\sqrt{2}$
D) 8
E) 10

**PROBLEMA N° 27**

En el gráfico M y N son ortocentros de ABD y ACD respectivamente. ¿Qué tipo de cuadrilátero es AMND?

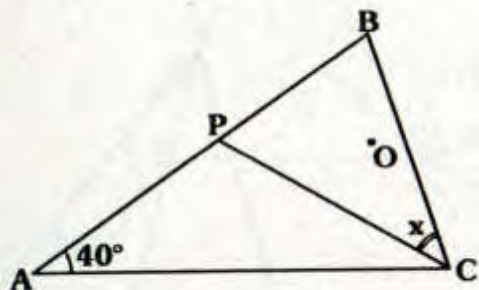


- A) Rombo B) Inscriptible
C) Paralelogramo D) Trapecio
E) Bicentrico

PROBLEMA N° 28

Si O es circuncentro y ortocentro de PBC y ABC respectivamente, calcule x.

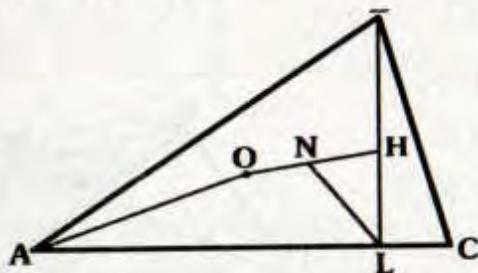
- A) 20°
- B) 34°
- C) 36°
- D) 38°
- E) 40°



PROBLEMA N° 29

En el gráfico H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente y $ON = NH$, calcule AO/NL .

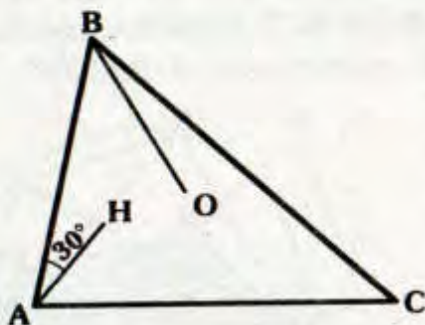
- A) 2
- B) 1,5
- C) 1
- D) 0,5
- E) 0,4



PROBLEMA N° 30

Si O es circuncentro, H es ortocentro y $AC = 12$, calcule OB.

- A) $2\sqrt{3}$
- B) $3\sqrt{3}$
- C) $4\sqrt{3}$
- D) $5\sqrt{3}$
- E) $6\sqrt{3}$



PROBLEMA N° 31

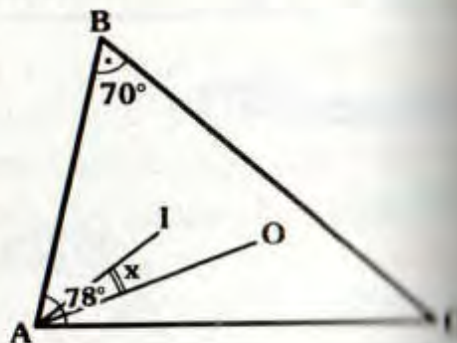
Dado un triángulo ABC, si $m\angle ABC = 53^\circ$, calcule la razón entre la distancia del ortocentro a \overline{AB} y la distancia del circuncentro a \overline{BC} .

- ❖ A) $4/3$
- ❖ B) $4/5$
- ❖ C) $5/3$
- ❖ D) $6/5$
- ❖ E) $4/5$

PROBLEMA N° 32

En el gráfico, si O es circuncentro y I es incentro, calcule x.

- ❖ A) 18°
- ❖ B) 19°
- ❖ C) 20°
- ❖ D) 21°
- ❖ E) 22°



PROBLEMA N° 33

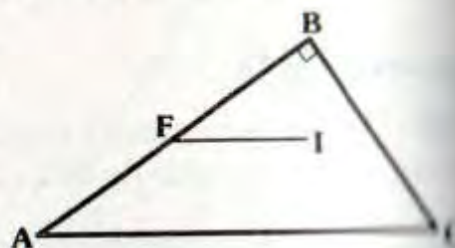
Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si O e I son el circuncentro e incentro de ABC y $m\angle OIC = 90^\circ$, calcule $m\angle BAC$.

- ❖ A) 30°
- ❖ B) 37°
- ❖ C) 45°
- ❖ D) 53°
- ❖ E) 60°

PROBLEMA N° 34

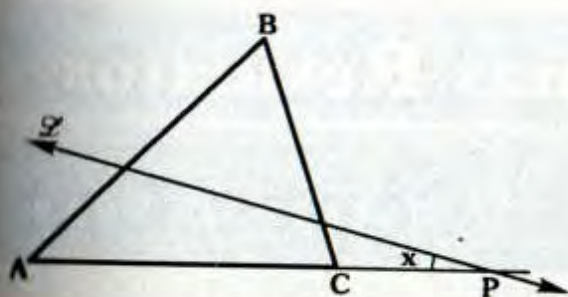
Si $\overline{IF} \parallel \overline{AC}$, I es incentro de ABC, $FB = 7$ y la distancia de I al ortocentro del triángulo ABC es $3\sqrt{2}$. Calcule AF.

- ❖ A) 1
- ❖ B) 2
- ❖ C) 3
- ❖ D) 4
- ❖ E) 5



PROBLEMA N° 35

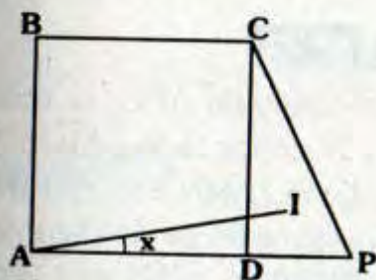
En el gráfico, \overleftrightarrow{L} es la recta de Euler y H es ortocentro de ABC, si $AP = 3(BH) = 3(CP)$, calcule x.



- A) 14° B) 15° C) $37^\circ/2$
D) $53^\circ/2$ E) 30°

PROBLEMA N° 36

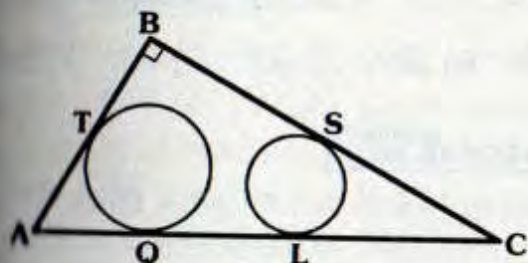
h) ABCD es un cuadrado, $CP=13$, $DP=5$
I es incentro de CDP.



- A) 6° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 10°

PROBLEMA N° 37

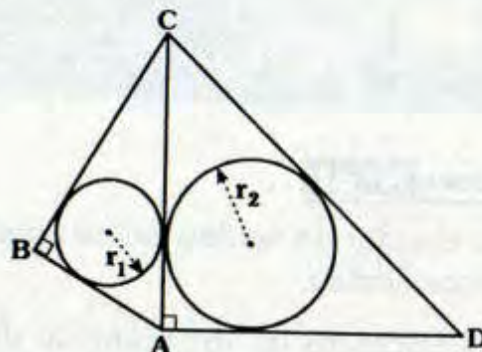
En el gráfico T, S, L y Q son puntos de tangencia, $QL=4$ y $TB+BS=10$, calcule el inradio del triángulo ABC.



- A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 3

PROBLEMA N° 38

Si $AB+BC=CD$ y $AD=18$, calcule r_1+r_2 .

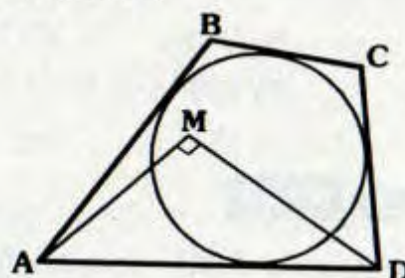


- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

PROBLEMA N° 39

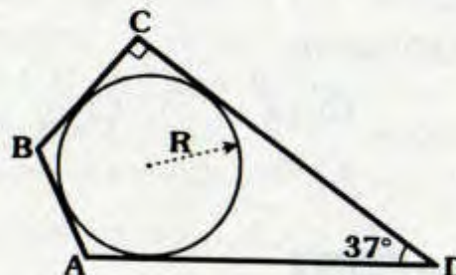
Si $AB=MD$, $CD=AM$ y $BC=6$, calcule el inradio de AMD.

- A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



PROBLEMA N° 40

Si $AB=5$, $BC=6$ y $AD=15$, calcule el inradio del ABCD.



- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Problemas Resueltos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 41

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El baricentro de un triángulo es el baricentro de su respectivo triángulo órtico.
- II. El incentro de un triángulo pertenece a su región interior.
- III. Si la recta de Euler de un triángulo pasa por un vértice, entonces el triángulo es isósceles.

- A) VFV B) VFF C) FVF
D) FVV E) FFF

PROBLEMA Nº 42

En un triángulo ABC recto en A, donde $AB=8u$, se traza la mediana \overline{BD} de manera que:

$$m\angle ABD = 45 + \frac{1}{2}m\angle BCA$$

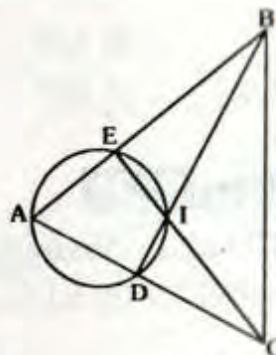
Calcule BC (en u).

- A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 36

PROBLEMA Nº 43

En la figura mostrada, el punto I es el incentro del triángulo ABC. Entonces, la $m\angle BAC$ es:

- A) 30°
B) 20°
C) 60°
D) 45°
E) 15°



PROBLEMA Nº 44

Se tiene un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en los lados \overline{AB} y \overline{BC} de modo que la $m\angle AMN = 2m\angle BAN = 90^\circ$, si $AB=BC$ y el radio de la circunferencia inscrita al triángulo BMN es r, entonces NC es:

- A) r B) 2r C) $\frac{3}{2}r$ D) 3r E) 4r

PROBLEMA Nº 45

Sea el punto O exterior al triángulo ABC y relativo al lado \overline{BC} . Si O equidista de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BC} y $m\angle OBC = 55^\circ$, $m\angle OAC = 26^\circ$. Calcule $m\angle BCA$.

- A) 56° B) 58° C) 60° D) 62° E) 54°

PROBLEMA Nº 46

En un triángulo acutángulo DRA, O es ortocentro y C circuncentro. Halle la $m\angle ORC$, si:

$$m\angle ODC + m\angle OAC = 38^\circ$$

- A) 36° B) 38° C) 48° D) 35° E) 45°

PROBLEMA N° 47

En un triángulo ABC ($AB=BC$) se traza la mediana AM y se prolonga hasta el punto H de modo que $m\angle AHC = 90^\circ$. Si $m\angle MAC = m\angle BCH$ y $MH=a$, halle AM.

- A) $2a$ B) $3a/2$ C) $4a/3$
D) $4a$ E) $6a$

PROBLEMA N° 48

En un triángulo rectángulo los catetos suman 32 cm, si la menor mediana mide 12 cm. Halle la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (en cm).

- A) 3 B) 4 C) 5 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

PROBLEMA N° 49

En un $\triangle ABC$ de incentro I, la $m\angle ACB = 60^\circ$. Se inscribe una circunferencia en el triángulo BIC tangente a \overline{CI} , \overline{BI} y \overline{CB} en los puntos M, N y P respectivamente. Si la $m\angle BAC = m\angle NMP$. Calcule la $m\angle CAB$.

- A) 85° B) 81° C) 80°
D) 72° E) 60°

PROBLEMA N° 50

En un triángulo ABC recto B, se traza la ceviana \overline{BM} ($M \in \overline{AC}$). La circunferencia inscrita al triángulo ABM es tangente al lado \overline{BM} en el punto P y la circunferencia inscrita al triángulo BMC es tangente al segmento PM en el punto Q. Si $BP - QM = \ell$, entonces la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC es:

- A) $\frac{\ell}{3}$ B) $\frac{2\ell}{5}$ C) $\frac{\ell}{5}$ D) $\frac{3\ell}{5}$ E) ℓ

PROBLEMA N° 51

En un cuadrilátero ABCD:

$$AB=CB=BD, \quad m\angle BAD = 3\alpha,$$

$$m\angle BCD = 2\alpha \quad \text{y} \quad \frac{m\angle ADC}{m\angle ABC} = \frac{3}{2}$$

Halle $m\angle D - m\angle B$.

- A) 10° B) 30° C) 45° D) 60° E) 72°

PROBLEMA N° 52

En un triángulo acutángulo ABC, las alturas \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} concurren en H. Por este punto se traza la paralela a \overline{FD} , que interseca a \overline{AB} , \overline{FE} , \overline{DE} y \overline{BC} , en los puntos M, N, P y Q respectivamente. Si $FN=a$ y $DP=b$. Calcule MQ.

- A) $2(a+2b)$ B) $2a+b$
C) $2(a+b)$ D) $a+2b$
E) $2a+3b$

PROBLEMA N° 53

En un triángulo ABC está inscrita la circunferencia de centro O y se ubica otra circunferencia menor, tangente al lado \overline{AC} en P y al lado \overline{BC} en Q y a la circunferencia dada. Si la $m\angle ABC = \theta$, calcular la medida del ángulo determinado por los rayos \overrightarrow{AO} y \overrightarrow{PQ} .

- A) $\frac{\theta}{2}$ B) $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ C) θ
D) $90^\circ - \theta$ E) $\frac{3\theta}{2}$

PROBLEMA N° 54

En un triángulo ABC recto en B de inradio r , "O" es el circuncentro e "I" el incentro. Si $m\angle AIO = 90^\circ$. Calcule el perímetro del triángulo.

- A) $7r$ B) $9r$ C) $12r$ D) $15r$ E) $18r$

PROBLEMA N° 55

En un triángulo isósceles, la $m\angle ABC = 120^\circ$ y $AB = 12\mu$. Calcule la distancia entre el ortocentro y el baricentro.

- A) $6\sqrt{3}\mu$ B) $8\sqrt{3}\mu$ C) 12μ
D) 15μ E) 16μ

PROBLEMA N° 56

En un triángulo ABC acutángulo, D es el circuncentro y O es el ortocentro, por B trazamos la bisectriz que es interceptada por la mediatriz del lado \overline{AC} en el punto E. Si la $m\angle ABC = 60^\circ$ y la $m\angle ODA = 12^\circ$, calcule la $m\angle BED$.

- A) 48° B) 36° C) 30°
D) 24° E) 18°

PROBLEMA N° 57

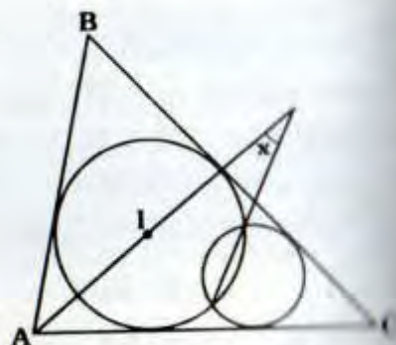
En un triángulo ABC, H es ortocentro y O es circuncentro. Si $m\angle BAC - m\angle BCA = \alpha$, entonces la $m\angle HBO$ es:

- A) $90^\circ - \alpha$ B) $\alpha/2$ C) α
D) 2α E) $60^\circ + \alpha$

PROBLEMA N° 58

En un triángulo ABC; $m\angle ABC = \beta$, I es el incentro. Calcule x .

- A) $\beta/4$
B) $\beta/2$
C) β
D) $90^\circ - \beta$
E) $90^\circ - \beta/2$



PROBLEMA N° 59

En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler determina con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcule la medida del ángulo que forma dicha recta de Euler y el diámetro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ que pasa por el vértice de donde parten los lados que intersecan a la recta de Euler.

- A) 60° B) 75° C) 80° D) 90° E) 95°

PROBLEMA N° 60

En un $\triangle ABC$, recto en B, se ubican los puntos E y D en los lados \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente, tal que $m\angle DEC = 90^\circ$. Si la suma de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas en el cuadrilátero ABDE y en el triángulo CDE es 10μ , calcule BD.

- A) 12μ B) 15μ C) 8μ
D) 10μ E) $7,5\mu$

PROBLEMA N° 61

En un triángulo acutángulo PQR, I es el incentro, O es el ortocentro y G el circuncentro. Si $m\angle POR = m\angle PQR$. Calcule $m\angle PIR$.

- A) 145° B) 130° C) 120°
D) 160° E) 135°

PROBLEMA N° 62

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, I es el incentro tal que: $m\angle AID = 90^\circ$ ($D \in \overline{AC}$) $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Si $AB + BC = 34$, $AC = 26$. Calcule BE.

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

PROBLEMA N° 63

En una semicircunferencia de diámetro \overline{AC} se ubica un punto B, en el triángulo ABC se inscribe una circunferencia tangente a \overline{AB} y \overline{BC} en D y E respectivamente, la recta DE intercepta a la semicircunferencia en los puntos F y G, calcule la $m\widehat{FG}$.

- A) 60° B) 72° C) 75°
D) 90° E) 120°

PROBLEMA N° 64

En un triángulo ABC, \overline{BM} es mediana, N es punto medio de \overline{BM} , la prolongación de \overline{CN} interseca a \overline{AB} en P. Si $PM = 3u$ y $m\angle MBC = 90^\circ$. Halle la longitud de \overline{AC} .

- A) 18 u B) 15 u C) 12 u
D) 10 u E) 6 u

PROBLEMA N° 65

Se tiene una semicircunferencia de diámetro \overline{AB} ; H y T son puntos del diámetro y de la semicircunferencia respectivamente, tal que $\overline{HT} \perp \overline{AB}$, por T y H pasan una recta tangente y una recta secante que se intersecan en C. Si desde el ángulo TCH se traza una bisectriz que interseca a \overline{AT} en E. Si $m\angle CHB = 70^\circ$. Halle $m\angle AHE$.

- A) 5° B) 10° C) 15° D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 66

En un cuadrilátero convexo ABCD, $AB = BC = CD$ y además:

$$m\angle ACD - m\angle ACB = 60^\circ$$

Se traza la mediatriz de \overline{AC} que intersecta a \overline{AD} en M. Halle la medida del menor ángulo que determinan la mediatriz y el lado AD.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 72° E) 80°

PROBLEMA N° 67

En un triángulo ABC, en el interior se ubica el punto T.

$$\text{Si: } m\angle TBA = m\angle TBC = 25^\circ,$$

$$m\angle BCT = 30^\circ \text{ y } m\angle CAT = 35^\circ$$

entonces la $m\angle TCA$ es:

- A) 25° B) 30° C) 32°
D) 35° E) 45°

PROBLEMA N° 68

En un triángulo ABC recto en B, se ubican los puntos N y Q en la hipotenusa \overline{AC} , tal que $AN < AQ$. Luego se trazan $\overline{NM} \perp \overline{BC}$, $\overline{QP} \perp \overline{AB}$, $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$, $M \in \overline{BC}$, $P \in \overline{AB}$ y $\overline{MN} \cap \overline{PQ} = \{T\}$. Se trazan las circunferencias inscritas en los triángulos APQ, NMC y NTQ cuyos radios miden r_1 , r_2 , r_3 . Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

- A) $r_1 + r_2 + r_3$ B) $r_1 + r_2 - r_3$
C) $r_1 + r_3 - r_2$ D) $(r_1 + r_2 + r_3)/2$
E) $r_2 + r_3 - r_1$

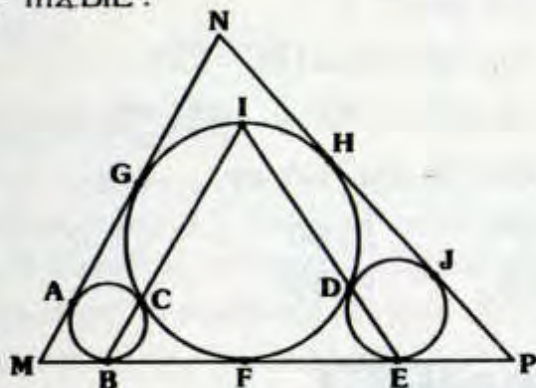
PROBLEMA N° 69

En un triángulo ABC, \overline{BE} y \overline{CF} son bisectrices interiores que se interceptan en I, la circunferencia inscrita en el cuadrilátero AEIF es tangente a \overline{AE} en M, a \overline{EI} en N y a \overline{IF} en P. Si $m\angle PMN = 2$, $m\angle PMN$, calcule la medida del ángulo BAC.

- A) 30° B) 60° C) 45° D) 80° E) 50°

PROBLEMA N° 70

En la figura A, B, F, E, J, H, G, C, D son puntos de tangencia. Si $m\angle MNP = \phi$, hallar $m\angle BIE$.



- A) $15^\circ + \frac{\phi}{3}$ B) $30^\circ + \frac{\phi}{4}$ C) $45^\circ + \frac{\phi}{4}$
D) $45^\circ + \frac{\phi}{3}$ E) $45^\circ + \frac{\phi}{2}$

PROBLEMA N° 71

En un cuadrilátero ABCD, la

$$m\angle ABD = 2 \cdot m\angle ACD = 60^\circ, \text{ la}$$

$$m\angle ADB = 2 \cdot m\angle ACB = 34^\circ$$

Halle la medida del ángulo que determinan sus diagonales.

- A) 72° B) 74° C) 77°
D) 80° E) 82°

PROBLEMA N° 72

En un paralelogramo ABCD, se traza la diagonal \overline{BD} y se ubican E_1 y E_2 excentros de los triángulos BCD y ABD relativos a los lados \overline{CD} y \overline{AD} respectivamente. Determinar que punto notable representa D para el triángulo E_1BE_2 .

- A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) FD.

PROBLEMA N° 73 2da Práctica Calificada

Se tiene un triángulo ABC, de ortocentro H, las prolongaciones de \overline{AH} , \overline{BH} y \overline{CH} cortan a la circunferencia circunscrita en F, D y E respectivamente, $\overline{AB} \cap \overline{ED} = \{M\}$, $\overline{BC} \cap \overline{DF} = \{N\}$, demostrar que M, H y N son colineales.

PROBLEMA N° 74

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura \overline{BH} relativa a la hipotenusa. Los puntos I_1 y I_2 son los incentros de los triángulos ABH y BHC respectivamente. Si $AB = 3\mu$ y $BC = 4\mu$, entonces $\overline{I_1I_2}$ mide :

- A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 1 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 75

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

- I. Dado un triángulo ABC, de incentro I, para el triángulo cuyos vértices son los excentros, I es su ortocentro.

II. En los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC se ubican M, N y L respectivamente, si $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{ML} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{NL} \parallel \overline{AB}$, entonces MNL es el triángulo mediano de ABC.

III. El baricentro de un triángulo, siempre se encuentra en su región interior.

- A) VFV B) VVV C) VFF
D) FFF E) FVV

PROBLEMA N° 76

En un triángulo ABC; la $m\angle ACB = 20^\circ$; la $m\angle ABC = 40^\circ$; sean:

- H el ortocentro.
- O el circuncentro del triángulo ABC.

Halle $m\angle HBO$.

- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 100° E) 120°

PROBLEMA N° 77

En un triángulo ABC acutángulo, H es el ortocentro. Si $BH = AC = 12u$, entonces la longitud del radio de la circunferencia de Euler o circunferencia de los nueve puntos de:

- A) $2u$ B) $3u$ C) $4u$
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 78 Examen Final

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} (H: ortocentro). Si M y N son puntos medios de \overline{AH} y \overline{BC} respectivamente.

Calcule la $m\angle MEN$.

- A) 60° B) 75° C) 85°
D) 90° E) 94°

PROBLEMA N° 79

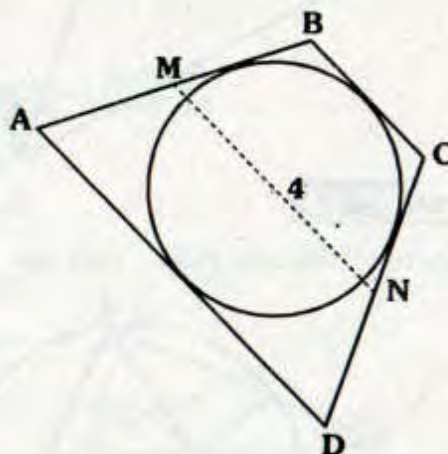
Examen Final

Si el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de sus catetos 10 cm; entonces la distancia del incentro al circuncentro del triángulo rectángulo dado es:

- A) $\sqrt{65}$ cm B) 12 cm
C) $\sqrt{51}$ cm D) 8 cm
E) 9 cm

PROBLEMA N° 80

En la figura mostrada se tiene un trapecio ABCD circunscrito a una circunferencia. Sea \overline{MN} la mediana del trapecio de longitud $4u$. Calcule el perímetro del trapecio ABCD (en u).



- A) 12 B) 13
C) 14 D) 15
E) 16

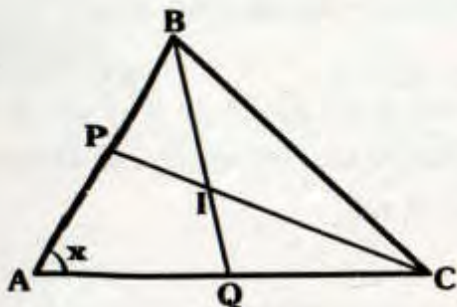
Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 81

Si $BC = QC + BP$ e I es incentro de ABC , calcule x .

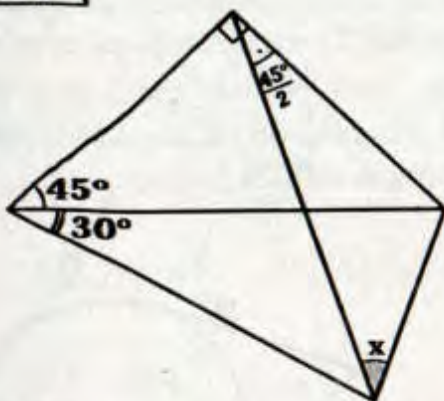
- A) 30°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 60°
- E) 75°



PROBLEMA N° 82

Calcule x .

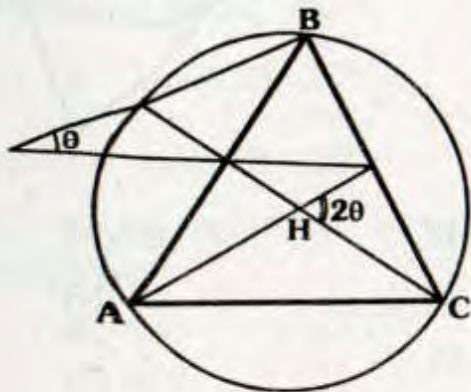
- A) 15°
- B) 30°
- C) 37°
- D) 45°
- E) 53°



PROBLEMA N° 83

Si H es ortocentro de ABC , calcule θ .

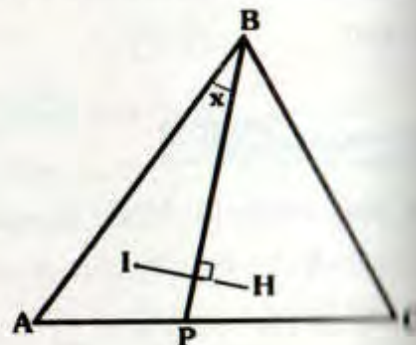
- A) 30°
- B) 35°
- C) 36°
- D) 37°
- E) 42°



PROBLEMA N° 84

Si ABC es equilátero, I es incentro de ABP y H es ortocentro de BPC , calcule x .

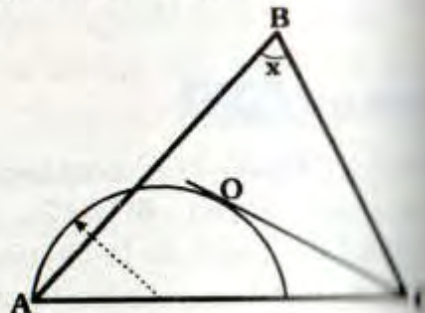
- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 25°
- E) 30°



PROBLEMA N° 85

En el gráfico O es circuncentro de ABC y punto de tangencia, calcule x .

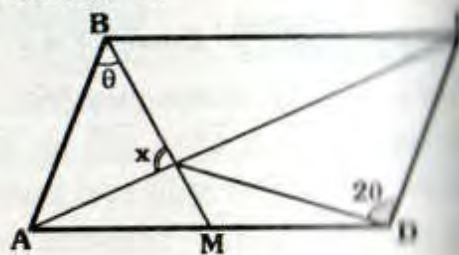
- A) 30°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



PROBLEMA N° 86

Si $ABCD$ es un paralelogramo y $AM = MD$, calcule x .

- A) 60°
- B) 75°
- C) 90°
- D) 120°
- E) 135°



PROBLEMA N° 87

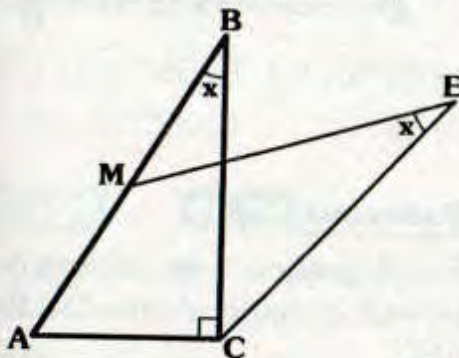
Se tiene un triángulo ABC, de inradio 4, si la distancia del incentro a la recta tangente a la circunferencia circunscrita trazada por B es 7, calcule la altura BH.

- A) 11 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

PROBLEMA N° 88

Si E es excentro de ABC y $AM=MB$, calcule x.

- A) 14°
B) 15°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



PROBLEMA N° 89

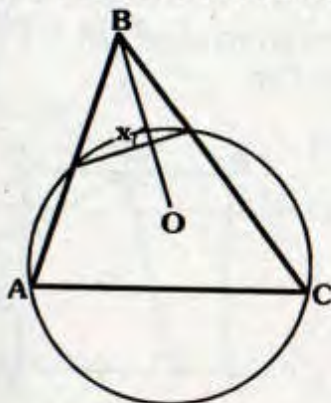
Dado un triángulo equilátero ABC, se traza la ceviana interior BD, si $AD=DC=4\sqrt{3}$, calcule la distancia entre los ortocentros de ABD y BDC.

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 4

PROBLEMA N° 90

O es circuncentro de ABC, calcule x.

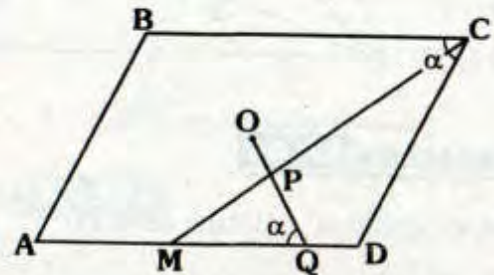
- A) 60°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA N° 91

En el gráfico O es centro del paralelogramo ABCD, si $AM=MQ$ y $OP=2$, calcule AB.

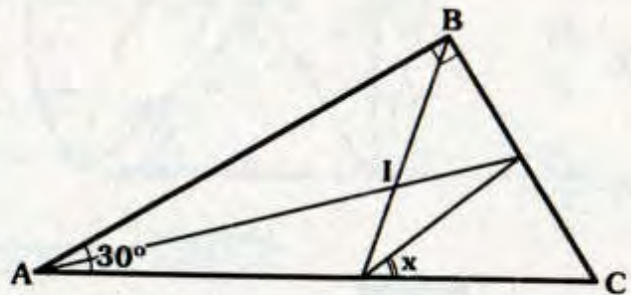
- A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14



PROBLEMA N° 92

En el gráfico I es incentro de ABC, calcule x.

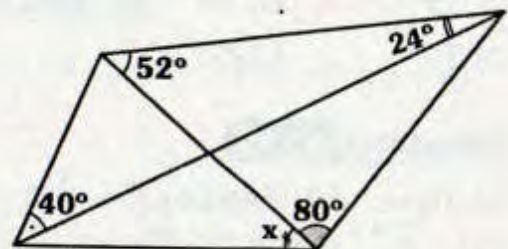
- A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°



PROBLEMA N° 93

Calcule x.

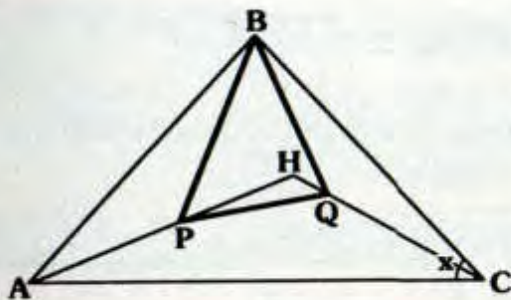
- A) 50°
B) 52°
C) 54°
D) 56°
E) 60°



PROBLEMA N° 94

Si H es ortocentro de PBQ, $AP=BQ$ y $PB=QC$, calcule x.

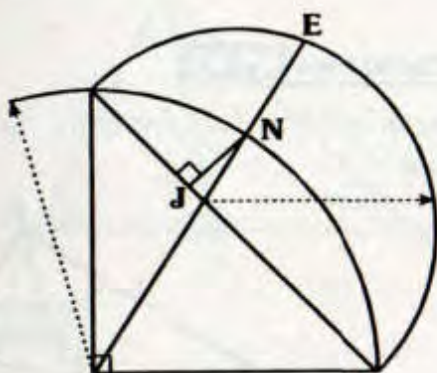
- A) 30°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



PROBLEMA N° 95

En el gráfico, calcule JN/EN .

- A) 1
- B) $\sqrt{2}$
- C) $\sqrt{3}$
- D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



PROBLEMA N° 96

Se traza la ceviana interior BN en el triángulo ABC, donde O es circuncentro de ABN, L es circuncentro de BNC y H es ortocentro de ONL, si $m\angle OHL = 110^\circ$, calcule $m\angle ABC$.

- A) 35°
- B) 45°
- C) 60°
- D) 70°
- E) 80°

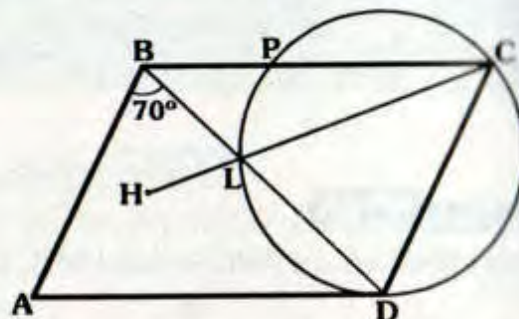
PROBLEMA N° 97

Se tiene el triángulo isósceles ABC, de base \overline{AC} , desde el excentro E relativo a \overline{BC} se traza \overline{EH} perpendicular a \overline{BC} ($H \in \overline{BC}$), si $BH=4$, calcule AC.

- A) 6
- B) 8
- C) 10
- D) 12
- E) 14

PROBLEMA N° 98

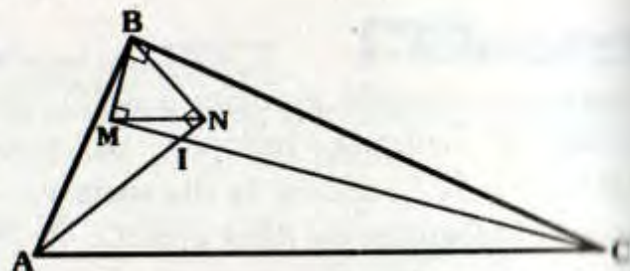
Si ABCD es un paralelogramo y H es ortocentro de ABD, calcule $m\angle PL$.



- A) 40°
- B) 38°
- C) 36°
- D) 35°
- E) 32°

PROBLEMA N° 99

En el gráfico I es incentro de ABC y $MN=8$, calcule el inradio del triángulo ABC.

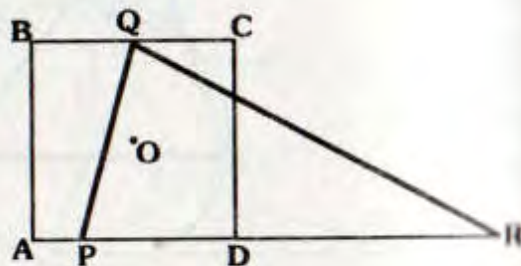


- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11

PROBLEMA N° 100

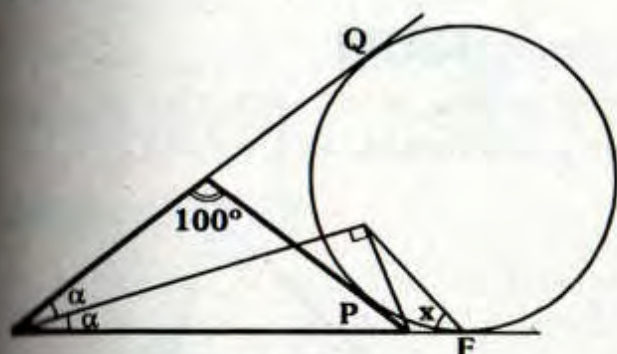
Si O es centro del cuadrado ABCD y ortocentro de PQR y $PD=3(AP)=3$, calcule DR.

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) 8



PROBLEMA N° 101

En P, Q y F son puntos de tangencia, calcule x .



- A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 75°

PROBLEMA N° 102

O y H son el circuncentro y ortocentro del triángulo ABC respectivamente si :

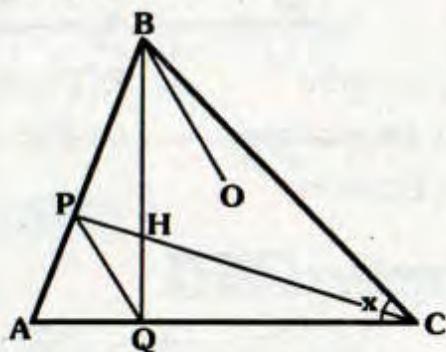
$$m\angle AHC = 2(m\angle AOC)$$

Calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 32° C) 34°
D) 36° E) 38°

PROBLEMA N° 103

En el gráfico H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente, si $\overline{PQ} \parallel \overline{BO}$, calcule x .

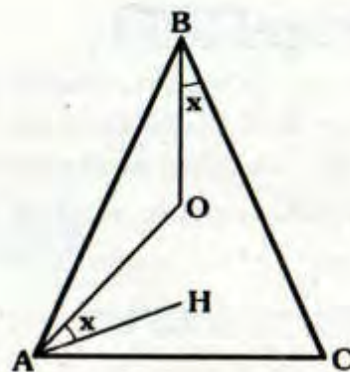


- A) 15°
B) $37^\circ/2$
C) $53^\circ/2$
D) 30°
E) 45°

PROBLEMA N° 104

Si H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC y $AB=BC$, calcule x .

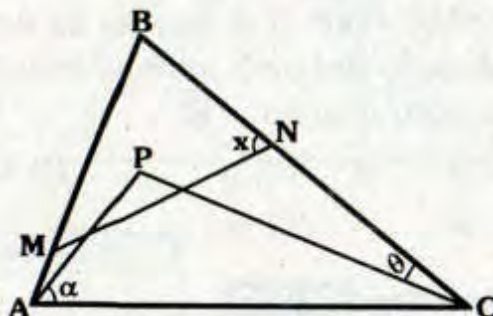
- A) $45^\circ/2$
B) $53^\circ/2$
C) $37^\circ/2$
D) 15°
E) 30°



PROBLEMA N° 105

En el gráfico P es el ortocentro de ABC y circuncentro de MBN, si $\alpha + \theta = 70^\circ$, calcule x .

- A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 100°



PROBLEMA N° 106

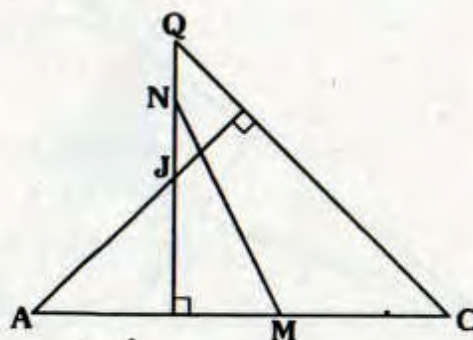
Se tiene un triángulo acutángulo ABC, si la distancia de B al ortocentro de ABC es igual a AC, calcule $m\angle ABC$.

- A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA N° 107

Si $JN=NQ=3$ y $AM=MC=6$, calcule MN.

- A) $3\sqrt{3}$
B) $5\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$
E) $5\sqrt{5}$



PROBLEMA N° 108

Dado un triángulo obtusángulo ABC, obtuso en B, si la distancia de A al ortocentro de ABC es igual al circunradio del triángulo ABC, calcule $m\angle BAC$.

- A) 60° B) 53° C) 45°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA N° 109

Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes \overline{AB} y \overline{AC} (B y C son puntos de tangencia), si $m\angle BAC = 60^\circ$ y el inradio de ABC es r, calcule la distancia entre el incentro y el excentro relativo a \overline{BC} .

- A) 2r B) 3r C) 4r
D) 5r E) 6r

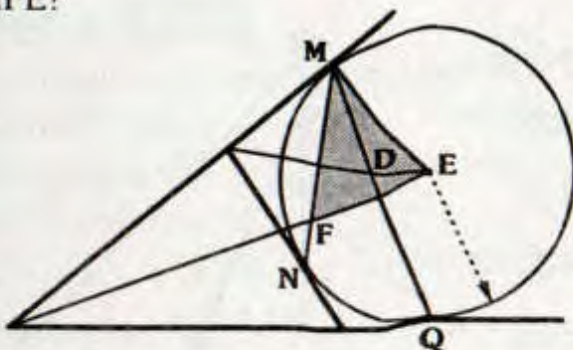
PROBLEMA N° 110

Se tiene el triángulo rectángulo ABC recto en B, en el cual se traza la altura BH, si E es el excentro de ABH relativo a \overline{AB} e I es el incentro de BHC, calcule $m\angle EBI$.

- A) 90° B) 115° C) 130°
D) 135° E) 150°

PROBLEMA N° 111

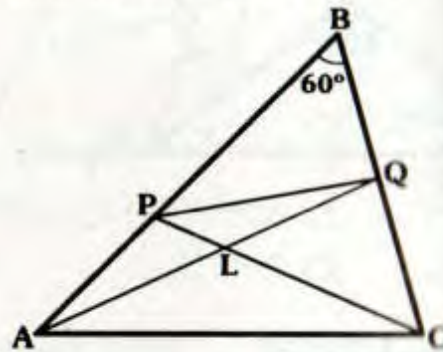
Si M, N y Q son puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es D del triángulo MFE?



- A) Ortocentro B) Incentro
C) Circuncentro D) Punto de Miquel
E) Baricentro

PROBLEMA N° 112

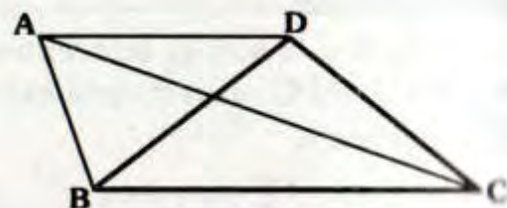
En el gráfico, si $AP = PQ = QC$. Indique que punto notable es L de ABC.



- A) Incentro B) Ortocentro
C) Circuncentro D) Baricentro
E) Punto de Georgonne

PROBLEMA N° 113

Si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y D es circuncentro de ABC, ¿qué punto notable es A del triángulo BDC?



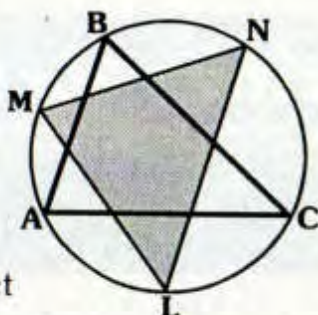
- A) Incentro B) Punto de Nagel
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Excentro

PROBLEMA N° 114

Si : $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$, $m\widehat{BN} = m\widehat{NC}$ y $m\widehat{CL} = m\widehat{LA}$

indique que punto notable es el incentro de ABC del triángulo MNL.

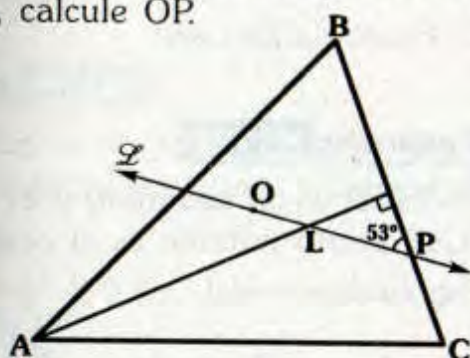
- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Ortocentro
- D) Circuncentro
- E) Punto de Poncelet



PROBLEMA N° 115

En el gráfico \mathcal{L} y O son la recta de Euler y el circuncentro del triángulo ABC, si $AL=16$, calcule OP.

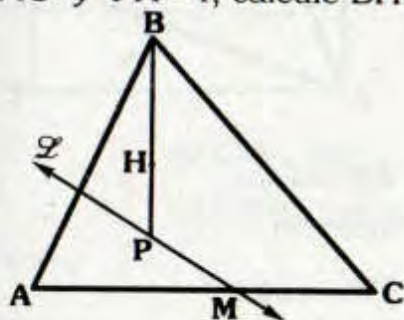
- A) 8
- B) 10
- C) 12
- D) 14
- E) 16



PROBLEMA N° 116

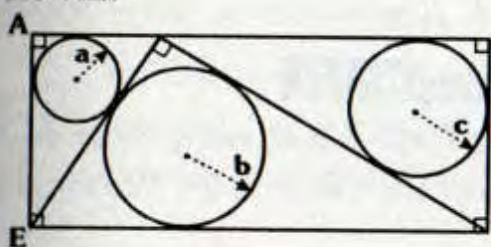
Si \mathcal{L} es paralelo a la recta de Euler del triángulo ABC, H es ortocentro su ortocentro, $AM=MC$ y $PH=4$, calcule BH.

- A) 8
- B) 6
- C) 4
- D) 3
- E) 2



PROBLEMA N° 117

Calcule AE.

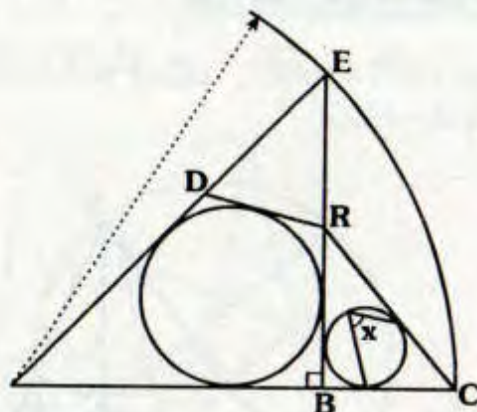


- A) $a+c-b$
- B) $a+b+c$
- C) $2a+2c-b$
- D) $2a+b+c$
- E) $a+b+3c$

PROBLEMA N° 118

Si $ED=5$, $AD=2$ y $BC=3$, calcule x.

- A) 60°
- B) 75°
- C) $\frac{143^\circ}{2}$
- D) 90°
- E) $\frac{127^\circ}{2}$



PROBLEMA N° 119

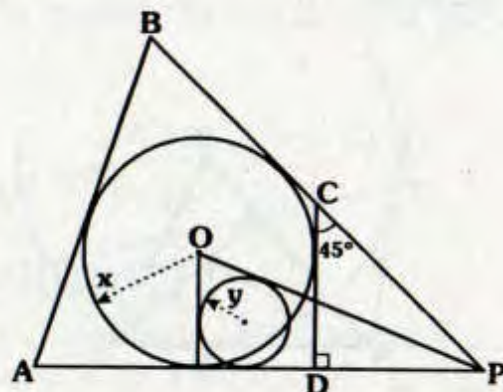
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica P en \overline{AB} y Q en \overline{BC} , si $PB=BQ=10$, calcule la suma del inradio de PBQ con el inradio del cuadrilátero APQC.

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 11
- E) 12

PROBLEMA N° 120

Si $AD=OP$, $AB=10$ y $BC=6$, calcule $x-y$.

- A) 2
- B) 4
- C) 5
- D) 5,5
- E) 6



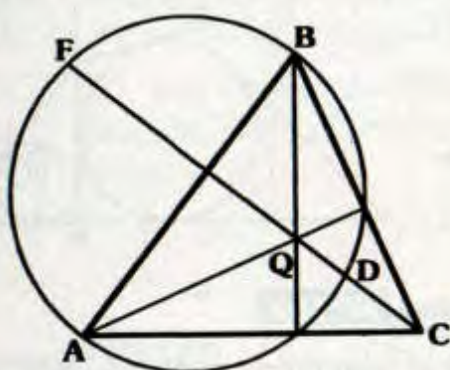
Problemas Resueltos

Ciclo

Semestral
Intensivo

PROBLEMA Nº 121

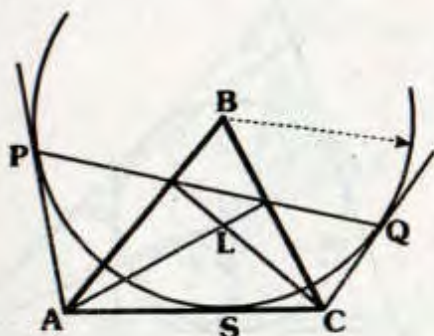
Si $m\widehat{FB} = m\widehat{BD}$. ¿Qué punto notable es Q de ABC.



- A) Ortocentro
- B) Baricentro
- C) Circuncentro
- D) Punto de Lemoine
- E) Punto exmediano

PROBLEMA Nº 122

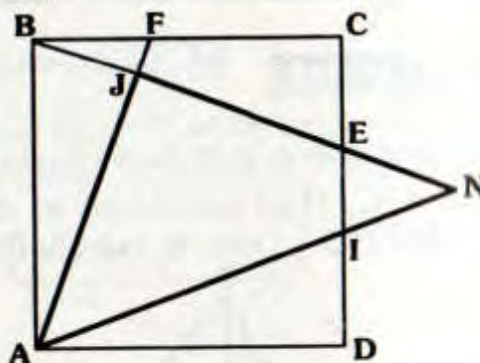
En el gráfico; P, Q y S son puntos de tangencia, indique que punto notable es L de ABC.



- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Ortocentro
- D) Punto exsimediano
- E) Punto de Brocard

PROBLEMA Nº 123

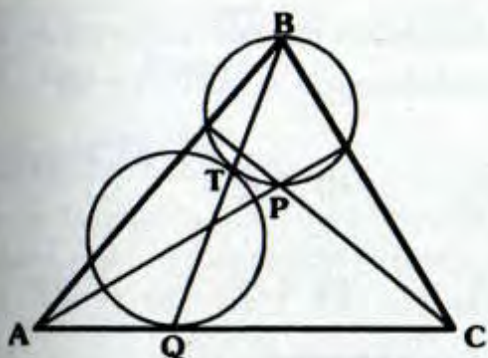
Si ABCD es un cuadrado y $BF = ID = EC$. ¿Qué punto notable es el centro de dicho cuadrado del $\triangle AJN$?



- A) Baricentro
- B) Incentro
- C) Ortocentro
- D) Punto de Spieker
- E) Punto de Miquel

PROBLEMA Nº 124

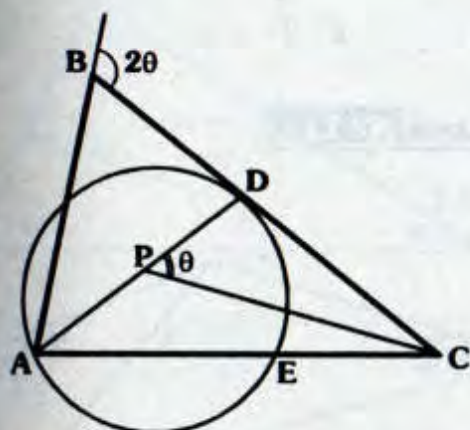
En el gráfico T y Q son puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es P de ABC?



- A) Incentro
B) Baricentro
C) Punto de Steiner
D) Circuncentro
E) Ortocentro

PROBLEMA N° 125

Si D es punto de tangencia, $AB=CD$ y $BD=EC$, indique que punto notable es P de ABC.



- A) Baricentro
B) Ortocentro
C) Incentro
D) Circuncentro
E) Punto de Tarry

PROBLEMA N° 126

En un triángulo ABC, las cevianas interiores \overline{AP} y \overline{BQ} se cortan en L, si:

$$m\angle BAP = m\angle QBC,$$

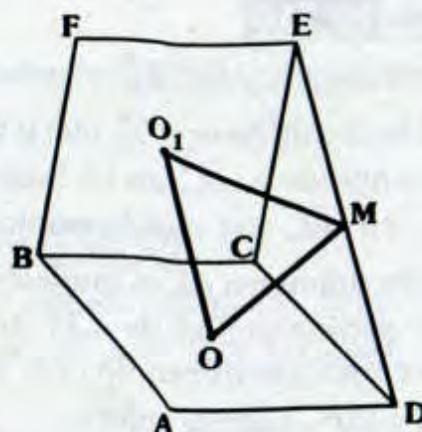
$$QP=QC \text{ y } QLPC$$

es inscriptible, ¿Qué punto notable es L de ABC?

- A) Incentro
B) Baricentro
C) Circuncentro
D) Ortocentro
E) Punto de Jerabek

PROBLEMA N° 127

En el gráfico O y O_1 son los centros de los rombos ABCD y BCEF, si M es punto medio de \overline{ED} , indique que punto notable es C de OO_1M .



- A) Ortocentro
B) Incentro
C) Baricentro
D) Circuncentro
E) Punto de Fermar

PROBLEMA N° 128

Se tiene el triángulo ABC, de incentro I, y radio IA se traza la circunferencia \mathcal{C} que corta a \overline{AB} en M, a \overline{BC} en N y \overline{AC} en P, si $m\angle BAC = 80^\circ$, calcule la medida del ángulo entre \overline{NP} y \overline{ML} .

- A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 40°
E) 45°

PROBLEMA N° 129

Se tiene el segmento PQ tangente a una circunferencia de centro O en B, luego

Las rectas \overline{PA} y \overline{QC} tangentes a dicha circunferencia, (A y C son puntos de tangencia), \overline{AC} corta a \overline{PO} en N, calcule:

$$\frac{m\angle MBO}{m\angle NBO}$$

- B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}/2$
E) 2

PROBLEMA N° 130

En un triángulo ABC de ortocentro H, se traza la circunferencia \mathcal{C} que pase por A tangente a \overline{AC} en C, luego se ubica L en \overline{AC} tal que la semicircunferencia de diámetro AL es tangente a \mathcal{C} . La prolongación de \overline{CH} corta a la semicircunferencia en M, si $\angle C = 20^\circ$, calcule $m\angle MH$.

- B) 20° C) 30°
E) 50°

PROBLEMA N° 131

En un triángulo ABC, se trazan la altura y la ceviana interior BN, el centro O de ABC pertenece a \overline{BN} , se traza \overline{OM} perpendicular a \overline{AC} (H), si $AH=HO$, $HM=m$ y $\angle A = 45^\circ$, calcule NC.

- B) m C) 2m
E) 3m

PROBLEMA N° 132

En el triángulo ABC, de ortocentro H, $AH=6$ calcule el radio de la circunferencia que contiene a B, H y C, tal que

la prolongación de \overline{AB} corta en N a dicha circunferencia y $m\angle HBN = 90^\circ$.

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

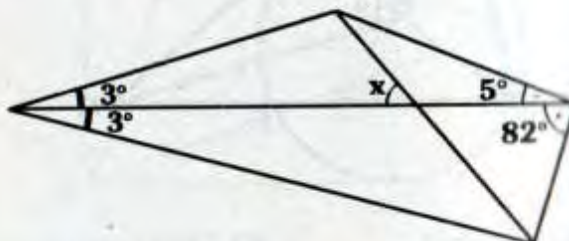
PROBLEMA N° 133

En un cuadrado ABCD, M es punto medio de \overline{AB} , el cuadrante BD de centro C corta a \overline{DM} en F, luego se ubican Q en \overline{FC} y H en \overline{BC} , si $m\angle DFH = 90^\circ$, $FQ=QC$ y $\overline{FQ} \cap \overline{BQ} = \{O\}$, calcule FO/OH .

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PROBLEMA N° 134

Calcule x.



- A) 11° B) 13° C) 15°
D) 17° E) 19°

PROBLEMA N° 135

Se tiene el triángulo ABC, se ubican P y Q en la región interior y en la región exterior relativa a \overline{AC} , si $AP=PQ=QC$, $m\angle BCA = 60^\circ$, $m\angle APQ = 2(m\angle ACQ) = 20^\circ$ y $m\angle ABC = 30^\circ + \theta$. Calcule $m\angle QBC$.

- 0° B) 37° C) 45°
3° E) 60°

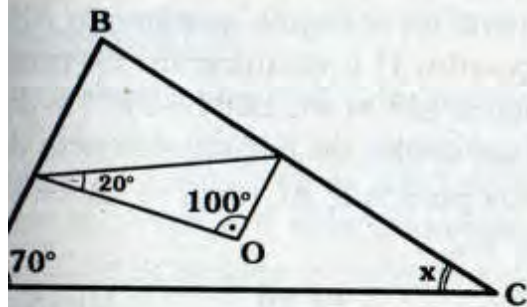
PROBLEMA N° 136

En un triángulo ABC de ortocentro H, se toman P y Q en la región exterior relativa a \overline{AB} y relativa a \overline{BC} respectivamente, si $m\angle PBA = m\angle QBC = 90^\circ$, $CH, AH=BQ$ y $AP=10$, calcule

- B) 18 C) 16
E) 10

PROBLEMA N° 137

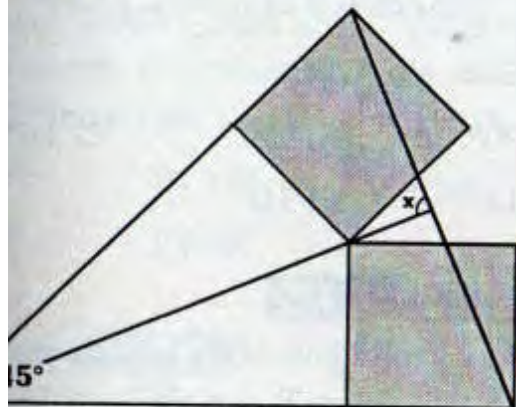
O es circuncentro de ABC, calcule x.



- B) 15° C) 18°
E) 30°

PROBLEMA N° 138

Las regiones sombreadas son regulares. Calcule x.



- A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA N° 139

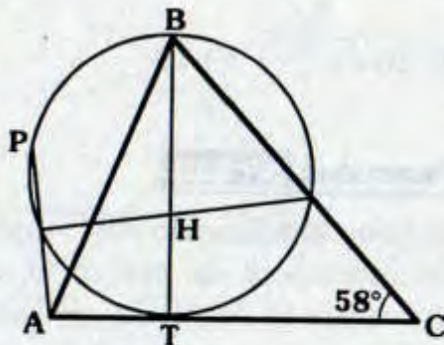
En un triángulo ABC, de baricentro G, con centro en A y radio 4 se traza una circunferencia que pasa por G, corta a \overline{AB} en M y a \overline{AC} en N, si las ternas M, G, C y B, G, N son colineales, calcule BC.

- A) 4 B) $4\sqrt{7}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{5}$ E) 8

PROBLEMA N° 140

Si T es punto de tangencia y H es ortocentro de ABC, calcule $m\widehat{PB}$.

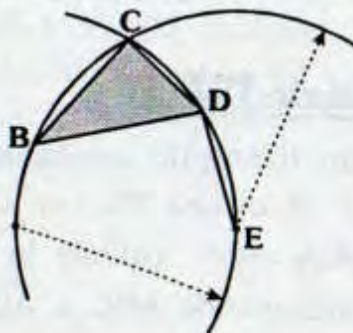
- A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 66°
E) 68°



PROBLEMA N° 141

En el gráfico $BC=DE$ y $BD=15$, calcule la distancia del ortocentro al circuncentro del triángulo DBC.

- A) 6
B) 6,5
C) 7
D) 7,5
E) 8



PROBLEMA N° 142

Se tiene el triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, sean M y O' puntos medios de \overline{AH} y \overline{BC} respectivamente, si la distancia entre las proyecciones de M y O sobre \overline{BC} , es la mitad del circunradio de ABC, calcule $m\angle HMO'$.

- A) 30° B) 37° C) $53^\circ/2$
D) $37^\circ/2$ E) 45°

PROBLEMA N° 143

Dado un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, además O, es circuncentro de AHC, si $OO_1 = 18$, calcule BH.

- A) 9 B) $9\sqrt{2}$ C) 16
D) $16\sqrt{3}$ E) 18

PROBLEMA N° 144

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se ubica el ortocentro H de ABC y se traza el diámetro AD, si el perímetro de la región BHCD es 44 y la distancia de O a \overline{AC} es 4, calcule la distancia de O a \overline{AB} .

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA N° 145

En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura BL, si $CL - AL = 4$ y $m\angle BCA = 45^\circ$, calcule la distancia del circuncentro de ABC a \overline{AC} .

- A) 0,5 B) 1 C) 2
D) 2,5 E) 4

PROBLEMA N° 146

Dado un triángulo ABC, de circuncentro O y ortocentro H, se traza la altura BL, si $BH = HL$ y $\overline{OH} \parallel \overline{BC}$, calcule $m\angle ABL$.

- A) 15 B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) 30°
D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) 45°

PROBLEMA N° 147

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O, trazamos la altura AM, si $m\angle BHM = 37^\circ$, la distancia del centro de la circunferencia de los nueve puntos a \overline{AC} es 5 y $BH = 4$, calcule AC.

- A) 22 B) 20 C) 18
D) 16 E) 14

PROBLEMA N° 148

En un triángulo ABC cuyo ortocentro es H y excentro relativo a \overline{BC} es E, si:

$$m\angle BCA = 2(m\angle ABC) = 80^\circ$$

Calcule $m\angle AEH$.

- A) 20° B) 18° C) 16°
D) 12° E) 10°

PROBLEMA N° 149

Dado un triángulo ABC, la recta de Euler corta a \overline{AB} en P y a \overline{BC} en Q, si la

diferencia entre los perímetros de las regiones ABC y APQC es igual a PB, calcule $m\angle ABC$.

- A) 45° B) 60° C) 70°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA N° 150

En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 120^\circ$, calcule la medida del ángulo entre la recta de Euler de ABC con \overline{BC} .

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA N° 151

Se tiene el isósceles ABC, de base \overline{AC} , donde O, G y H son el circuncentro, baricentro y ortocentro de ABC respectivamente, si $OG=4$ y la distancia de H a \overline{AC} es 2, calcule el exradio relativo a \overline{BC} .

- A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

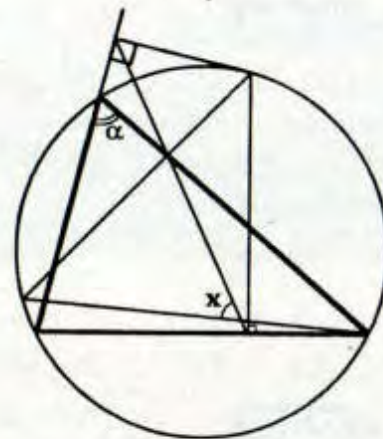
PROBLEMA N° 152

La recta de Euler de un triángulo acutángulo ABC corta a \overline{AC} en D, luego ubicamos el ortocentro H de ABC, si $AD=2(BH)=2(DC)$, calcule $m\angle HDA$.

- A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 153

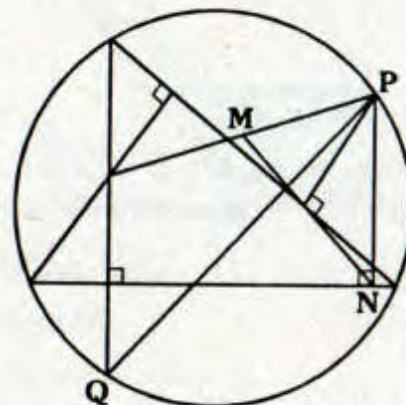
Calcule x.



- A) α B) $\alpha/2$ C) 2α
D) $3\alpha/2$ E) 3α

PROBLEMA N° 154

Si $PQ=24$, calcule MN.



- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

PROBLEMA N° 155

Se tiene el triángulo ABC, donde MNL es su respectivo triángulo mediano, H es el ortocentro de ABC; O, G y O' son el ortocentro, baricentro y circuncentro de MNL respectivamente, si $GO=2$, calcule OH.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA N° 156

el perímetro de una región triangular es 8, calcule la suma de las distancias desde su circuncentro hacia los lados, sabiendo que es entero.

- A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

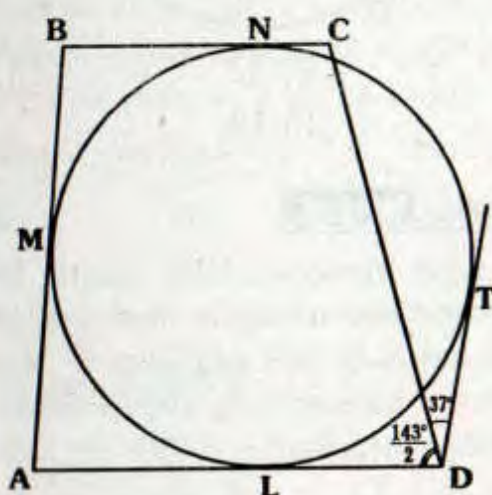
PROBLEMA N° 157

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las bisectrices interiores de los ángulos A y C, si la longitud de la proyección de la bisectriz de C sobre la AC es 6, calcule el inradio de ABC.

- A) 6 B) 5 C) 4,5
D) 4 E) 3

PROBLEMA N° 158

En el gráfico M, N, L y T son puntos de tangencia, si la base media del trapecio ABCD mide 5 y $CD = \sqrt{10}$ ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$), calcule AB.



- A) $10 - \sqrt{10}$ B) $12 - \sqrt{10}$
C) $14 - \sqrt{10}$ D) $16 - 2\sqrt{5}$
E) $18 - 2\sqrt{10}$

PROBLEMA N° 159

En un paralelogramo ABCD, se traza la altura BH, si los inradios de ABH y HBCD son r y R respectivamente, calcule HD.

- A) $R + r$ B) $2R + r$
C) $2R - 3r$ D) $2R - r$
E) $3R - 2r$

PROBLEMA N° 160

Se tiene un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) circunscrito a una circunferencia de centro O, si la prolongación de \overline{BO} corta a \overline{AD} en P, tal que $AP = 2(PD)$, calcule $m\angle CDA$.

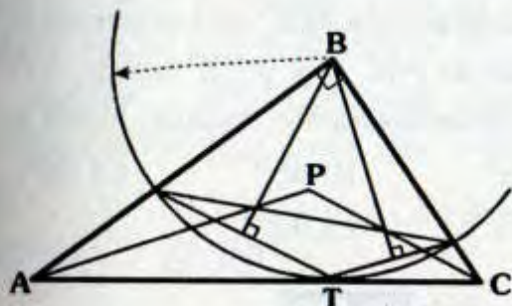
- A) 60° B) 53°
C) 45° D) 37°
E) 30°

Problemas Resueltos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 161

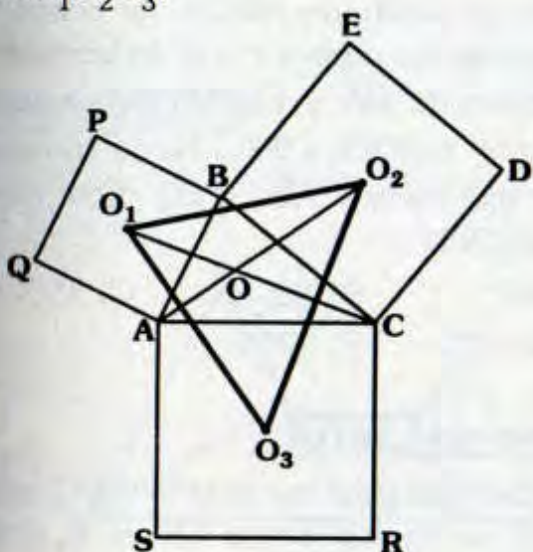
Si T es punto de tangencia, ¿Qué punto notable es P de ABC ?



- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Circuncentro
- D) Ortocentro
- E) Punto de Nagel

PROBLEMA N° 162

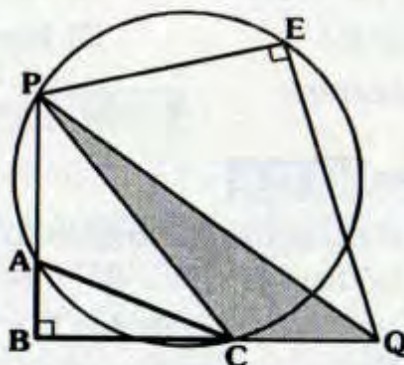
En el gráfico O_1 , O_2 y O_3 son los centros de los cuadrados $ABPQ$, $BCDE$ y $ACRS$, indique que punto notable es O del $\Delta O_1O_2O_3$.



- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Ortocentro
- D) Punto de Fermat
- E) Circuncentro

PROBLEMA N° 163

Si E es excentro de ABC . ¿Qué punto notable es E de PQC ?

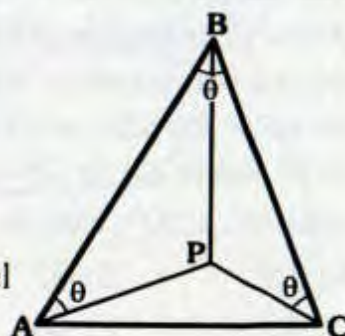


- A) Circuncentro
- B) Ortocentro
- C) Punto de Morley
- D) Punto de exmediano
- E) Excentro

PROBLEMA N° 164

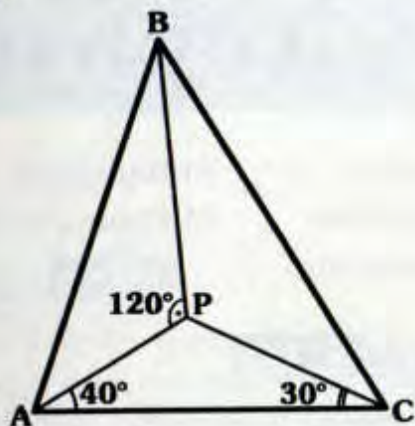
Si $AC=BP$, indique que punto notable es P de ABC .

- A) Incentro
- B) Ortocentro
- C) Baricentro
- D) Circuncentro
- E) Punto de Miquel



PROBLEMA N° 165

¿Qué punto notable es P de ABC? si $AC = BP$.



- A) Punto de Brocard B) Baricentro
C) Ortocentro D) Incentro
E) Circuncentro

PROBLEMA N° 166

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH y se ubican los incentros I_1 y I_2 de los Δ s ABH y BHC respectivamente, luego se prolonga $\overline{I_1 I_2}$ hasta que corte a \overline{BC} en P, con centro en B y radio BP trazamos el arco PL, tal que $m\angle HBL = 90^\circ$, si $I_1 I_2 = 5$ y $I_2 P = 4$, calcule $m\angle I_1 L H$.

- A) 8° B) 14° C) 15°
D) 30° E) 37°

PROBLEMA N° 167

Dado el triángulo ABC, de incentro I y excentro relativo a \overline{AB} E, si la diferencia entre exradio relativo a AB y el inradio es el doble de la distancia de B a \overline{IE} y $m\angle BAC = 30^\circ$, calcule $m\angle BAC$.

- A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 168

En el triángulo ABC, de ortocentro H y $m\angle BAC = 115^\circ$, en la región exterior y relativa a \overline{AC} se ubica S, de modo que $m\angle HSC = m\angle HBC$, calcule $m\angle ASH$.

- A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 169

En un triángulo ABC, de baricentro G, las medianas AM, BN y CL miden $3\sqrt{3}$, 3 y 6 respectivamente, calcule $m\angle BGL$.

- A) 15° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA N° 170

Se tiene el triángulo isósceles ABC, de base \overline{AC} , trazamos la ceviana interior AQ luego ubicamos el incentro I de ABQ, si $m\angle ICA = 40^\circ$, calcule $m\angle BQA$.

- A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA N° 171

Dado el cuadrado ABCD, de centro O, se ubican los puntos P y Q en las prolongaciones de \overline{DA} y \overline{CB} respectivamente, tal que $m\angle QPA = 90^\circ$, luego trazamos \overline{PO} que corta a \overline{AB} , si $PQ = QM$, calcule $m\angle OPD$.

- A) 60° B) 30° C) 15°
D) $45^\circ/2$ E) $53^\circ/2$

PROBLEMA N° 172

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, si E_1 y E_2

son excentros de los Δ_s ABH y BHC relativa a \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente, calcule la medida del ángulo entre \overline{AB} y $\overline{E_1E_2}$.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 90°

PROBLEMA N° 173

En un triángulo isósceles ABC, de base \overline{AC} en el cual M es punto medio de \overline{AC} , luego ubicamos S y N en \overline{BC} y \overline{MS} , tal que $m\angle MSC = 90^\circ$ y $MN = NS$, calcule la medida del ángulo entre \overline{BN} y \overline{AS} .

- A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA N° 174

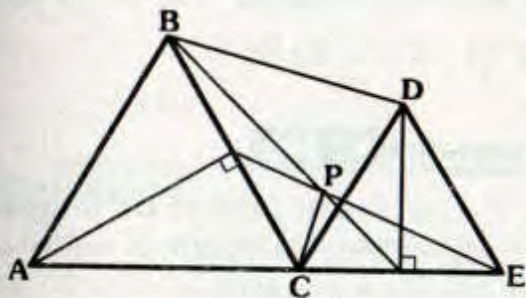
Se tiene el triángulo ABC, donde I es incentro y E es el excentro relativo a \overline{AB} , se traza \overline{AP} perpendicular a \overline{EB} ($P \in \overline{EB}$), si \overline{AP} biseca a \overline{EI} y la longitud de la bisectriz interior AF es 10, calcule el exradio relativo a AB.

- A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

PROBLEMA N° 175

Si ABC y CDE son equiláteros, calcule BD/CP .

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA N° 176

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, I_1 y I_2 son incentros de ABH y BHC, $\overleftrightarrow{I_1I_2}$ corta a la prolongación de \overline{CA} en P, si $AB=a$, $BC=b$ y $AC=c$, calcule PA.

- A) $a+b-c$ B) $2a+b-c$
C) $3a+b-c$ D) $\frac{a(c+b)}{b-a}$
E) $\frac{a(c-b)}{b-a}$

PROBLEMA N° 177

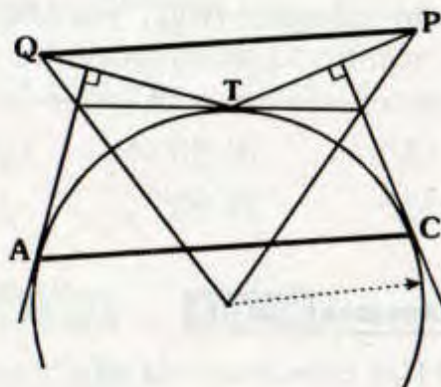
En un triángulo ABC, \overline{BL} es altura, M es punto medio de \overline{AB} , H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente, si $m\angle BAC = 70^\circ$ y $m\angle MLO = 90^\circ$, calcule $m\angle BMH$.

- A) 35° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 55°

PROBLEMA N° 178

Si A, T y C son puntos de tangencia, calcule QP/AC .

- A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5



PROBLEMA N° 179

Exteriormente al triángulo isósceles ABC de base AC se construye el cuadrado BCDE, M es el ortocentro de ACE, si $BE = \sqrt{2}$, calcule AM.

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PROBLEMA N° 180

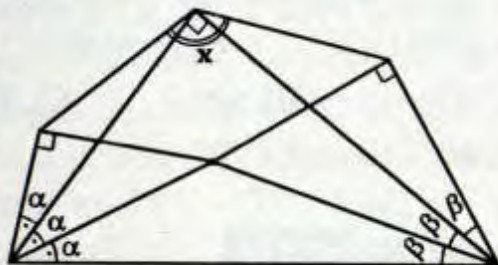
Dado un triángulo ABC, I y E son el incentro y excentro relativo a \overline{BC} respectivamente, si $AC - AB = 10$ y la suma del inradio con el exradio relativo a \overline{BC} de ABC es 24, calcule EI.

- A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 18

PROBLEMA N° 181

Calcule x.

- A) 150°
B) 145°
C) 140°
D) 137°
E) 135°



PROBLEMA N° 182

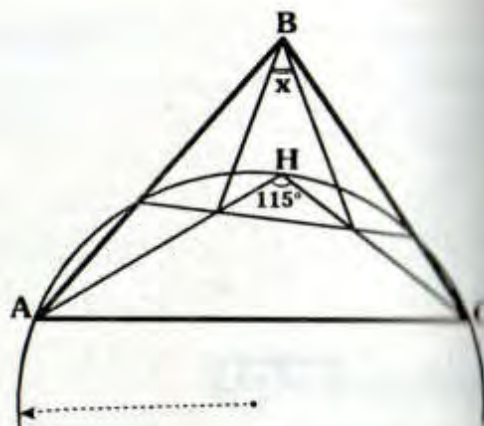
En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 120^\circ$, I es incentro O es circuncentro y E es el excentro relativo a BC, calcule $m\angle IEO$.

- A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA N° 183

Si H es ortocentro de ABC, calcule x.

- A) 35°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 55°



PROBLEMA N° 184

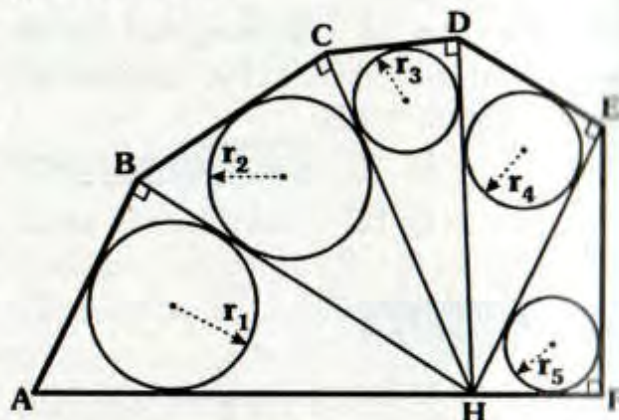
Dado un triángulo ABC, $m\angle ABC = 120^\circ$, si $AB + BC = 12$, calcule la distancia entre su circuncentro y ortocentro.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA N° 185

Si : $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = AH = 10$

Calcule el perímetro de la región hexagonal ABCDEF.

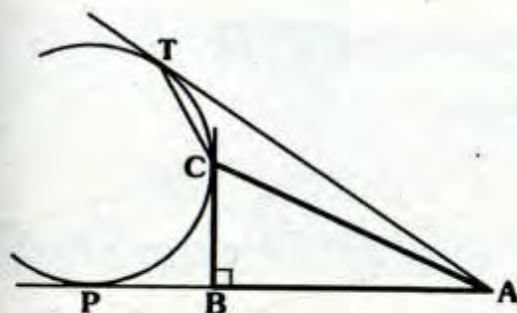


- A) 40 B) 50 C) 60
D) 70 E) 80

PROBLEMA N° 186

Si P, C y T son puntos de tangencia y $CT = 6$, calcule el máximo valor entero del inradio del $\triangle ABC$.

- A) 6
- B) 5
- C) 4
- D) 3
- E) 2



PROBLEMA N° 187

Que tipo de cuadrilátero es ABCD, si las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ACD son tangentes a \overline{AC} en el mismo punto.

- A) Trapecio
- B) Paralelogramo
- C) Inscriptible
- D) Circunscriptible
- E) Bicentrico

PROBLEMA N° 188

Que tipo de cuadrilátero se forma al unir los centros de cuatro circunferencias tangentes exteriores dos a dos.

- A) Inscriptible
- B) Circunscriptible
- C) Trapecio
- D) Paralelogramo
- E) Exinscriptible

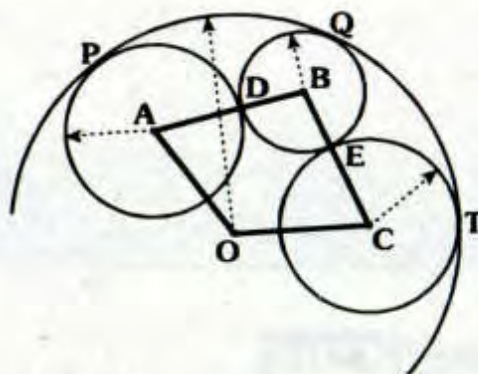
PROBLEMA N° 189

Se tiene el cuadrilátero circunscrito E, P, F y Q pertenecen a \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} respectivamente, tal que al trazar \overline{PQ} y \overline{EF} forman cuatro cuadriláteros parciales circunscritos, si $PQ=a$, calcule EF.

- A) $a/2$
- B) $3a/2$
- C) $2a$
- D) a
- E) $3a$

PROBLEMA N° 190

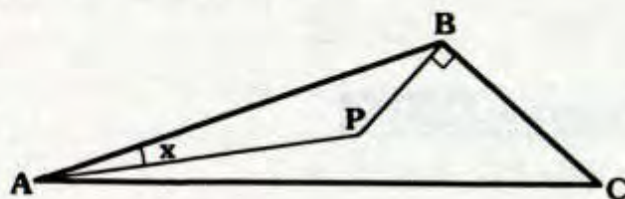
Si P, Q, T, E y D son puntos de tangencia, ¿Qué tipo de cuadrilátero es OABC?



- A) Inscriptible
- B) Circunscriptible
- C) Exinscriptible
- D) Bicentrico
- E) Trapecio

PROBLEMA N° 191

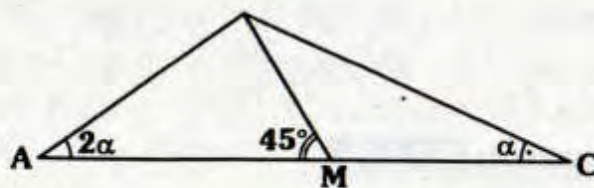
Si P es baricentro de ABC y $AP=PB+BC$, calcule x.



- A) $10,5^\circ$
- B) 12°
- C) 14°
- D) 15°
- E) $16,5^\circ$

PROBLEMA N° 192

Si $AM=MC$, calcule α .

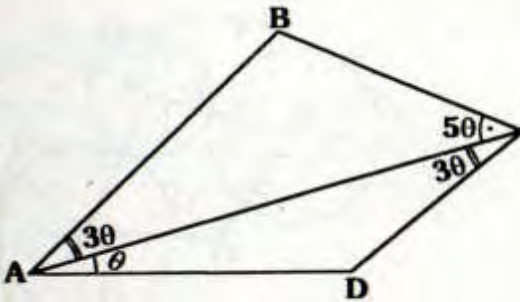


- A) 14°
- B) 15°
- C) 18°
- D) 30°
- E) $\frac{37^\circ}{2}$

PROBLEMA N° 193

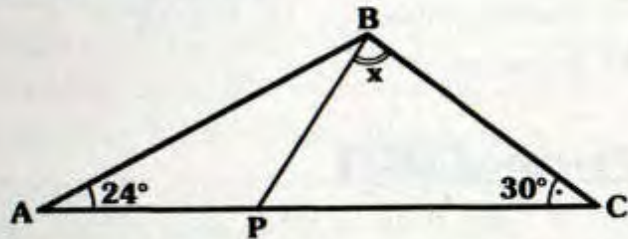
Si $AB=AD$, calcule θ .

- A) 8°
- B) 10°
- C) 12°
- D) 14°
- E) 16°



PROBLEMA N° 194

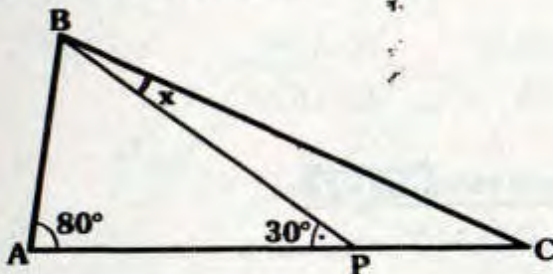
Si $AB=PC$, calcule x .



- A) 90°
- B) 92°
- C) 96°
- D) 98°
- E) 120°

PROBLEMA N° 195

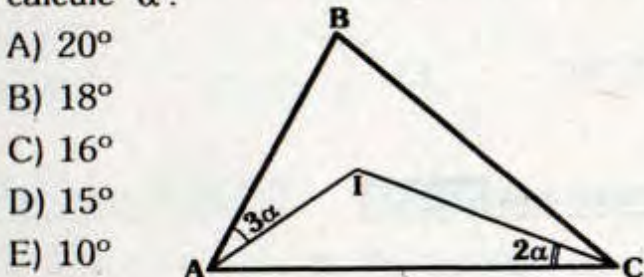
Si $AB=PC$, calcule x .



- A) 20°
- B) 15°
- C) 25°
- D) 10°
- E) $22,5^\circ$

PROBLEMA N° 196

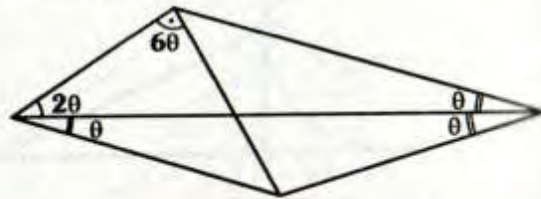
Del gráfico I es incentro de ABC, $AB=IC$, calcule α .



- A) 20°
- B) 18°
- C) 16°
- D) 15°
- E) 10°

PROBLEMA N° 197

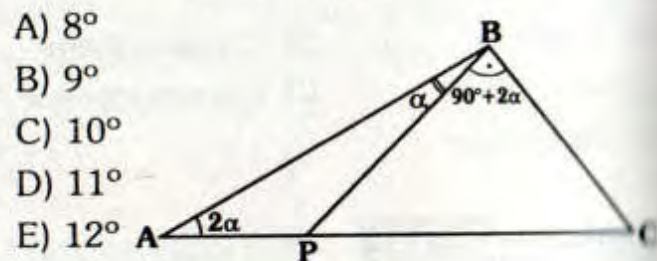
Calcule θ .



- A) 15°
- B) 10°
- C) 16°
- D) 18°
- E) 6°

PROBLEMA N° 198

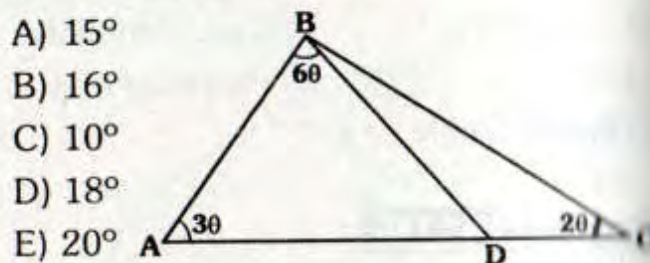
Si $AB=PC$, calcule α .



- A) 8°
- B) 9°
- C) 10°
- D) 11°
- E) 12°

PROBLEMA N° 199

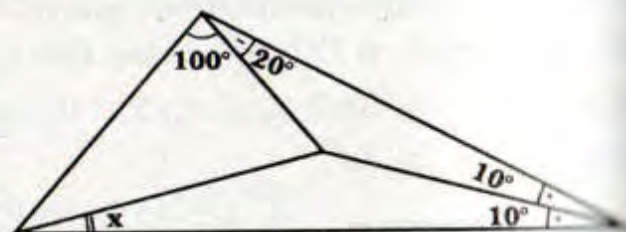
Si $AD=BC$, calcule θ .



- A) 15°
- B) 16°
- C) 10°
- D) 18°
- E) 20°

PROBLEMA N° 200

Calcule x .



- A) 14°
- B) 13°
- C) 12°
- D) 11°
- E) 10°



Problemas Resueltos

Oímpicos

PROBLEMA Nº 201

(Olimpiada Argentina - 1997 - 3er Nivel)

Sea ABCD un paralelogramo y P en su interior tal que :

$$m\angle ABP = 2(m\angle ADP) \quad y$$

$$m\angle PCD = 2(m\angle PAD)$$

Demostrar $AB=BP=CP$

PROBLEMA Nº 202

(16° Olimpiada Colombiana - 2002)

Sea ABCD un paralelogramo y \mathcal{C} la circunferencia circunscrita al triángulo ABD, sean E y F las intersecciones de \mathcal{C} con los lados BC y CD respectivamente (o sus prolongaciones). Demostrar que el circuncentro del triángulo CEF está sobre \mathcal{C} .

PROBLEMA Nº 203 10° IMO - 2002

Sea el triángulo ABC, se ubica D en el lado BC, A es equidistante del incentro de ABD y del excentro de ABC que en la bisectriz angular de B. Demostrar $CA=DC$.

PROBLEMA Nº 204

(38° Olimpiada internacional - 1997 Argentina)

En un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$) se traza la bisectriz interior CF, luego por

el circuncentro O del triángulo ABC se traza una recta perpendicular a \overline{CF} que intersecta a \overline{BC} en P, por P se traza una paralela a \overline{CF} que interseca a \overline{AB} en R.

Demostrar que $FR=BP$.

PROBLEMA Nº 205 4° Olimpiada Rusa - 1996

Sea el triángulo ABC ($CA=CB$), O es circuncentro, I es incentro, D es un punto en \overline{BC} tal que \overline{DO} es perpendicular a \overline{BI} . Demostrar que \overline{DI} es paralelo a \overline{CA} .

PROBLEMA Nº 206

(XI Olimpiada de matemáticas Rioplatense 2002)

Sea \mathcal{C} la circunferencia circunscrita y O circuncentro del triángulo ABC con $AC \neq BC$. La recta tangente a \mathcal{C} trazada por C corta a \overline{AB} en M. La recta perpendicular a \overline{OM} trazada por M corta a las rectas BC y AC en P y Q respectivamente.

Demostrar que $PM=MQ$.

PROBLEMA Nº 207

(XI Olimpiada de matemáticas Rioplatense 2002)

Sea ABC un triángulo tal que $m\angle BAC = 45^\circ$. Sean P y Q puntos inte-

riores al triángulo ABC tal que:

$$m\angle ABQ = m\angle QBP = m\angle PBC \quad y$$

$$m\angle ACQ = m\angle QCP = m\angle PCB$$

Sean D y E los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados CA y AB respectivamente. Demostrar que Q es ortocentro del triángulo ADE.

PROBLEMA N° 208

(Shariguin 1989 - problemas de planimetría - Editorial MIR. Moscú)

Demostrar que si en un triángulo un ángulo interior mide 120° , el triángulo que tiene como vértices, los pies de las bisectrices interiores, es triángulo rectángulo.

PROBLEMA N° 209

(19° Olimpiada Iberoamericana, España 2004)

Se ubica en un plano un punto P y una circunferencia. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo APB, donde \overline{AB} es diámetro de \mathcal{C} .

PROBLEMA N° 210

\mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son circunferencias tangentes exteriores en T, se ubica A en \mathcal{C}_1 ($A \neq T$) desde el cual se trazan las tangentes AP y AQ a \mathcal{C}_2 (P y Q puntos de tangencia) las cuales cortan a \mathcal{C}_1 en B y C respectivamente. Demostrar que el punto medio del segmento PQ es excentro del triángulo ABC.



SOLUCIONARIO

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

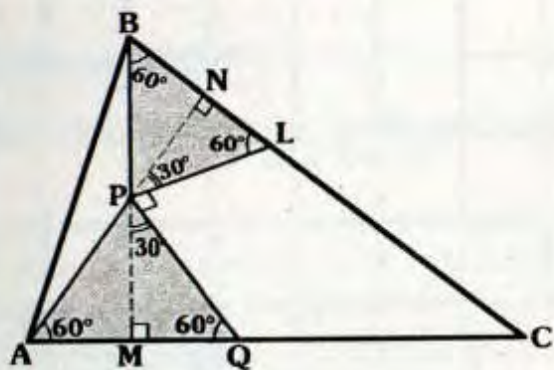


Editorial
CUZCAN
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Solucionario

Ciclo Anual

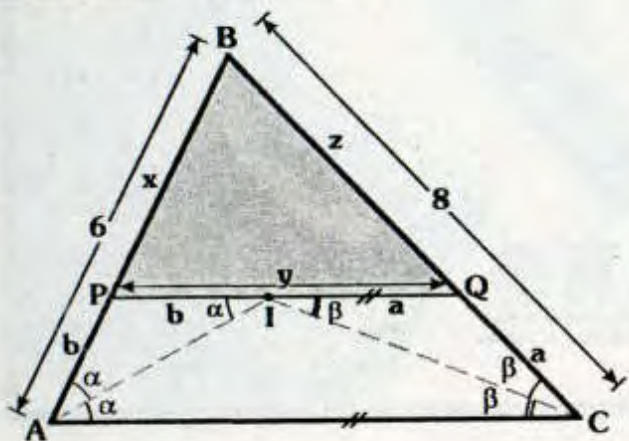
RESOLUCIÓN N° 01



- $\triangle BLP$: Por ángulo exterior:
 $m\angle LPM = 120^\circ$
 $\Rightarrow m\angle MPQ = 30^\circ$
- Se nota : $m\angle PMQ = 90^\circ$
 $\Rightarrow \overline{BM}$ es altura
- Del mismo modo \overline{AN} es altura
 $\therefore P$ es ortocentro del $\triangle ABC$.

Clave B

RESOLUCIÓN N° 02

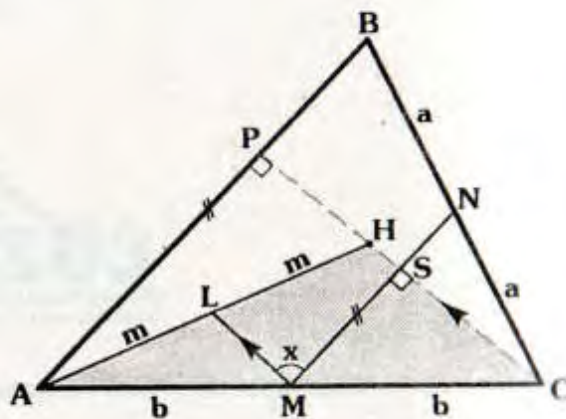


- Como "I" es incentro :
 $m\angle BAI = m\angle CAI = \alpha$ y
 $m\angle BCI = m\angle ACI = \beta$
- Por ángulos alternos internos :
 $m\angle PIA = \alpha$ y $m\angle QIC = \beta$
- $\triangle API$: Isósceles $\Rightarrow AP = PI = b$
- $\triangle IQC$: Isósceles $\Rightarrow CQ = QI = a$
- $\text{Perím.}_{\triangle BQP} = x + y + z \dots (I)$
- Se observa :

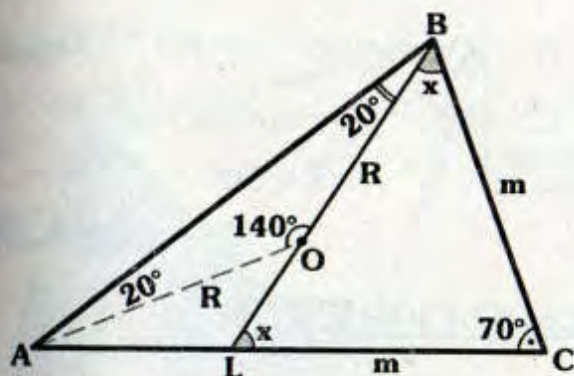
$$\begin{array}{rcl} b + x & = & 6 \\ a + z & = & 8 \\ \hline a + b + x + z & = & 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow (+) \\ \hline \end{array}$$
- En (I):
 $\therefore \text{Perím.}_{\triangle BQP} = 14$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 03



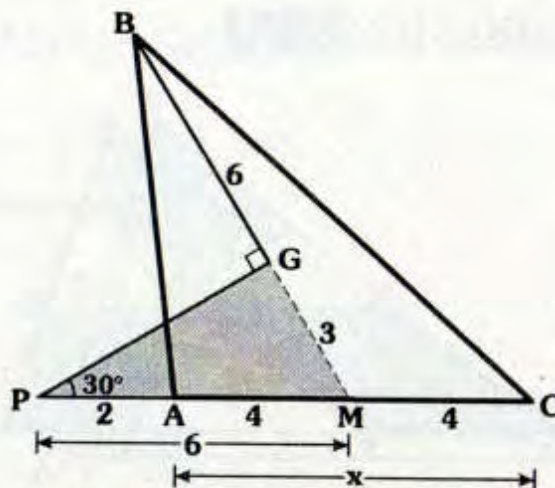
- Como "H" es ortocentro $\Rightarrow \overline{CP}$ es altura
- \overline{MN} : Base media del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle MSC = 90^\circ$
- \overline{LM} : Base media del $\triangle AHC$
 $\Rightarrow \overline{LM} \parallel \overline{HC}$
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 04**

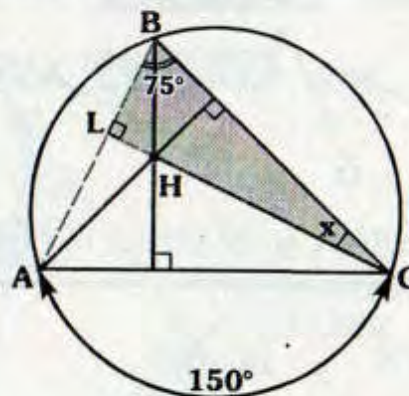
- Como O es circuncentro
 $\Rightarrow AO = OB = R$
 y $m\angle AOB = 140^\circ$
- Por teorema fundamental :
 $m\angle BCA = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$
- $\triangle LBC$: $x + x + 70^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 55^\circ$

Clave A**RESOLUCIÓN N° 05**

- Prolongamos \overline{BG} hasta que corte a \overline{AC} en M, como G es baricentro: $AM = MC$.



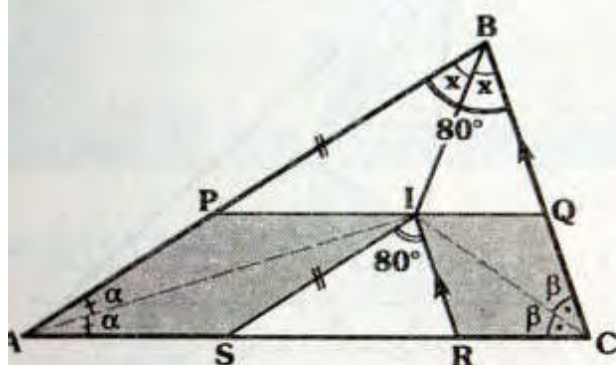
- Por teorema fundamental :
 $GM = \frac{6}{2} = 3$
- $\triangle PGM$:
 Notable de 30° y $60^\circ \Rightarrow PM = 6$
- $AM = 6 - 2 = 4$
 $\therefore x = 8$

Clave C**RESOLUCIÓN N° 06**

- Al trazar \overline{AB} , por ángulo inscrito :
 $m\angle ABC = 75^\circ$
- Se observa que H es el ortocentro del $\triangle ABC \Rightarrow \overline{CL}$ es altura
- $\triangle LBC$: $x + 75^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 15^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 07



Recordar que en el rombo la diagonal es parte de la bisectriz interior :

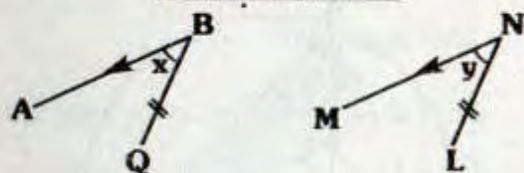
$$\Rightarrow m\angle PAI = m\angle IAS = \alpha \quad y$$

$$m\angle QCI = m\angle ICR = \beta$$

Luego : I es incentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow m\angle ABI = m\angle IBC = x$$

Observación



Si $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{BQ} \parallel \overline{NL} \Rightarrow \boxed{x = y}$

$$\overline{AB} \parallel \overline{IS} \quad y \quad \overline{BC} \parallel \overline{IR}$$

De la observación :

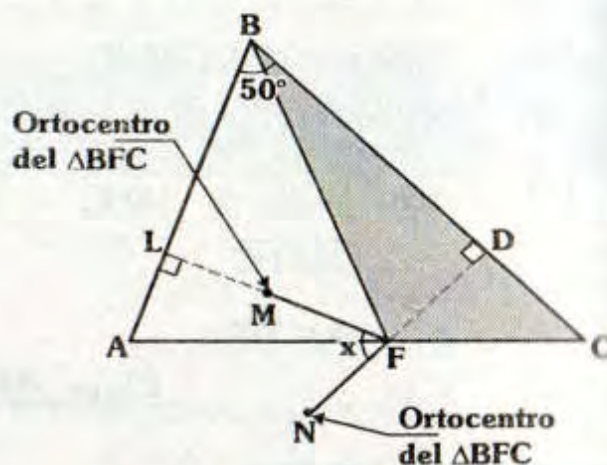
$$m\angle ABC = m\angle SIR = 80^\circ$$

En "B" : $x + x = 80^\circ$

$$\therefore \boxed{x = 40^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 08



• M : Ortocentro $\Rightarrow \overline{FL}$: Altura.

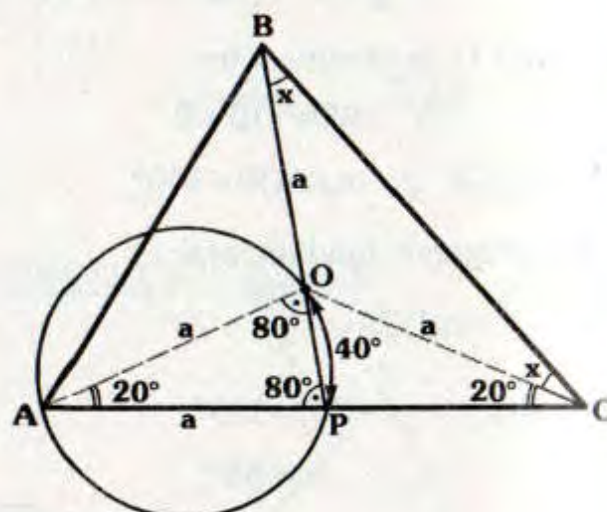
• N : Ortocentro $\Rightarrow \overline{FD}$: Altura.

• $\triangle LBDF$: Inscriptible

$$\therefore \boxed{x = 50^\circ}$$

Clave E

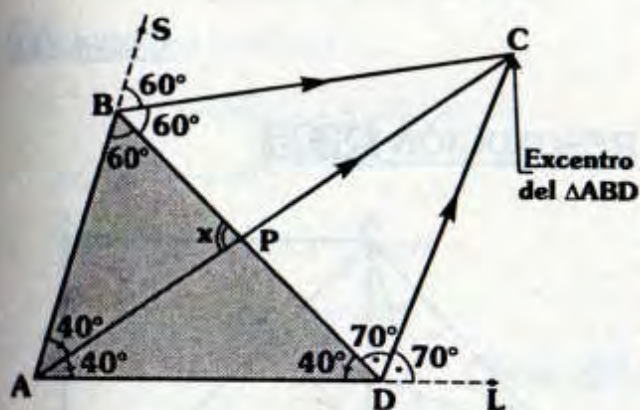
RESOLUCIÓN N° 09



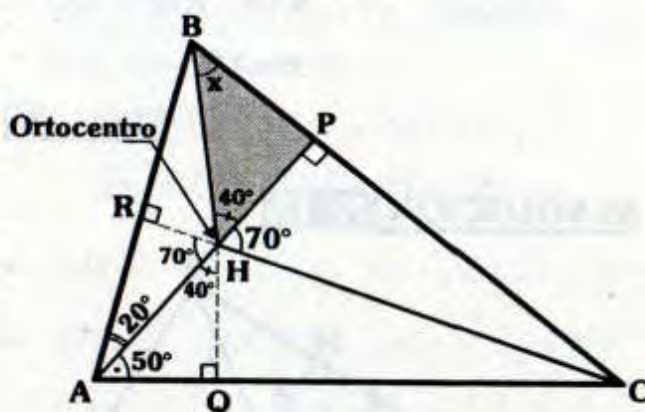
• O : Circuncentro del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow AO = BO = CO = a$

• $\triangle AOC$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle OCA = 20^\circ$

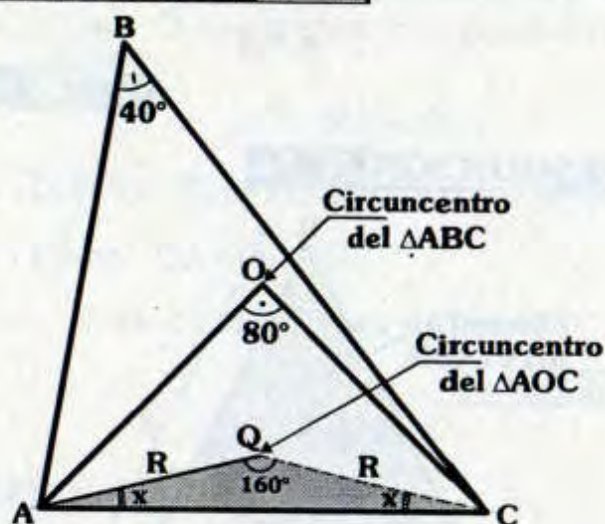
- $\triangle AOP$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle OPA = m\angle AOP = 80^\circ$
- $\triangle BOC$: Isósceles $\Rightarrow m\angle OCB = x$
- $\triangle BPC$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow x + x + 20^\circ = 80^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 10**

- Del gráfico :
 $m\angle SBC = 60^\circ$ y $m\angle CDL = 70^\circ$
- \vec{BC} y \vec{DC} son bisectriz exteriores
 $\Rightarrow \vec{AC}$: Bisectriz del $\angle BAD$
- Como:
 $m\angle BAD = 80^\circ \Rightarrow m\angle CAD = 40^\circ$
- $\triangle APD$: $40^\circ + 40^\circ = x$
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave B**RESOLUCIÓN N° 11**

- Prolongamos \overline{CH} hasta que corte a \overline{AB} en R, con lo cual nos damos cuenta que \overline{CR} es altura $\Rightarrow H$ es ortocentro del $\triangle ABC$.
- Por el criterio principal: \overline{BQ} es altura.
- En $\triangle HPB$: $x + 40^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 50^\circ$

Clave C**RESOLUCIÓN N° 12**

- Por teorema fundamental :
 $\triangle ABC$: $m\angle AOC = 2(40^\circ) = 80^\circ$
 $\triangle AOC$: $m\angle AQC = 2(80^\circ) = 160^\circ$

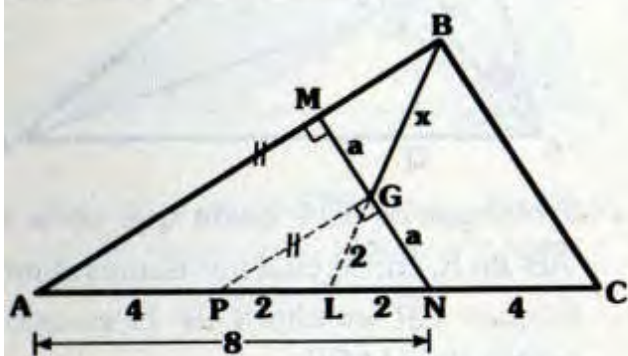
• ΔAQC :

Isósceles $\Rightarrow x + x + 160^\circ = 180^\circ$

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 13



• Al prolongar \overline{BG} , \overline{BL} es mediana
 $\Rightarrow AL = LC = 6$

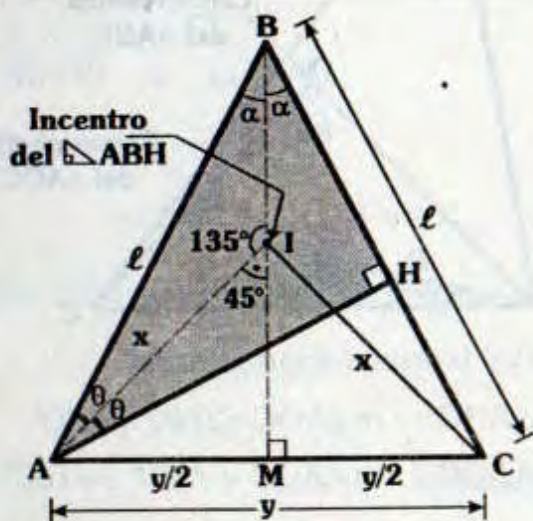
• \overline{GP} : Base media ΔAMN
 $\Rightarrow m\angle PGN = 90^\circ$ y $AP = PN = 4$

• ΔPGN : Como $PN = LN \Rightarrow GL = 2$

• Por teorema fundamental: $x = 2(GL)$
 $\therefore x = 4$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 14



• I: Incentro $\Rightarrow \overline{BI}$ bisectriz y

$$m\angle AIB = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ$$

(Teorema Fundamental)

• Como el ΔABC es isósceles

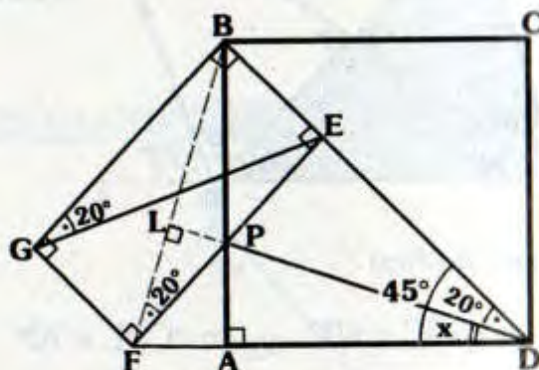
$$\Rightarrow AM = MC = \frac{y}{2} \text{ y } AI = x$$

• ΔAMI : Notable $\Rightarrow x = \frac{y\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 15



• BEFG: Rectángulo

$$\Rightarrow m\angle BFE = m\angle BGE = 20^\circ$$

• P: Ortocentro del ΔFBD

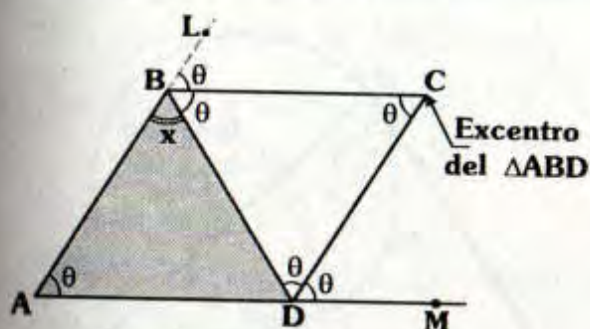
$\Rightarrow \overline{DL}$ es altura

• ABCD: Cuadrado $\Rightarrow m\angle BDA = 45^\circ$

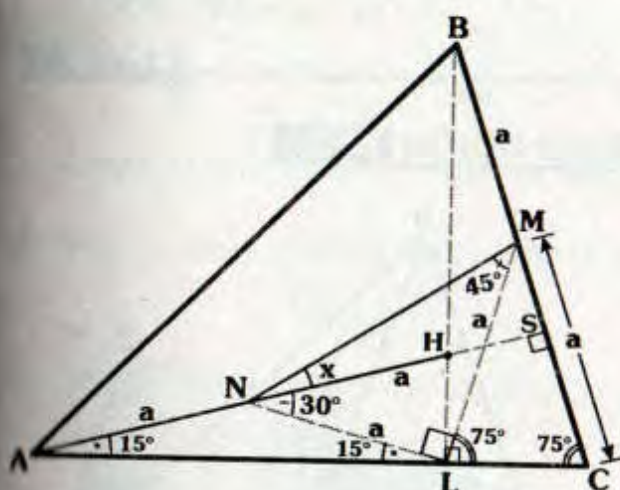
• En "D": $x + 20^\circ = 45^\circ$

$$\therefore x = 25^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 16

- Como ABCD es un paralelogramo :
 $m\angle LBC = m\angle BAD = m\angle BCD = \theta$
- C es excentro del $\triangle ABD$
 $\Rightarrow m\angle LBC = m\angle CBD = \theta$
- En forma análoga :
 $m\angle MDC = m\angle CDB = \theta$
- $\triangle CBD : \theta = 60^\circ$
- En "B" : $\theta + \theta + x = 180^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave B**RESOLUCIÓN N° 17**

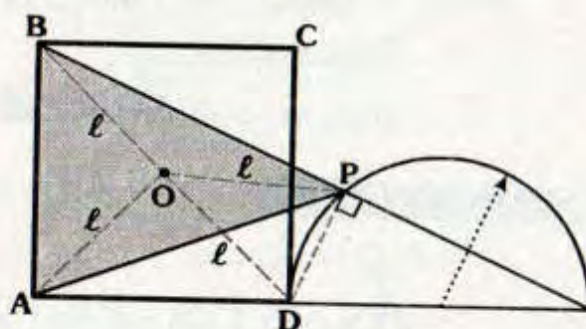
- Como H es ortocentro : \overline{AS} y \overline{BL} son alturas.

- $\triangle ASC : m\angle SAC = 15^\circ$
- Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en :

$$\triangle AHL : AN = NH = NL = a$$

$$\triangle BLC : BM = MC = ML = a$$

- $\triangle ANL$: Isósceles $\Rightarrow m\angle ALN = 15^\circ$
- $\triangle NLM$: Notable $\Rightarrow x + 30^\circ = 45^\circ$
 $\therefore x = 15^\circ$

Clave E**RESOLUCIÓN N° 18**

- Como O es centro del cuadrado ABCD
 $\Rightarrow AO = BO = DO = l$
- $\triangle BPD$: Teorema de la $\triangle \Rightarrow OP = l$
- Como $OA = OB = OP$
 $\therefore O$ es circuncentro del $\triangle ABP$

Clave C**RESOLUCIÓN N° 19**

- \overline{BL} y \overline{CD} son alturas
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{BC} = 120^\circ$
- $\triangle ABL : m\angle ABL = 30^\circ$

- Prolongamos \overline{BG} hasta que corte a \overline{AC} en N, entonces $AN=NC=m$.

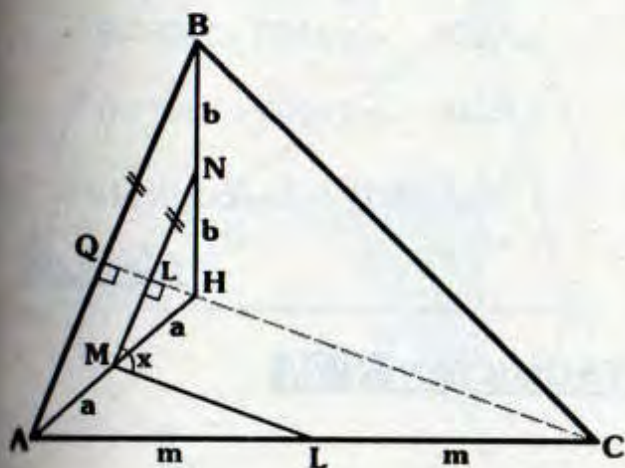
- Por teorema fundamental :

$$GN = \frac{6}{2} = 3$$

- \overline{MN} es base media del trapecio AQPC :

$$\frac{x+y}{2} = 4$$

$$\therefore x + y = 8$$

Clave E**RESOLUCIÓN N° 23**

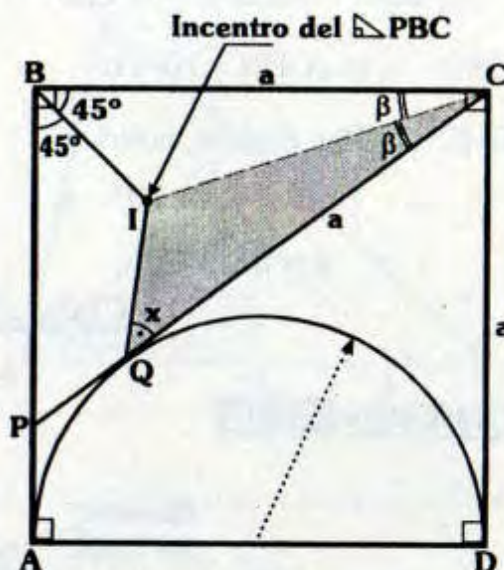
- Como H es ortocentro : \overline{CQ} es altura

- \overline{MN} : Base media del $\triangle ABH$
 $\Rightarrow \overline{CL} \perp \overline{MN}$

- \overline{ML} : Base media del $\triangle AHC$
 $\Rightarrow \overline{ML} \parallel \overline{CH}$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 24

- Como I es incentro :

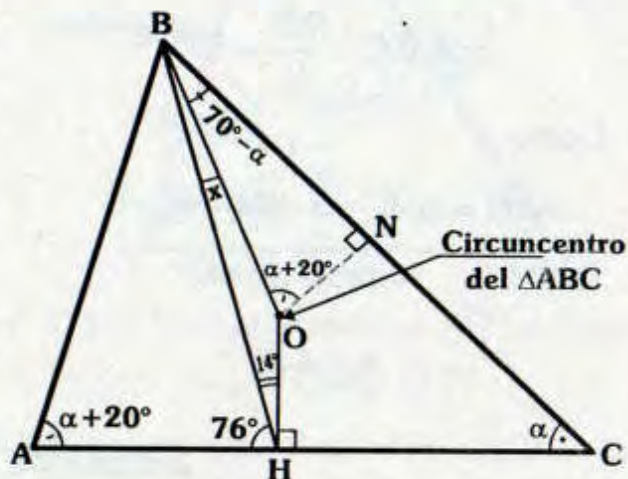
$$m\angle PBI = m\angle IBC = 45^\circ$$

$$m\angle BCI = m\angle ICQ$$
- Como \overline{CQ} y \overline{CD} son tangentes

$$\Rightarrow CQ = CD = a$$
- $\triangle BCI \cong \triangle QCI$ (L.A.L.)

$$\therefore x = 45^\circ$$

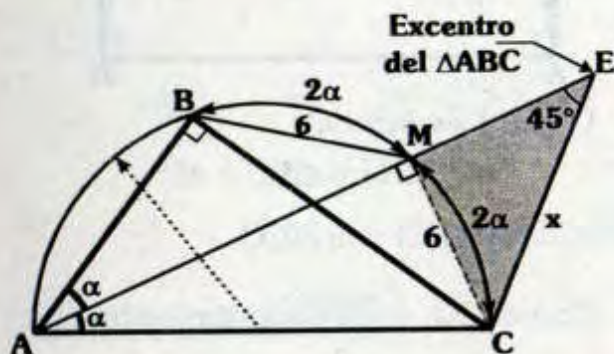
Clave D

RESOLUCIÓN N° 25

- Por teorema fundamental :
 $m\angle BON = m\angle BAC = \alpha + 20^\circ$
- $\triangle BNO$: $m\angle OBN = 70^\circ - \alpha$
- $\triangle BHC$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow 76^\circ = \alpha + x + 70^\circ - \alpha$
 $\therefore x = 6^\circ$

Clave C

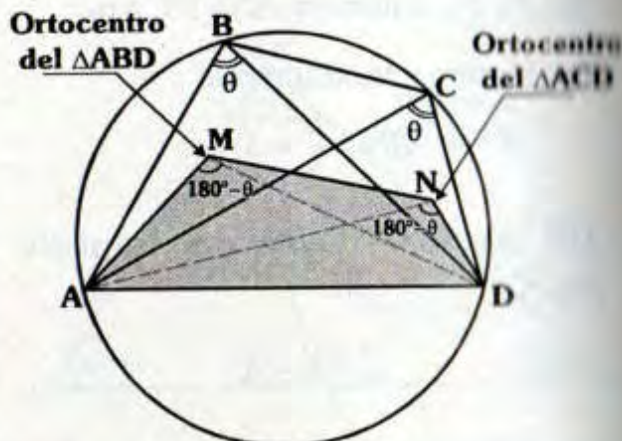
RESOLUCIÓN N° 26



- Por teorema :
 $\Rightarrow m\angle ABC = m\angle AMC = 90^\circ$
- E : Excentro del $\triangle ABC$:
 $\Rightarrow m\angle BAE = m\angle EAC = \alpha$
- Por teorema fundamental :
 $m\angle AEC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
- Como :
 $m\widehat{BM} = m\widehat{MC} \Rightarrow BM = MC = 6$
- $\triangle EMC$: Notable de 45°
 $\therefore x = 6\sqrt{2}$

Clave A

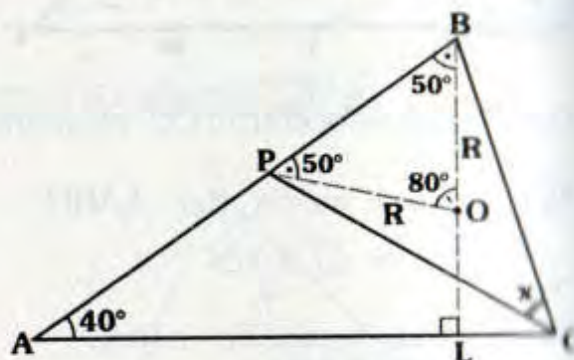
RESOLUCIÓN N° 27



- Por ángulo inscrito :
 $m\angle ABD = m\angle ACD = \theta$
- Como M y N son ortocentros, por teorema fundamental :
 $\triangle ABD$: $m\angle AMD = 180^\circ - \theta$
 $\triangle ACD$: $m\angle AND = 180^\circ - \theta$
 $\therefore \triangle AMND$: Inscriptible

Clave III

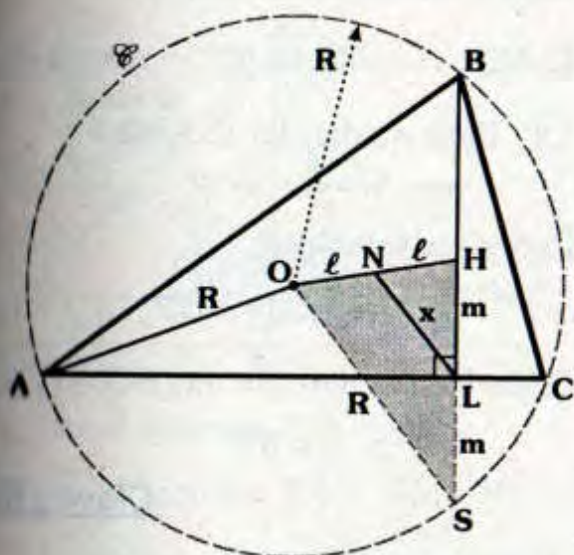
RESOLUCIÓN N° 28



- O : Ortocentro del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow \overline{BL}$ es altura y en $\triangle ALB$:
 $m\angle ABL = 50^\circ$

- O : Circuncentro del $\triangle PBC$
 $\Rightarrow BO = OP = R$
- $\triangle PBO$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle BPO = 50^\circ$ y
 $m\angle BOP = 80^\circ$
- Por teorema fundamental de circuncentro en $\triangle PBC$:

$$\therefore x = \frac{80^\circ}{2}$$

Clave  **E****RESOLUCIÓN N° 29**

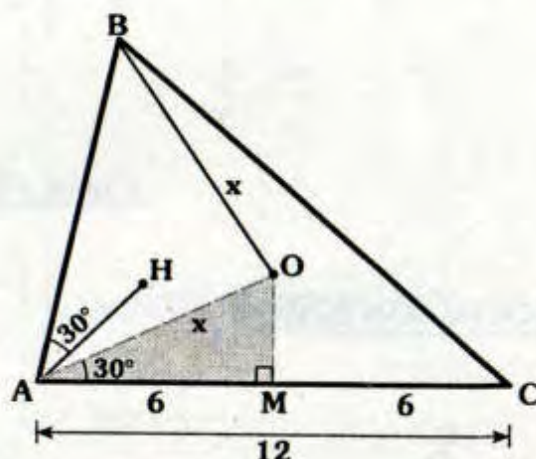
- Se observa que R es el circunradio del :

$$\Delta ABC \Rightarrow OS=R$$

- Teorema 9.5. : $HL=LS=m$

- \overline{NL} : Base media del ΔOHS

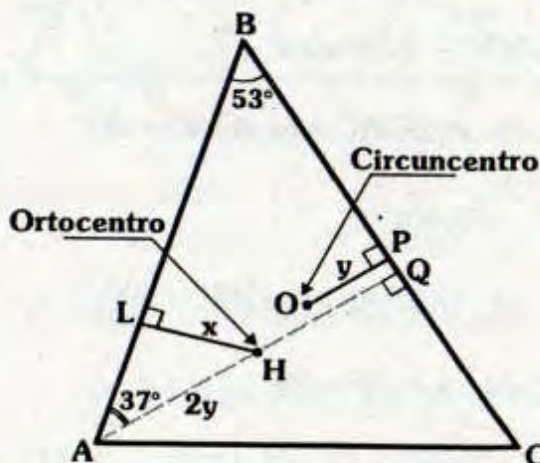
$$\therefore \frac{R}{x} = 2$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 30**

- O : Circuncentro $\Rightarrow OA=OB=x$
- Por el teorema 9.4 :
 $m\angle OAC = m\angle HAB = 30^\circ$ y
 $AM=MC=6$

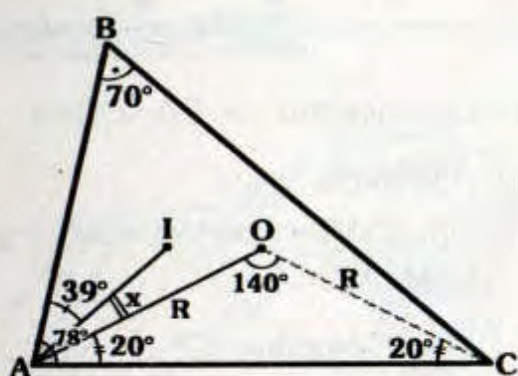
- $\triangle OMA$: Notable 30° y 60°

$$\therefore x = 4\sqrt{3}$$

Clave **C****RESOLUCIÓN N° 31**

- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AQ}$ es altura
 $\Rightarrow m\angle BAQ = 37^\circ$
- Por el teorema 9.6: $AH = 2(OP) = 2y$

- $$\therefore \frac{x}{v} = \frac{6}{5}$$

RESOLUCIÓN N° 32

- $$\therefore x = 19^\circ$$

Clave **B**

- $$\therefore x = 37^\circ$$

Clave

Diagram illustrating the geometric construction of the orthocenter of a triangle ABC . The orthocenter is labeled I . The orthocenter of the orthic triangle is labeled T . The circumcenter of the orthic triangle is labeled F . The orthic triangle is shaded. The diagram includes various angles (37° , $37^\circ/2$, 45°) and lengths (7 , 3 , 4 , $3\sqrt{2}$).

- Al trazar la circunferencia inscrita :
 $IT=BT=3$

- $\triangle FTI$: Notable $\Rightarrow m\angle TFI=37^\circ$

- Como $\overline{AC} \parallel \overline{FI} \Rightarrow m\angle BAC=37^\circ$

- I : Incentro

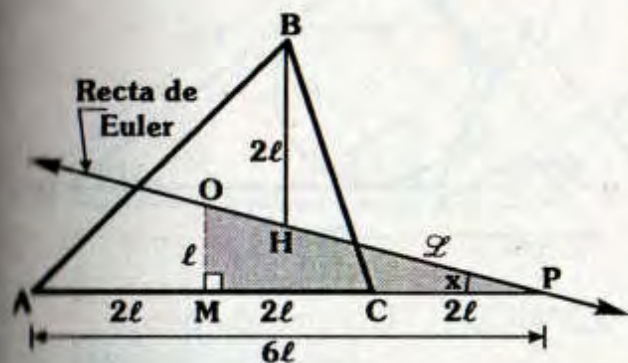
$$\Rightarrow m\angle BAI = m\angle IAC = 37^\circ/2$$

- $\triangle ATI$: Notable de $37^\circ/2 \Rightarrow AT=9$

$$\therefore x=5$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 35



- Por el teorema 9.6: $OM=l$

- Por el teorema 9.4: $AM=MC=2l$

- $\triangle OMP$: Notable: $MP=4(OM)$

$$\therefore x=14$$

Clave A

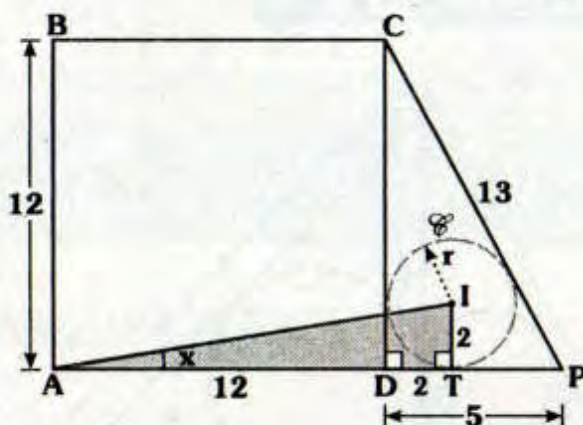
RESOLUCIÓN N° 36

- $\triangle CDP$: $(CD)^2=13^2-5^2$

$$\Rightarrow CD=12$$

- $\triangle CDP$: Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow 5+12=13+2r \Rightarrow r=2$$



- Por teorema :

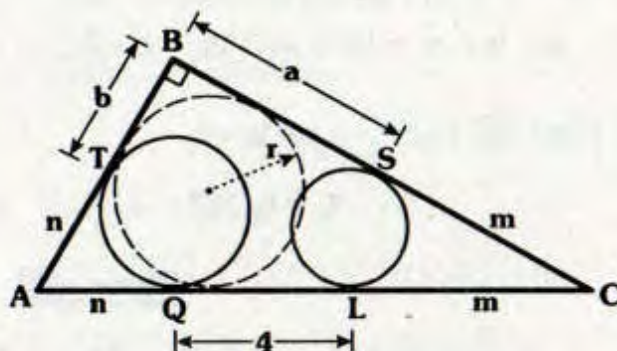
$$DT=TI=2$$

- $\triangle ATI$: Notable : $AT=7(IT)$

$$\therefore x=8^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 37



- Por teorema:

$$AT=AQ=n \text{ y } CS=CL=m$$

- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow b+n+a+m=m+n+4+2r$$

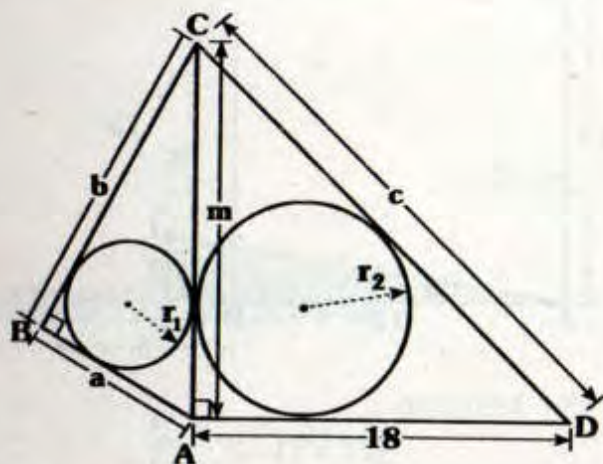
- Pero : $a+b=10$ (dato)

$$\Rightarrow 10=4+2r$$

$$\therefore r=3$$

Clave E

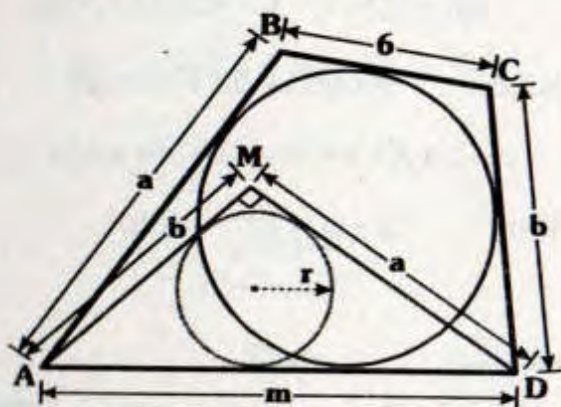
RESOLUCIÓN N° 38



- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet :
 $a + b = m + 2r_1$... (I)
- $\triangle CAD$: Teorema de Poncelet :
 $m + 18 = c + 2r_2$... (II)
- (I) + (II) :
 $a + b + m + 18 = m + 2r_1 + c + 2r_2$
- Pero del dato : $a + b = c$
 $\therefore r_1 + r_2 = 9$

Clave C

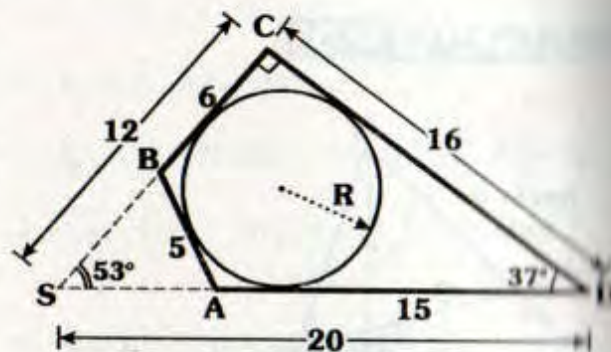
RESOLUCIÓN N° 39



- $\triangle ABCD$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow a + b = 6 + m$... (I)
- $\triangle AMD$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow a + b = m + 2r$... (II)
- De (I) y (II) : $6 + m = m + 2r$
 $\therefore r = 3$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 40



- $\triangle ABCD$: Teorema de pitot
 $\Rightarrow CD + 5 = 6 + 15$
 $\Rightarrow CD = 16$
- Prolongamos \overline{CB} y \overline{CA} hasta que se corten en "S".
- $\triangle SCD$: es notable de 37° y 53°
 $\Rightarrow SC = 12$ y $SD = 20$
- $\triangle SCD$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow 12 + 16 = 20 + 2R$
 $\therefore R = 4$

Clave B

Solucionario

Ciclo Cepre-Uni

RESOLUCIÓN N° 41

I. Proposición Falsa

Por teorema el baricentro de un triángulo es el baricentro de su respectivo triángulo mediano. (Ver teorema 11.2).

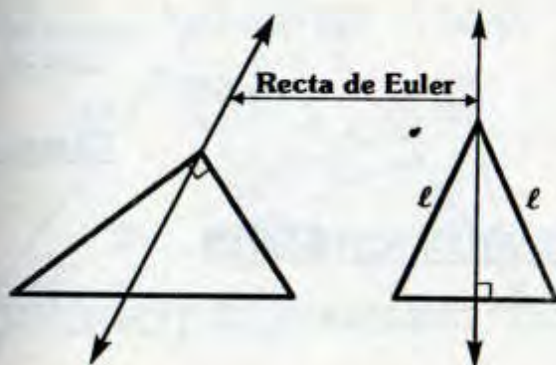
II. Proposición Verdadera



Se nota que el incentro siempre es un punto interior al triángulo.

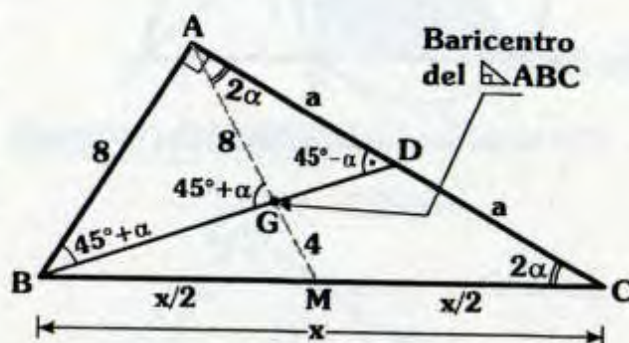
III. Proposición Falsa

La recta de Euler pasa por un vértice en los triángulos isósceles y rectángulo.



Clave **C**

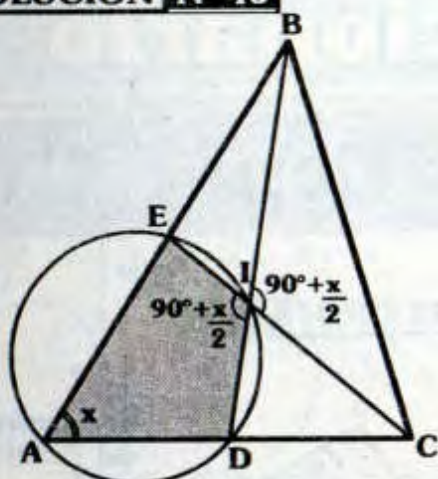
RESOLUCIÓN N° 42



- Trazamos la mediana AM.
- $\triangle BMC$: $BM = MC = AM = x/2$
- $\triangle AMC$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle MAC = 2\alpha$
- Se observa :
 $m\angle AGB = 2\alpha + 45^\circ - \alpha = 45^\circ + \alpha$
- $\triangle ABG$: Isósceles $\Rightarrow AG = 8$
- G : Baricentro del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow GM = \frac{8}{2} = 4$
- Pero : $\frac{x}{2} = 12$
 $\therefore x = 24$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 43



Por teorema fundamental del incentro:

$$m\angle BIC = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

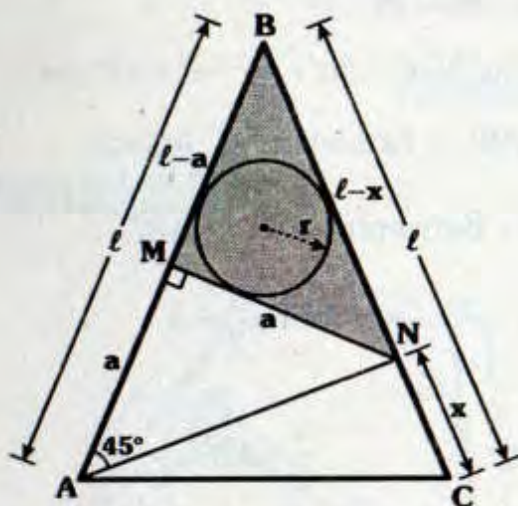
$\triangle AEID$: Inscrito

$$\Rightarrow x + 90^\circ + \frac{x}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 44



$\triangle AMN$: Notable de 45°

$$\Rightarrow AM = MN = a$$

- Por diferencia :

$$BN = l - x \quad y \quad BM = l - a$$

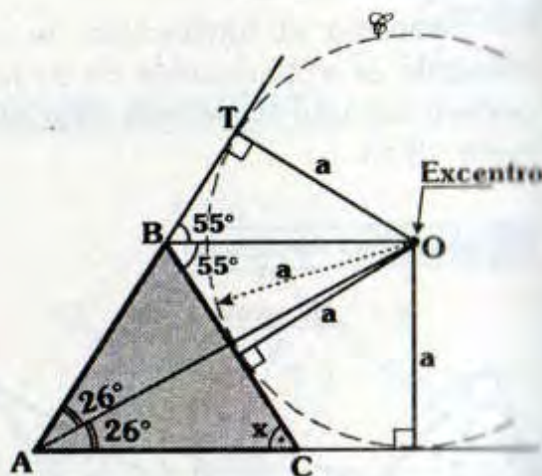
- $\triangle BMN$: Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow l - a + a = l - x + 2r$$

$$\therefore x = 2r$$

Clave II

RESOLUCIÓN N° 45



- Con centro en O y radio "a", trazamos la circunferencia \mathcal{C} .

- Notamos que O es excentro, se cumple :

$$m\angle CAO = m\angle BAO = 26^\circ \quad y$$

$$m\angle TBO = m\angle OBC = 55^\circ$$

- $\triangle ABC$: $52^\circ + x = 110^\circ$

$$\therefore x = 58^\circ$$

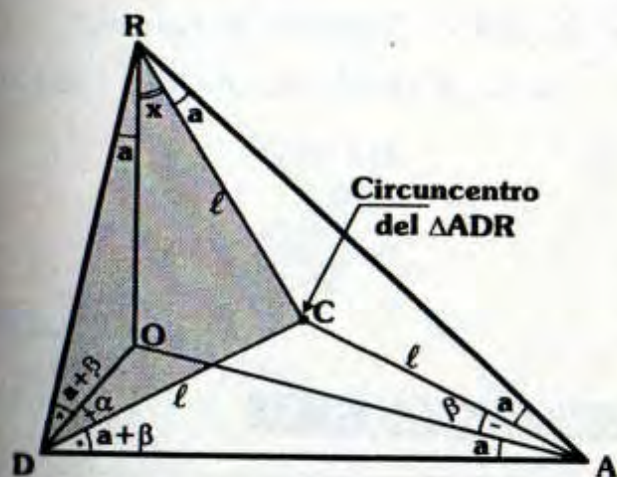
Clave II

RESOLUCIÓN N° 46

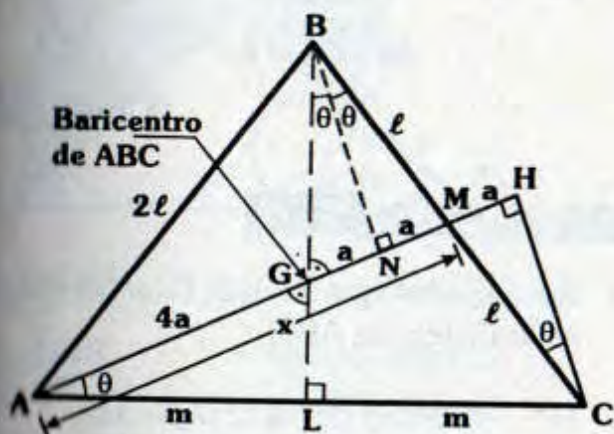
- C : Circuncentro $\Rightarrow DC = RC = AC = l$

- $\triangle RCA$: Isósceles

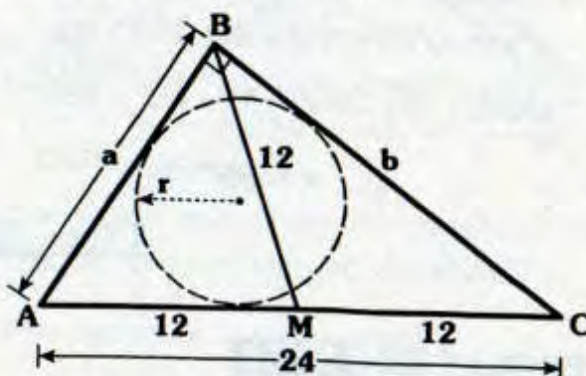
$$\Rightarrow m\angle CRA = m\angle CAR = a$$



- Por el teorema 9.4 :
 $m\angle ORD = a$ y $m\angle OAD = a$
- $\triangle DCA$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle CDA = a + \beta$
- Por el teorema 9.4: $m\angle RDO = a + \beta$
- $\triangle CDR$: Isósceles
 $\Rightarrow a + x = a + \underbrace{\beta + \alpha}_{38^\circ}$
 $\therefore x = 38^\circ$

Clave B**RESOLUCIÓN N° 47**

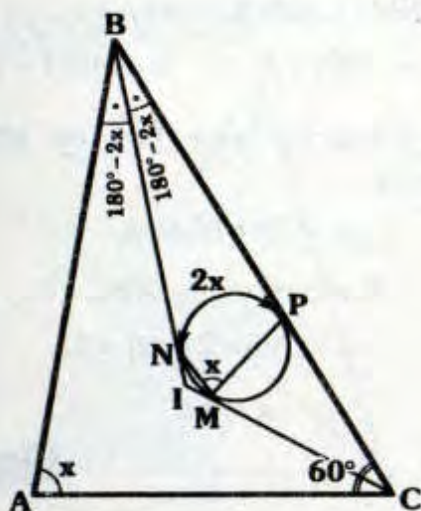
- $\triangle BNM \equiv \triangle MHC$ (ALA)
 $\Rightarrow MN = a$ y $m\angle MBN = \theta$
- Se observa que \overline{BN} es altura y bisectriz
 $\Rightarrow GN = NM = a$
- G : Baricentro de ABC
 $\Rightarrow AG = 2(2a) = 4a$
 $\therefore x = 6a$

Clave E**RESOLUCIÓN N° 48**

- Sabemos que la mediana de menor longitud es la mediana relativa a la hipotenusa.
- $\triangle ABC$: $AM = MC = 12 \Rightarrow AC = 24$
- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow \underbrace{a+b}_{32 \text{ (dato)}} = 24 + 2r$
 $\therefore r = 4$

Clave B**RESOLUCIÓN N° 49**

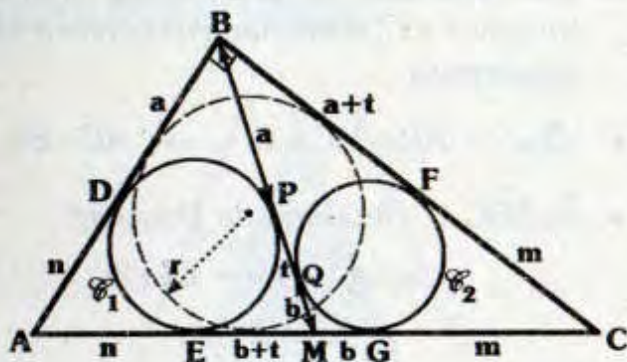
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{NP} = 2x$
- $m\angle NBP + 2x = 180^\circ$ (teorema de circunferencia)
 $\Rightarrow m\angle NBP = 180^\circ - 2x$



- I : Incentro
 $\Rightarrow m\angle ABI = m\angle CBI = 180^\circ - 2x$
- $\triangle ABC : x + 360^\circ - 4x + 60^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 80^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 50

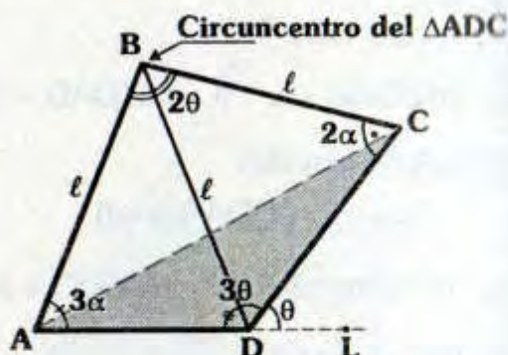


- Por tangentes :
 En \mathcal{C}_1 : $BD = a$, $AD = AE = n$ y $MP = ME = b + t$
 En \mathcal{C}_2 : $BF = a + t$, $MG = b$ y $CF = CG = m$

- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow a + n + a + x + m = n + b + x + m + 2r$
 $2(a - b) = 2r$
 $\therefore r = \ell$

Clave I

RESOLUCIÓN N° 51

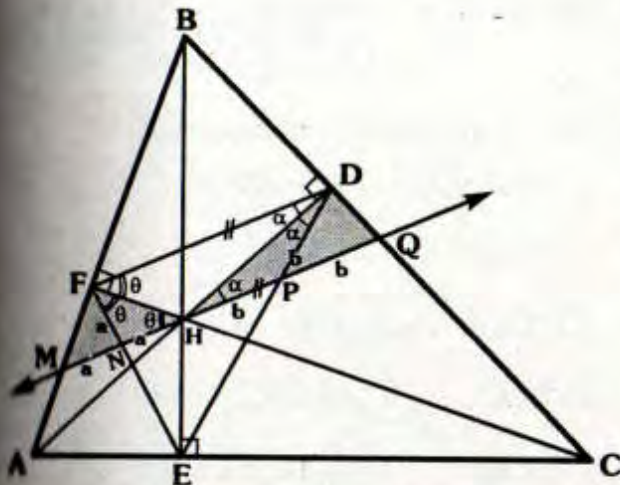


- Como $AB = BD = BC = \ell$:
 $\Rightarrow B$: Circuncentro de $\triangle ADC$
- Por teorema fundamental :
 $m\angle CDL = \frac{2\theta}{2} = \theta$
- En "D" : $3\theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$
 $\therefore 3\theta - 2\theta = 45^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 52

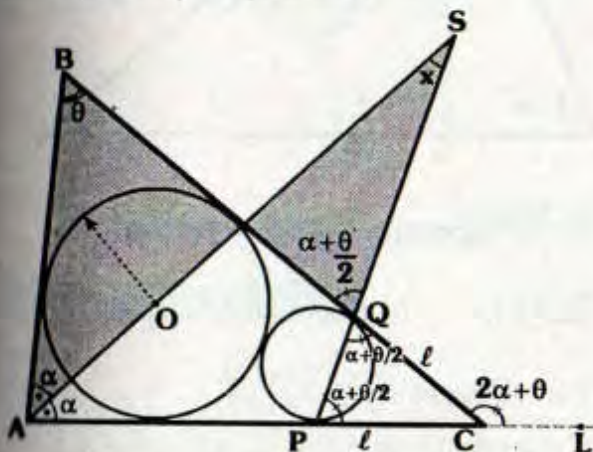
- Se observa que el $\triangle EFD$ es el triángulo órtico de $\triangle ABC$.
- H : Incentro del $\triangle EFD$ (Teorema 11.6)
 $\Rightarrow m\angle DFH = m\angle EFH = \theta$ y $m\angle FDH = m\angle EDH = \alpha$



- Por ángulos alternos :
 $m\angle FHM = \theta$ y $m\angle DHQ = \alpha$
- Por el teorema \triangle :
 $\triangle FMH : MN = NH = a$
 $\triangle HDQ : HP = PQ = b$
 $\therefore MQ = 2(a + b)$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 53

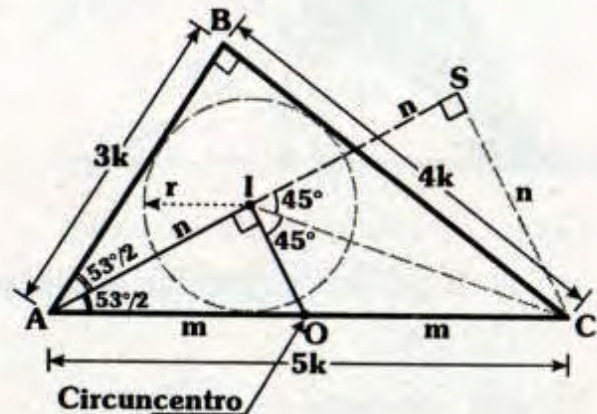


- Se sabe : $m\angle BAO = m\angle CAO = \alpha$
- $\triangle ABC$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow m\angle BCL = 2\alpha + \theta$
- $\triangle PQC$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle PQC = m\angle QPC = \alpha + \frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned} \cdot \quad \nabla : \quad \alpha + \theta &= x + \alpha + \frac{\theta}{2} \\ \therefore x &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Clave A

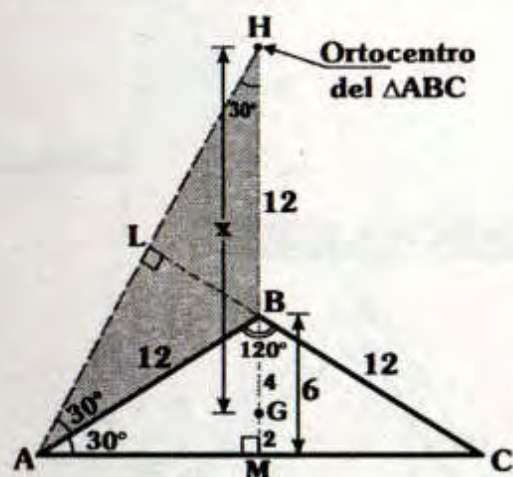
RESOLUCIÓN N° 54



- Sabemos que el punto medio O de \overline{AC} es el circuncentro del $\triangle ABC$.
- Por teorema fundamental :
 $m\angle AIC = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} \Rightarrow m\angle OIC = 45^\circ$
- Luego prolongamos \overline{AI} hasta S, tal que:
 $m\angle ISC = 90^\circ$
- \overline{OI} : Base media del $\triangle ASC$
 $\Rightarrow AI = IS = n$
- $\triangle ISC$: Notable $\Rightarrow IS = SC = n$
- $\triangle ASC$: Notable $\Rightarrow m\angle SAC = \frac{53^\circ}{2}$
- $\triangle ABC$: Notable
 $\Rightarrow AB = 3k$, $BC = 4k$ y $AC = 5k$
- Teorema de Poncelet :
 $3k + 4k = 5k + 2r \Rightarrow k = r$
 $\therefore \text{Perím. } \triangle ABC = 12r$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 55



Como el triángulo es isósceles
 \Rightarrow H, B y G son colineales, además
 $\overline{HG} \perp \overline{AC}$.

$\triangle ABM$: Notable $\Rightarrow BM=6$

G : Baricentro $\Rightarrow BG = 2(GM) = 4$

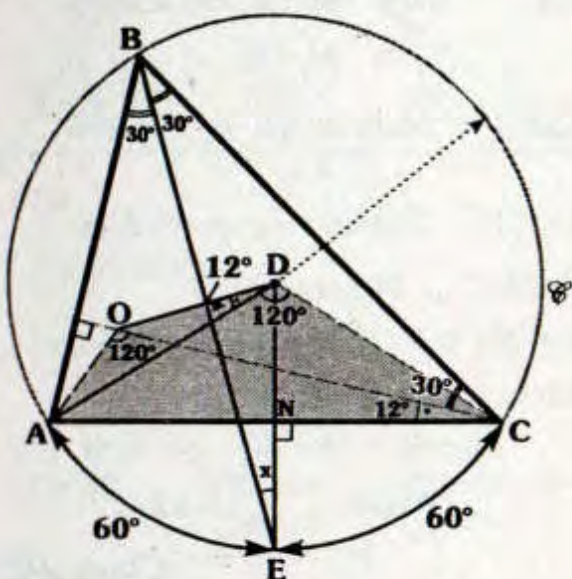
H : Ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ es altura

$\triangle ABH$: Isósceles $\Rightarrow BH=12$

$$\therefore x = 16$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 56



• Sabemos :

$$m\widehat{AE} = m\widehat{EC} = 60^\circ$$

• Por teoremas fundamentales :

$$m\angle AOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$m\angle ADC = 2(60^\circ) = 120^\circ$$

• $\triangle AODC$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle OCA = 12^\circ$

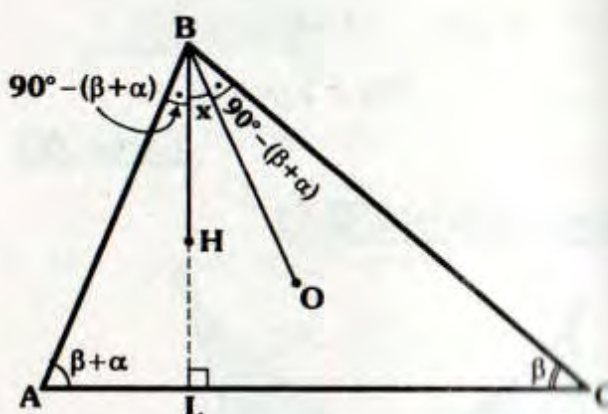
• $\triangle BLC$: $m\angle BCL = 30^\circ$

• $\triangle BCNE$: $30^\circ + 42^\circ + x = 90^\circ$

$$\therefore x = 18^\circ$$

Clave I

RESOLUCIÓN N° 57



• H: Ortocentro $\Rightarrow \overline{BL}$ es altura.

• $\triangle ALB$: $m\angle ABL = 90^\circ - (\beta + \alpha)$

• Por el teorema 9.1:

$$m\angle OBC = m\angle ABL = 90^\circ - (\beta + \alpha)$$

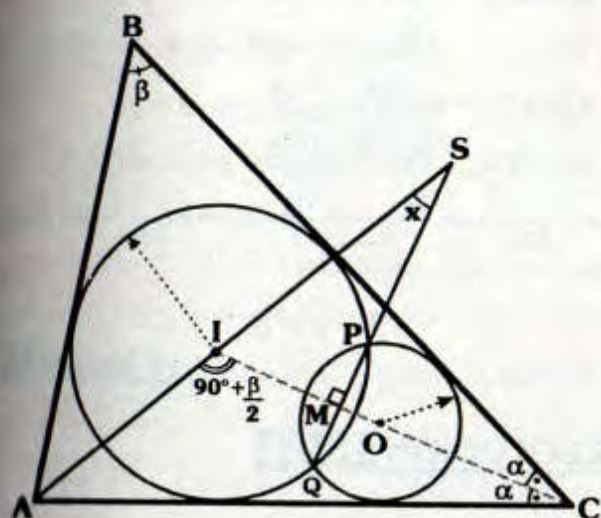
• $\triangle BLC$:

$$x + 90^\circ - (\beta + \alpha) + \beta = 90^\circ$$

$$\therefore x = \alpha$$

Clave C

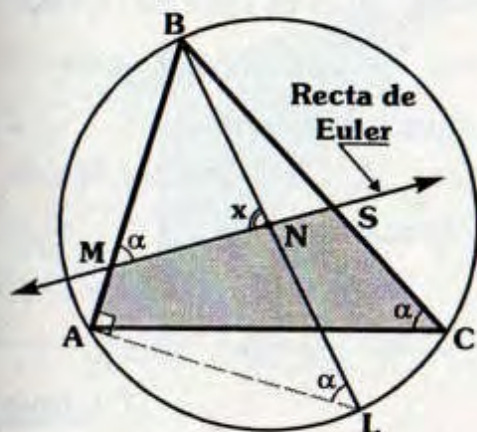
RESOLUCIÓN N° 58



- Del gráfico : $m\angle BCI = m\angle ACI = \alpha$
- $m\angle AIC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ (teorema fundamental)
- Por teorema de circunferencia :
 $\overline{PQ} \perp \overline{OI}$
- $\triangle SMI : 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + x$
 $\therefore x = \frac{\beta}{2}$

Clave B

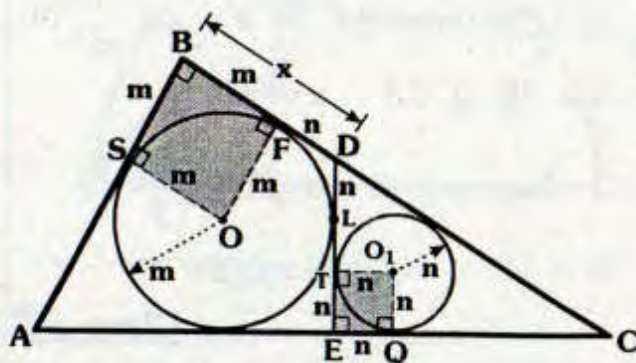
RESOLUCIÓN N° 59



- \overline{BL} : Diámetro $\Rightarrow m\angle BAL = 90^\circ$
- $\triangle AMSC$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle SCA = m\angle SMB = \alpha$
- Por ángulo inscrito $\Rightarrow m\angle BLA = \alpha$
- $\triangle AMNL$: Inscriptible
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 60



- OSBF y O_1TEQ : Cuadrados
 $\Rightarrow BF = m$ y $TE = n$
- Por teorema : $DL = TE = n$
- $DF = DL = n$
- Se observa : $x = m + n$
- Por dato : $m + n = 10$
 $\therefore x = 10$

Clave D

- Clave
-
- C

- $\triangle AID : m\angle LID = \alpha$
- $\triangle AQI : m\angle AIF = 90^\circ + \alpha$
- ID : Bisectriz del $\angle LIF \Rightarrow IF = r$
- QBEF : Rectángulo $\Rightarrow x = 2r$
- $\triangle ABC$: Teorema de poncelet
 $\Rightarrow \underbrace{a + b}_{34 \text{ (dato)}} = 26 + 2r$
 $\therefore x = 8$

Clave IV

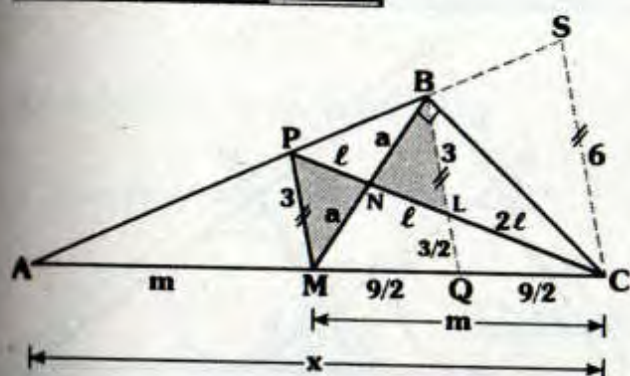
- Sea I : Incentro de ABC.
- Por teorema : $m\angle AIC = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2}$
 $\Rightarrow m\angle AIC = 135^\circ$
- $\triangle AFDI$: inscriptible
 $\Rightarrow m\angle FDA = m\angle FIA = 45^\circ$
- Como $m\angle FIA + m\angle AIC = 180^\circ$
 $\Rightarrow F, I$ y C son colineales
- En forma análoga :
 $\Rightarrow A, I$ y G son colineales
- Por ángulo inscrito :

$$m\widehat{FG} = 2(m\angle FCG)$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 64

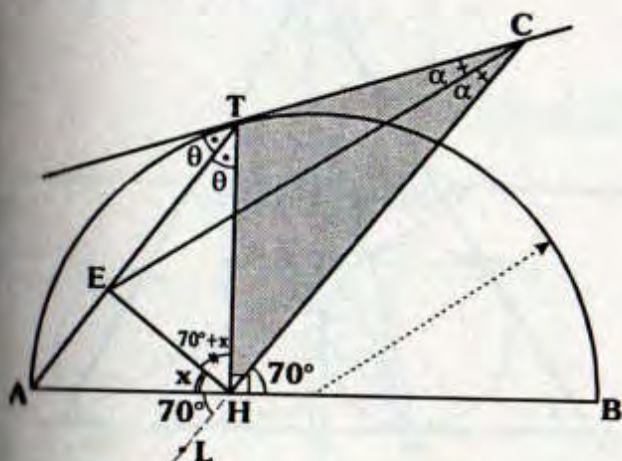


- Prolongamos \overline{AB} hasta S, tal que $\overline{CS} \parallel \overline{MP}$.
- \overline{PM} : Base media de $\triangle ASC \Rightarrow SC = 6$
- Trazamos $\overline{BL} \parallel \overline{PM}$
- $\triangle MNP \cong \triangle BNL$ (ALA)
 $\Rightarrow PN = NL = \ell$ y $BL = 3$
- \overline{BL} : Base media de $PSC \Rightarrow PL = LC = 2\ell$
- L: Baricentro de $MBC \Rightarrow LQ = 3/2$ y
 $MQ = QC = 9/2$ (\triangle)

$$\therefore x = 18$$

Clave **A**

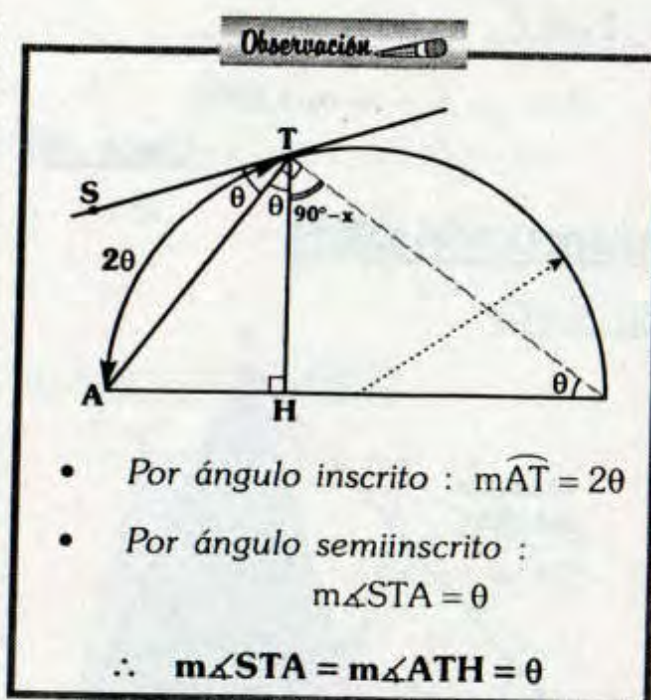
RESOLUCIÓN N° 65



- De la observación \overline{TA} es bisectriz exterior de $\triangle TCH$.
- E: Excentro del $\triangle TCH \Rightarrow \overline{HE}$: Bisectriz exterior
- $m\angle LHE = m\angle THE = 70^\circ + x$
- $x + 70^\circ + x = 90^\circ$

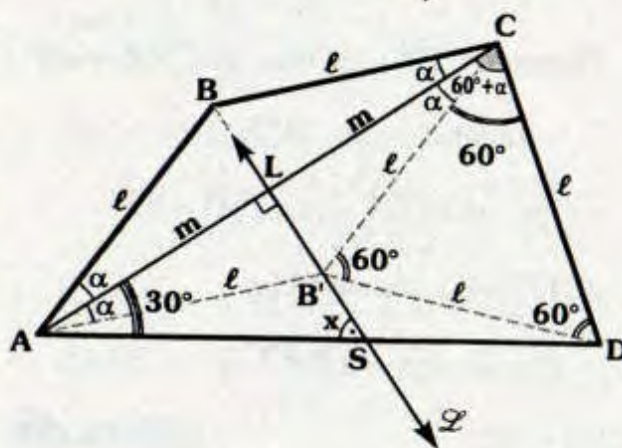
$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave **B**



- Por ángulo inscrito: $m\widehat{AT} = 2\theta$
- Por ángulo semiinscrito: $m\angle STA = \theta$
- $\therefore m\angle STA = m\angle ATH = \theta$

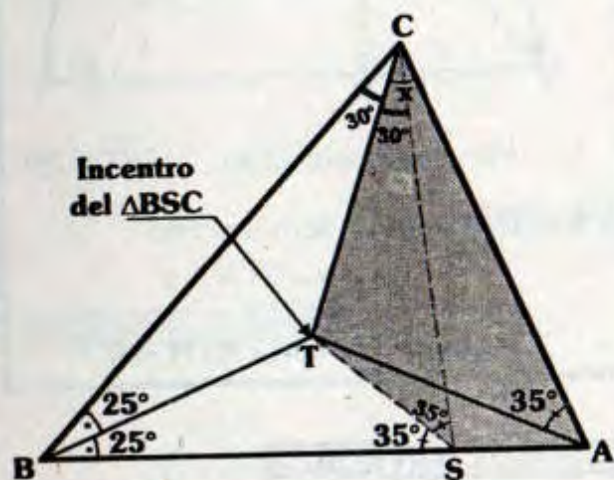
RESOLUCIÓN N° 66



- Se ubica B' en \mathcal{L} , tal que $m\angle ACB' = \alpha$
- $\triangle ABC \cong \triangle AB'C \Rightarrow AB' = B'C = \ell$
- $\triangle CB'D$: Equilátero
 $\Rightarrow m\angle CB'D = 60^\circ$ y $B'D = \ell$
- B' : Circuncentro de ACD
 $\Rightarrow m\angle CAD = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
- $\triangle ALS$: $30^\circ + x = 90^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave C

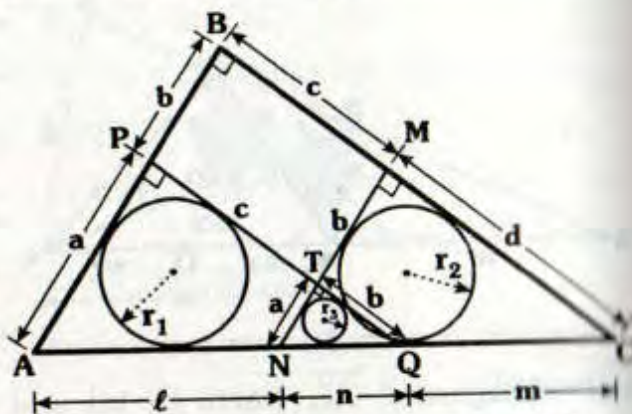
RESOLUCIÓN N° 67



- Trazamos \overline{CS} , tal que $m\angle TCS = 30^\circ$
- T: Incentro de BCS
 $\Rightarrow m\angle CST = m\angle TSB = 35^\circ$
- $\triangle CTSA$: Inscriptible
 $\therefore x = 35^\circ$

Clave D

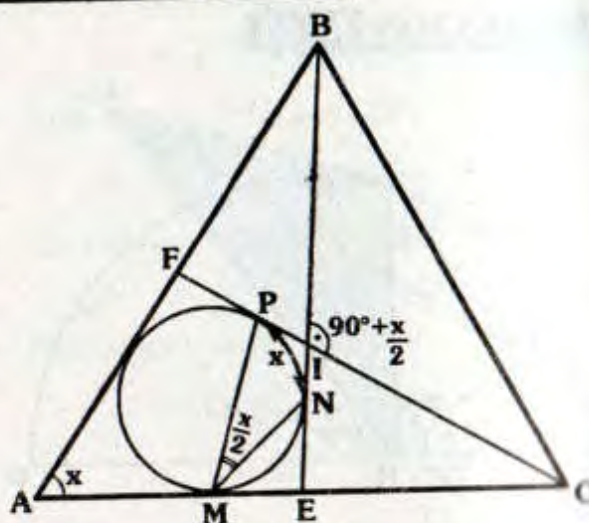
RESOLUCIÓN N° 68



- Sea " x " inradio del triángulo ABC .
- Por el teorema de Poncelet
- $\triangle APQ$: $a + c + x = \ell + n + 2r_1$
- $\triangle NMC$: $b + d = m + n + 2r_2$
- $\triangle TNQ$: $n + 2r_3 = \ell + x$
- $a + b + c + d = 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 + m + n + \ell$... (I)
- En $\triangle ABC$: Por t. de Poncelet.
 $a + b + c + d = \ell + n + m + 2x$... (II)
- Reemplazando (II) en (I):
 $\ell + m + n + 2x = 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 + m + n + \ell$
 $\therefore x = r_1 + r_2 - r_3$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 69



- Por teorema fundamental de incentro:

$$m\angle BIC = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

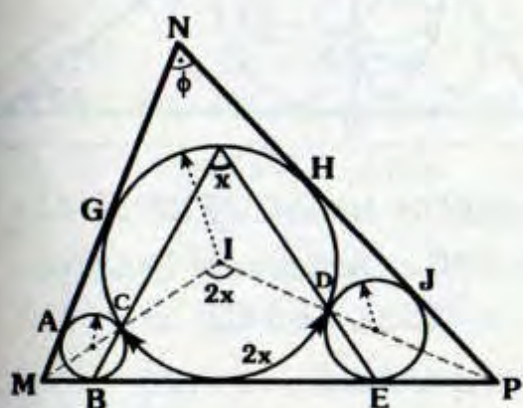
- $m\widehat{NP} = x$ (ángulo inscrito).

- Por teorema: $x + 90^\circ + \frac{x}{2} = 180^\circ$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 70



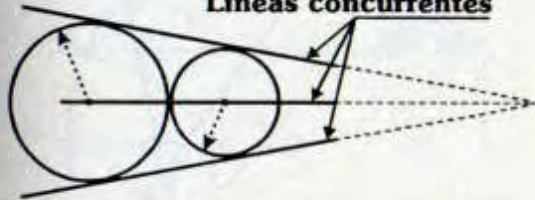
- Se ubica el incentro I del $\triangle ABC$.
- De la observación :
M, C e I son colineales lo mismo que P, D e I.
- Por ángulo central : $m\angle CID = 2x$
- Por teorema fundamental : $2x = 90^\circ + \frac{\phi}{2}$

$$\therefore x = 45^\circ + \frac{\phi}{4}$$

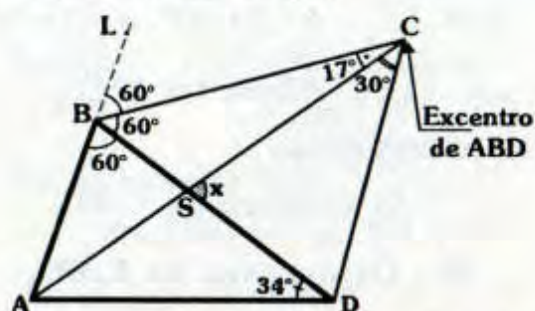
Clave C

Observación

Líneas concurrentes



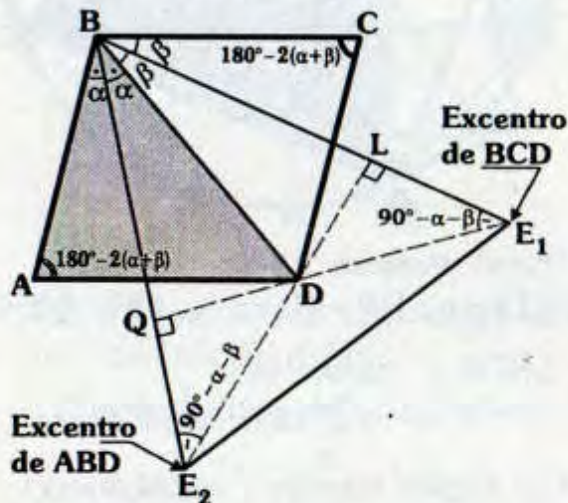
RESOLUCIÓN N° 71



- Como : $m\angle BDA = 2(m\angle BCA)$ y $m\angle ABD = 2(m\angle ACD)$,
por el criterio $\Rightarrow C$: Excentro de ABD
- \overline{BC} : Bisectriz exterior de ABD
 $\Rightarrow m\angle LBC = m\angle CBD = 60^\circ$
- $\triangle BSC$: $x = 60^\circ + 17^\circ$
 $\therefore x = 77^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 72

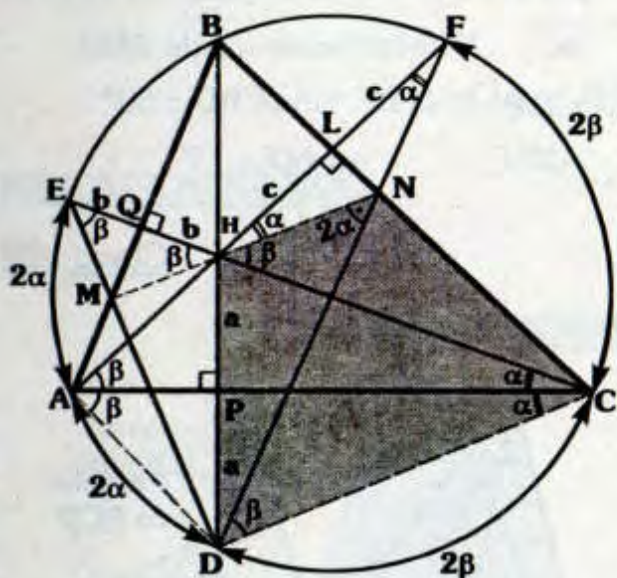


- Por definición :
 $m\angle ABE_2 = m\angle DBE_2 = \alpha$ y $m\angle CBE_1 = m\angle E_1BD = \beta$
- $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Rightarrow m\angle BAD = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$
- $\triangle ABC$: Teorema fundamental
 $\Rightarrow m\angle BE_2D = \frac{180^\circ - 2(\alpha + \beta)}{2} = 90^\circ - \alpha - \beta$

- $\triangle BLE_2$:
 $m\angle E_2LE_1 = \alpha + \beta + 90^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$
 $\Rightarrow \overline{E_2L}$: Altura del $\triangle E_1BE_2$
- Del mismo modo :
 $\overline{E_1Q}$ es altura de E_1BE_2
 $\therefore D$: Ortocentro de E_1BE_2

Clave C

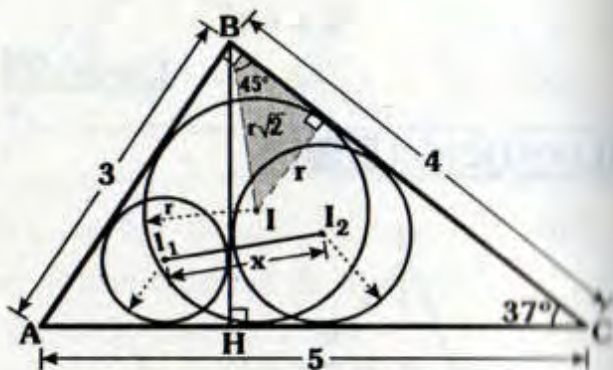
RESOLUCIÓN N° 73



- Por el teorema 9.5:
 $HL=LF=c$; $HP=PD=a$ y $QH=QE=b$
- $\triangle HFN$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle FHN = m\angle HFN = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\angle ACD = \alpha$
- $\triangle DHC$: Isósceles $m\angle PCH = \alpha$
- $\triangle HNCD$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle NHC = m\angle NDC = \beta$
- Por ángulo inscrito : $m\angle FAC = \beta$
- $\triangle ADM$: Isósceles $\Rightarrow m\angle PAD = \beta$
- Por ángulo inscrito : $m\angle DEC = \beta$

- $\triangle MEH$: Isósceles $\Rightarrow m\angle EHM = \beta$
- Como $m\angle EHM = m\angle NHC = \beta$
 $\therefore M, H$ y N son colineales

RESOLUCIÓN N° 74



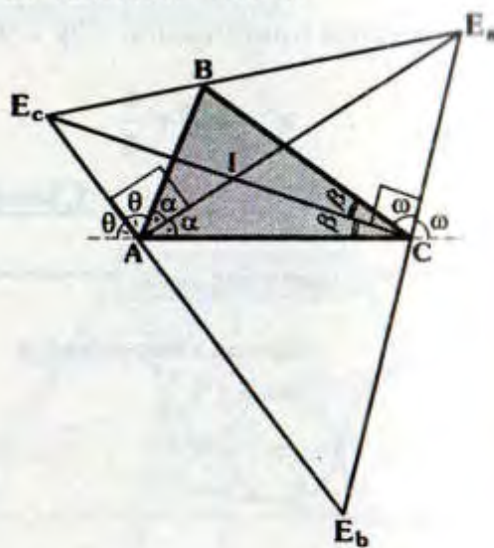
- $\triangle ABC$: Notable de $37^\circ \Rightarrow AC=5$
- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow 3+4=5+2r \Rightarrow r=1$
- Por el teorema : $x = r\sqrt{2}$
 $\therefore x = \sqrt{2}$

Clave II

RESOLUCIÓN N° 75

I. Proposición Verdadera

(Ver teorema 11.11)

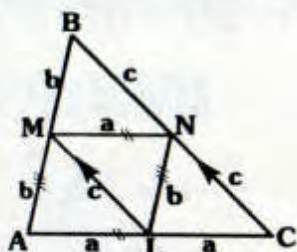


I : Incentro de ABC

E_a, E_b y E_c son excentros

\Rightarrow I : Ortocentro del $\Delta E_a E_b E_c$

II. **Proposición Verdadera**



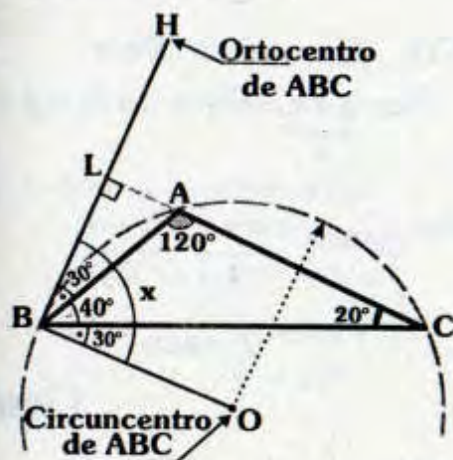
- AMNL : Paralelogramo
 $\Rightarrow MN=AL=a$ y $NL=AM=b$
- MNCL : Paralelogramo
 $\Rightarrow LC=a$ y $NC=ML=c$
- MBNL : Paralelogramo
 $\Rightarrow MB=b$ y $BN=c$
- Se observa M, N y L son puntos medios.

III. **Proposición Verdadera**

Como el baricentro pertenece a la mediana por lo tanto el baricentro se encuentra en la región interior.

Clave B

RESOLUCIÓN N° 76



- H : ortocentro $\Rightarrow \overline{BL}$ es altura de ABC.

$$\Delta ABL : 120^\circ = 90^\circ + m\angle LBA$$

$$\Rightarrow m\angle LBA = 30^\circ$$

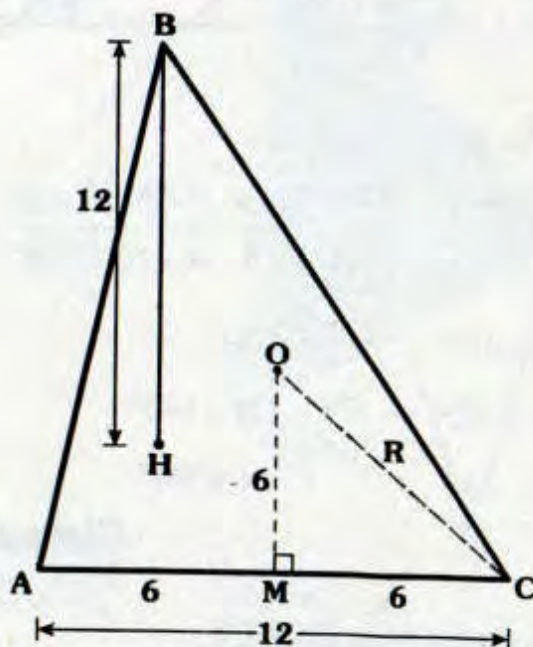
- Por el teorema 9.4:

$$m\angle CBO = m\angle HBA = 30^\circ$$

$$\therefore x = 100^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 77



- Sea "r" radio de la circunferencia de los 9 puntos del ΔABC ,
R circunradio y O circuncentro

- Por teorema : $r = \frac{R}{2}$

- Por teorema 9.6 :

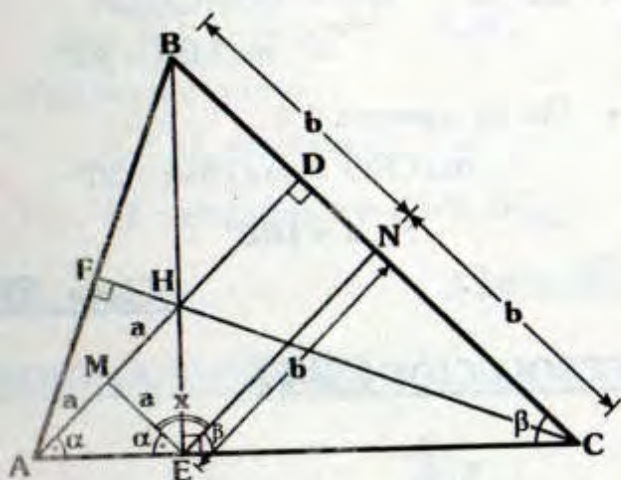
$$OM = \frac{BH}{2} \Rightarrow OM = 6$$

- ΔOMC : Notable $\Rightarrow R = 6\sqrt{2}$

$$\therefore r = 3\sqrt{2}$$

Clave E

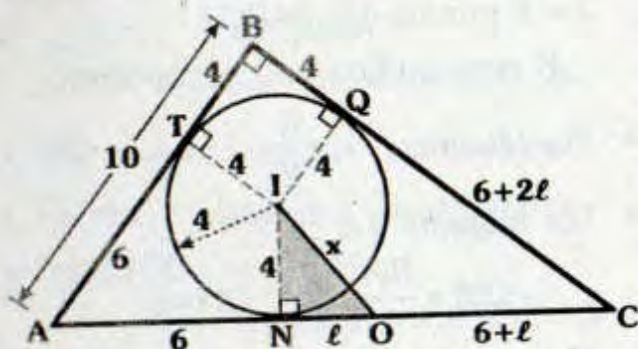
RESOLUCIÓN N° 78



- Por el teorema \triangle :
 $\triangle AEH$: $EM = a$ y $m\angle MEA = \alpha$
 $\triangle BEC$: $EN = b$ y $m\angle NEC = \beta$
- $\triangle ADC$: $\alpha + \beta = 90^\circ$
- En "E": $\alpha + x + \beta = 180^\circ$
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 79

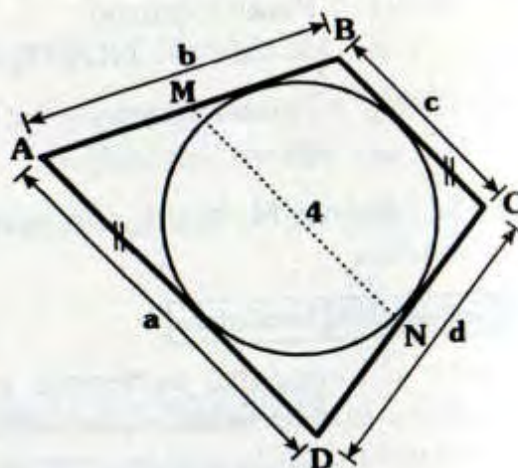


- Se observa, BTIQ: Cuadrado
- Por tangentes: $AT = AN = 6$

- O: Circuncentro $\Rightarrow AO = OC = 6 + l$
- Por tangentes: $CN = CQ = 2l + 6$
- $\triangle ABC$:
 $10^2 + (10 + 2l)^2 = (12 + 2l)^2 \Rightarrow l = 7$
- $\triangle INO$: $x^2 = 4^2 + 7^2$
 $\therefore x = \sqrt{65}$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 80



- \overline{MN} : Base media
 $\Rightarrow 4 = \frac{a+c}{2} \Rightarrow a+c=8$
- ABCD: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow \underbrace{a+c}_8 = \underbrace{b+d}_8 \Rightarrow b+d=8$
- $\text{Perím. } \triangle ABCD = \underbrace{a+c}_8 + \underbrace{b+d}_8$
 $\therefore \text{Perím. } \triangle ABCD = 16$

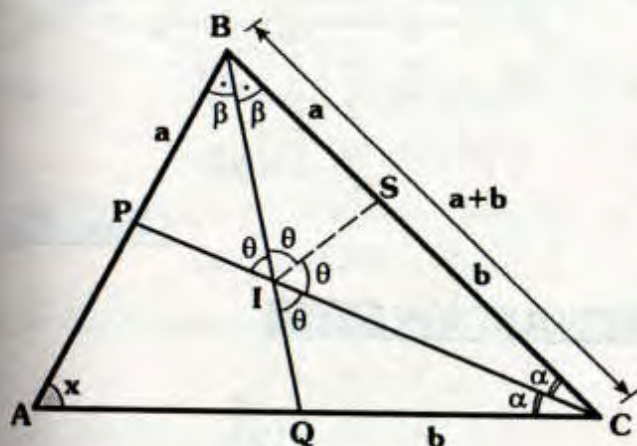
Clave **I**



Solucionario

Ciclo Semestral

RESOLUCIÓN N° 81



- Ubicamos S en \overline{BC} , tal que :
 $SC = b \Rightarrow BS = a$

- $\triangle IQC \cong \triangle ISC$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle QIC = m\angle SIC = \theta$

- $\triangle PBI \cong \triangle BSI$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BIP = m\angle BIS = \theta$

- En "I" :

$$\theta + \theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

- Por teorema fundamental :

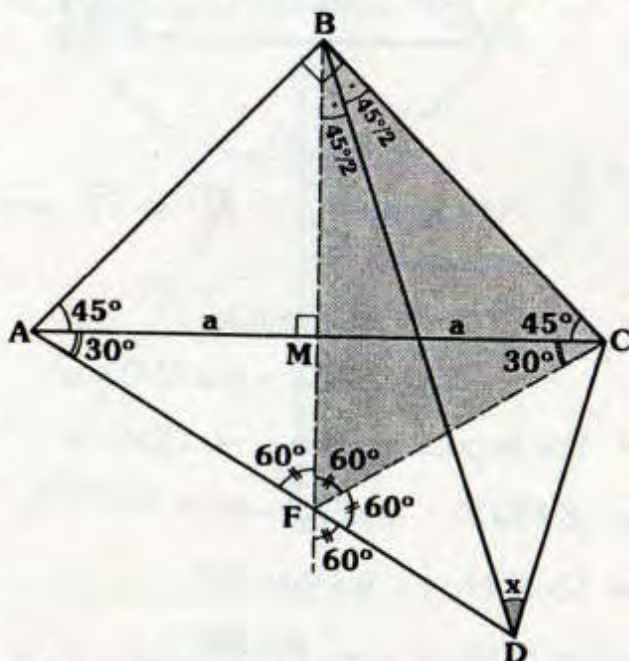
$$m\angle BIC = 120^\circ = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 82

- Ubicamos F en \overline{AD} , tal que $\overline{BF} \perp \overline{AC}$.



- $\triangle ABC$: $AM = MC = a$

- $\triangle AFC$: \overline{FM} es altura y mediana
 $\Rightarrow \overline{FM}$ es bisectriz.

- $\triangle BFC$: \overline{BD} es bisectriz interior y
 \overline{FD} es bisectriz exterior.

- D : Excentro del $\triangle BFC$.

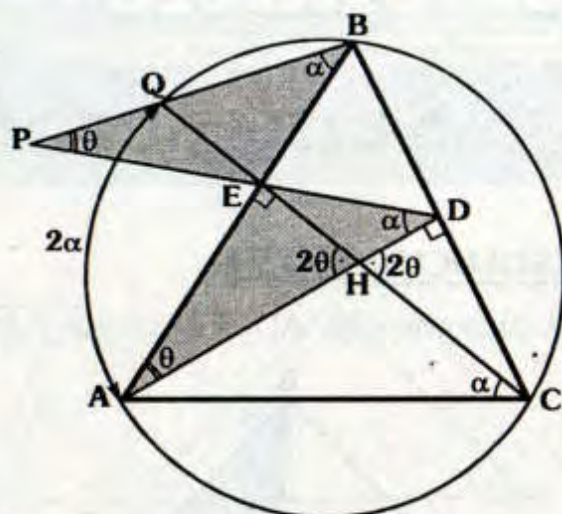
- Finalmente por teorema fundamental de excentro :

$$x = \frac{60^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave **B**

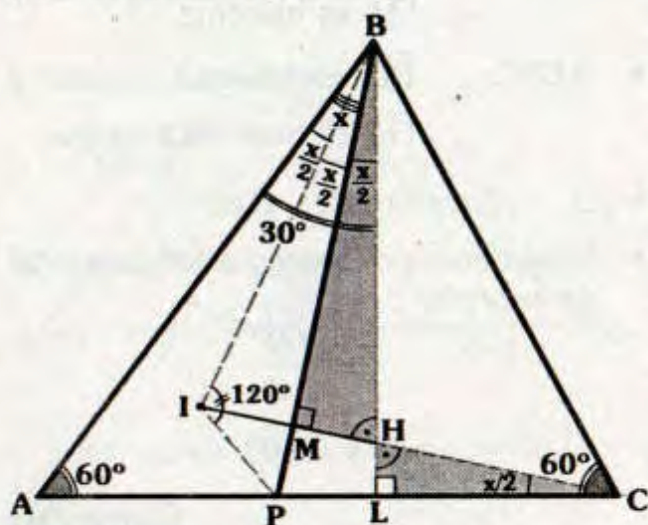
RESOLUCIÓN N° 83



- H : Ortocentro $\Rightarrow \overline{AD}$ y \overline{CE} son alturas.
- $\triangle AEDC$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle ACE = m\angle ADE = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\angle QBA = \alpha$
- $\angle PBDA$: $m\angle EAD = \theta$
- $\triangle AEH$: $\theta + 2\theta = 90^\circ$
 $\therefore \theta = 30^\circ$

Clave A

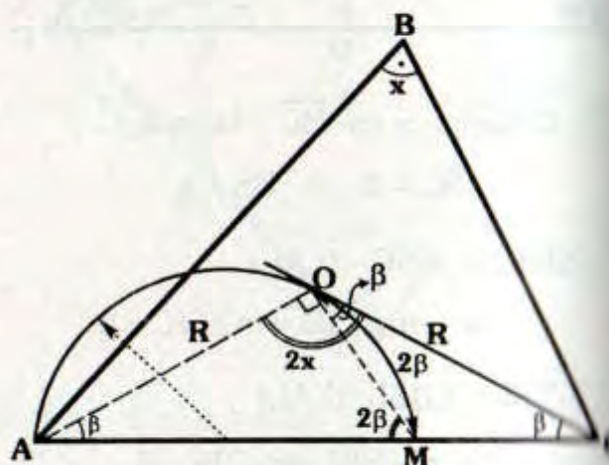
RESOLUCIÓN N° 84



- I : Incentro del $\triangle ABP$
 $\Rightarrow m\angle ABI = m\angle IBP = \frac{x}{2}$ y
 $m\angle BIP = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ$
- $\triangle IBCP$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle ICP = \frac{x}{2}$
- En $\angle MBLC$: $m\angle MBH = \frac{x}{2}$
- $\triangle ABL$: $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 30^\circ$
 $\therefore x = 20^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 85

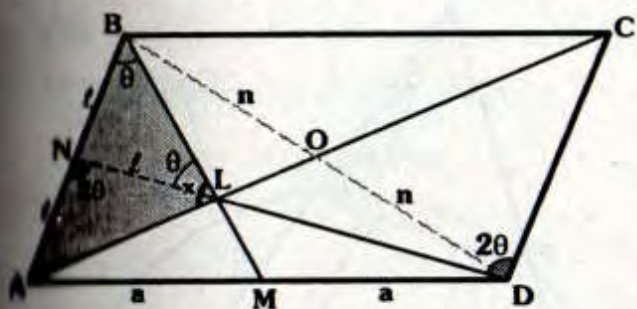


- O : Circuncentro
 $\Rightarrow AO = OC = R$ y $m\angle AOC = 2x$
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{OM} = 2\beta$
- Por ángulo semiinscrito : $m\angle MOC = \beta$
- En $\triangle AOM$: $\beta + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ$
- $2x = 90^\circ + 30^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 86

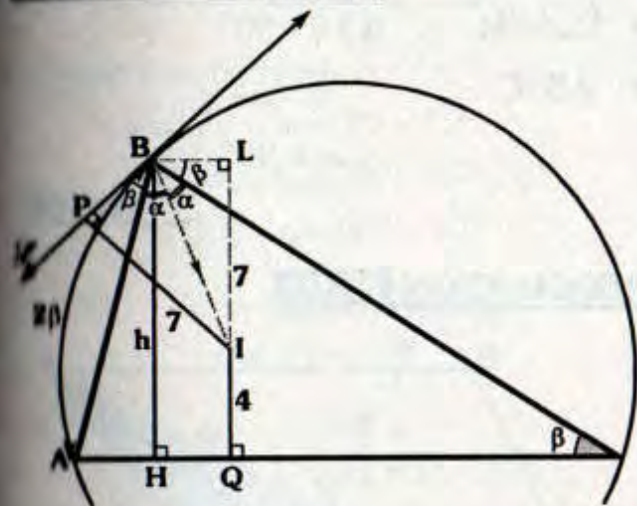
- O : Centro de $ABCD \Rightarrow BO = OD = n$



- L : Baricentro del $\triangle ABD \Rightarrow \overline{DN}$ es mediana
- Por ángulos alternos internos $\Rightarrow m\angle LNA = 20$
- Se observa que el $\triangle NBL$ es isósceles $\Rightarrow NL = l$
- $\triangle ABL$: $AN = NB = NL = l$
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 87



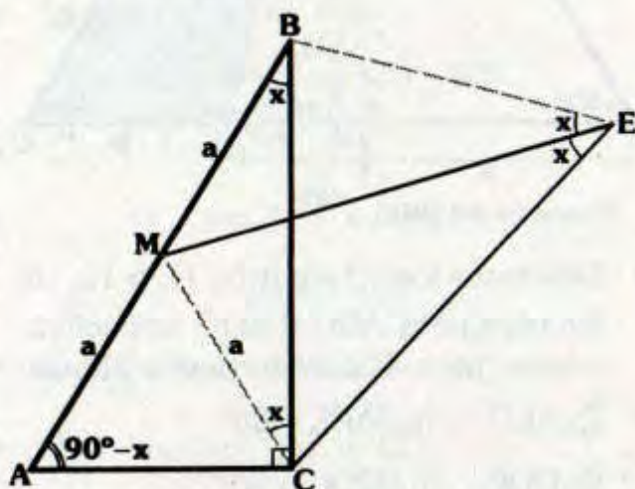
- $IQ = 4$ (inradio)
- $m\angle ABI = m\angle IBC = \alpha$
- Por ángulo semiinscrito :
 $m\angle PBA = m\angle BCA = \beta$

- Se observa $\overline{BL} \parallel \overline{AC} \Rightarrow m\angle LBC = \beta$ (ángulo alternos internos).
- \overrightarrow{BI} : Bisectriz del $\angle PBL \Rightarrow IP = IL = 7$
- Finalmente $HBLQ$ es un rectángulo

$$\therefore h = 11$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 88



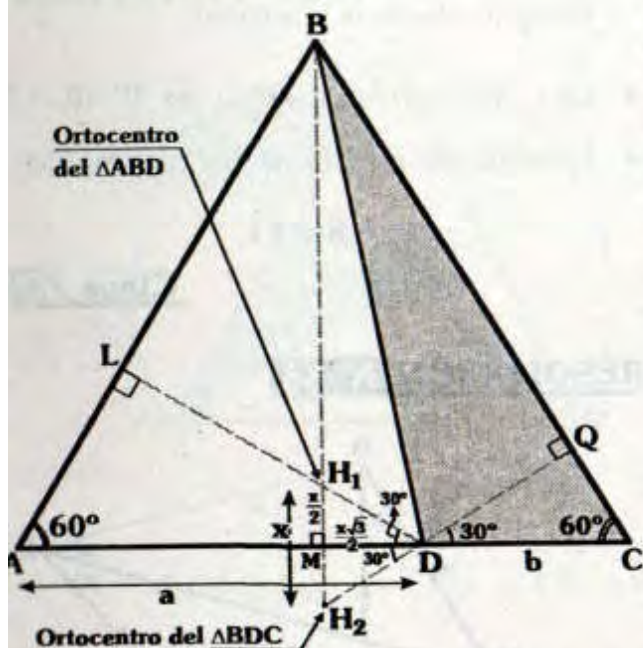
- $\triangle ACB$: $m\angle BAC = 90^\circ - x$
- Trazamos \overline{CM} , en el $\triangle ACB$ por el teorema \triangle :
 $CM = a \Rightarrow m\angle MCB = x$
($\triangle CBM$: Isósceles)
- Como $m\angle MBC = m\angle MEC = x$, al trazar \overline{EB} el $\triangle MBEC$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle MCB = m\angle MEB = x$
- Finalmente, por teorema fundamental :

$$2x = 90^\circ - \left(\frac{90^\circ - x}{2} \right)$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 89



- Ubicamos los ortocentros H_1 y H_2 de los triángulos ABD y BDC respectivamente, para lo cual trazamos alturas.
- $\triangle ALD$: $m\angle ADL = 30^\circ$
- $\triangle DQC$: $m\angle QDC = 30^\circ$
- \overline{DM} es altura del triángulo equilátero H_1H_2D :

$$\Rightarrow H_1M = MH_2 = \frac{x}{2}$$

- $\triangle H_1MD$:

$$\text{Notable} \Rightarrow MD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

- Sabemos : $AM = MD$

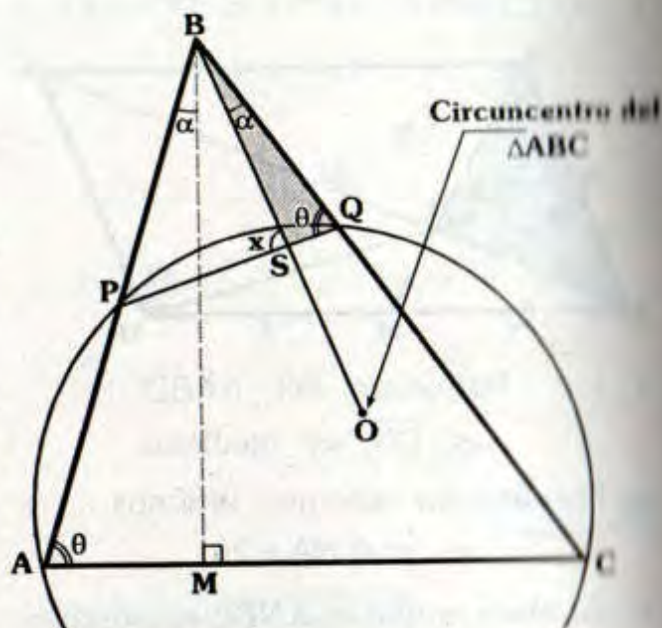
$$\Rightarrow a - \frac{x\sqrt{3}}{2} = b + \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{4\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$$\therefore x = 4$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 90



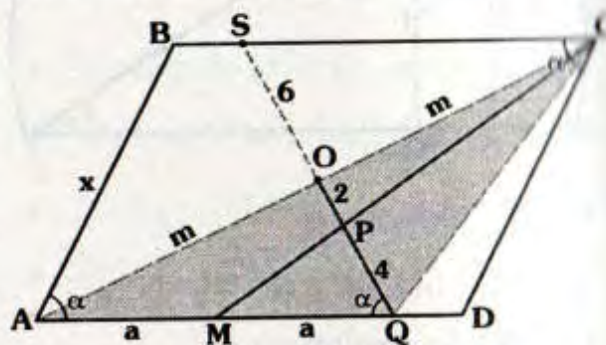
- $\triangle APQC$: Inscrito
 $\Rightarrow m\angle PAC = m\angle PQB = \theta$
- Al trazar la altura BM en el $\triangle ABC$, por el teorema 9.4:

$$m\angle ABM = m\angle OBC = \alpha$$

- $\triangle ABM$: $\alpha + \theta = 90^\circ$
- $\triangle BSQ$: $x = \alpha + \theta$
 $\therefore x = 90^\circ$

Clave II

RESOLUCIÓN N° 91



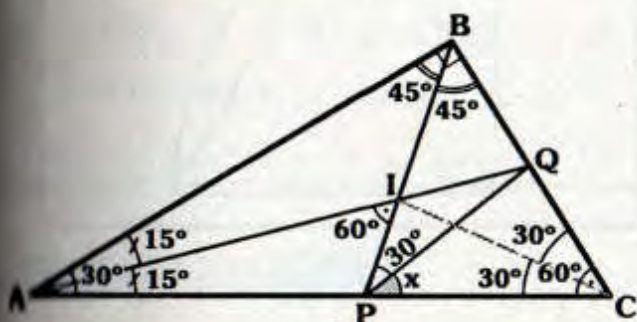
- $\square ABCD$: $m\angle BAD = m\angle BCD = \alpha$

- O : Centro del $\square ABCD$
 $\Rightarrow O \in \overline{AC}$, $AO=OC=m$ y $QO=OS$
- \overline{CM} y \overline{QO} son medianas del $\triangle AQC$
 $\Rightarrow P$ es baricentro del $\triangle AQC$.
- Por teorema fundamental :
 $PQ=2(OP)=4$
- Pero $QO=OS \Rightarrow SQ=12$
- Se observa que $ABSQ$ es un trapecio isósceles

$$\therefore x = 12$$

Clave D

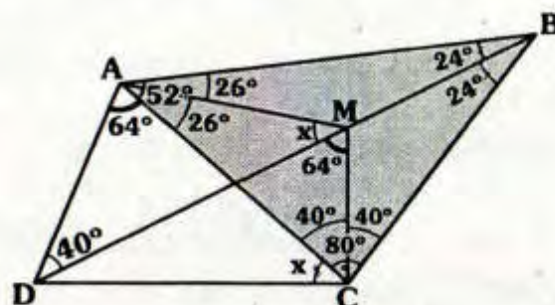
RESOLUCIÓN N° 92



- Como I es incentro :
 $m\angle BAI = m\angle CAI = 15^\circ$;
 $m\angle ABI = m\angle CBI = 45^\circ$ y
 $m\angle BCI = m\angle ACI = 30^\circ$
- $\triangle ABI$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow m\angle AIP = 60^\circ$
- $\triangle PIQC$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle ICQ = m\angle IPQ = 30^\circ$
- $\triangle API$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow 15^\circ + 60^\circ = 30^\circ + x$
 $\therefore x = 45^\circ$

Clave B

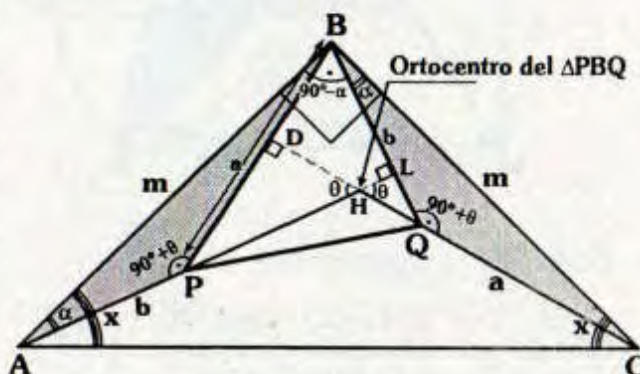
RESOLUCIÓN N° 93



- Se traza \overline{CM} tal que :
 $m\angle ACM = m\angle MCB = 40^\circ$
- $\triangle AMCD$ inscriptible :
 $\Rightarrow m\angle AMD = x$; y
 $m\angle DMC = 64^\circ$
- En $\triangle CMB$: $m\angle MBC = 24^\circ$
- M es incentro del $\triangle ABC$.
- $\triangle AMB$: Por ángulo exterior.
 $x = 24^\circ + 26^\circ$
 $\therefore x = 50^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 94



- Por teorema fundamental en $\triangle ONL$:
 $m\angle ONL = 70^\circ$

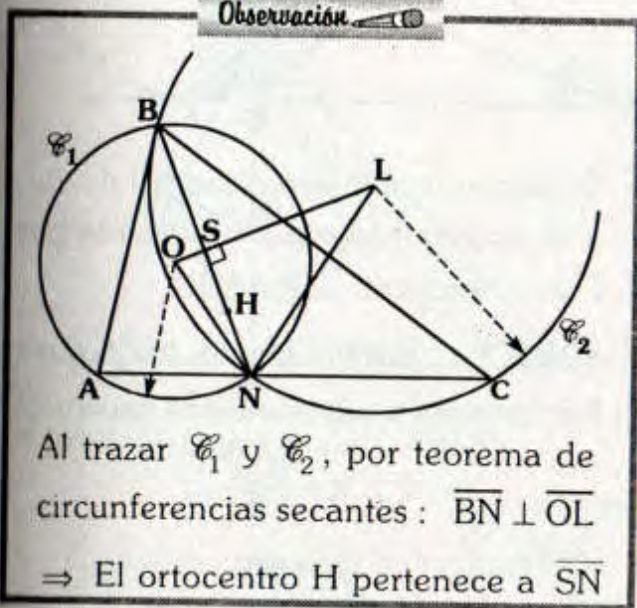
- Como $\overline{OP} \parallel \overline{LQ}$, por propiedad :

$$m + n = 70^\circ$$

$$\therefore x = 70^\circ$$

Clave D

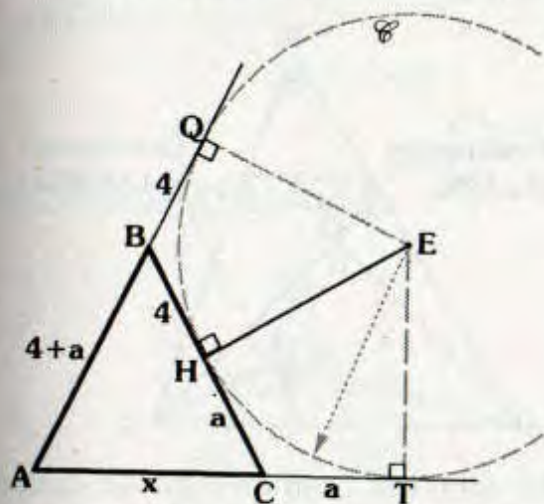
Observación



Al trazar C_1 y C_2 , por teorema de circunferencias secantes : $\overline{BN} \perp \overline{OL}$

\Rightarrow El ortocentro H pertenece a \overline{SN}

RESOLUCIÓN N° 97



- Trazamos la circunferencia exinscrita C_2 .

- Sabemos :

$$BQ = BH = 4 \quad \text{y} \quad HC = CT = a$$

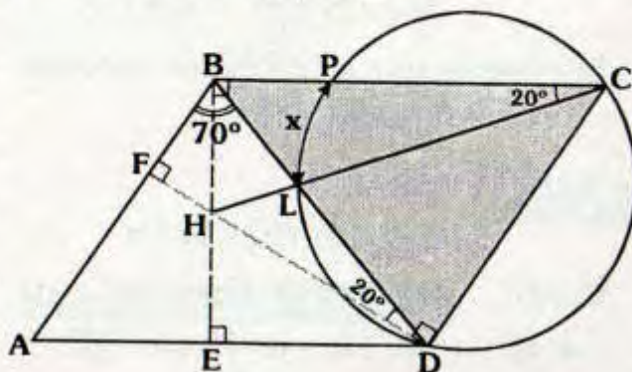
- Pero, $AB = BC \Rightarrow AB = 4 + a$

- Por tangentes : $AQ = AT$
 $\Rightarrow 4 + a + 4 = x + a$

$$\therefore x = 8$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 98



- Trazamos las alturas \overline{BE} y \overline{DF} .

- $\triangle BFD$: $m\angle BDF = 20^\circ$

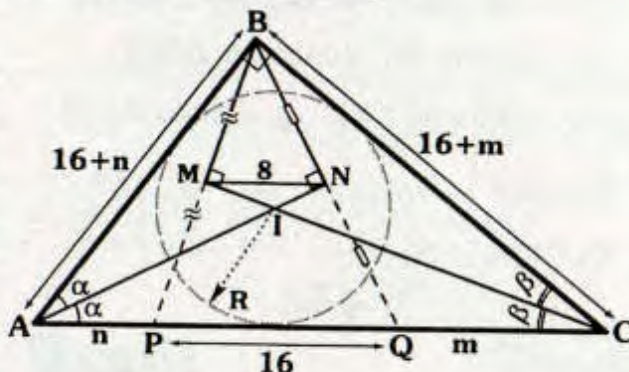
- Como ABCD es un paralelogramo
 $\Rightarrow m\angle EBC = m\angle FDC = 90^\circ$

- $\triangle HBCD$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle BCH = 20^\circ$

- Luego, por ángulo inscrito :
 $x = 2(m\angle PCL)$
 $\therefore x = 40^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 99



$$\therefore R = 8$$

- O : Ortocentro del ΔPQR
 $\Rightarrow \overline{QM}$ y \overline{RL} son alturas
 - O : Centro del cuadrado ABCD
 $\Rightarrow AM = MD = 2$ y $QO = OM = 2$
 - $\triangle QMP$: Notable $\Rightarrow \theta = 14^\circ$
 - $\triangle OMR$: Notable $\Rightarrow 2 + x = 8$
- $\therefore x = 6$**

$$\therefore x = 50$$

$$\alpha = 2x \quad \dots (1)$$

$$2\alpha + x = 180^\circ \quad \dots (II)$$

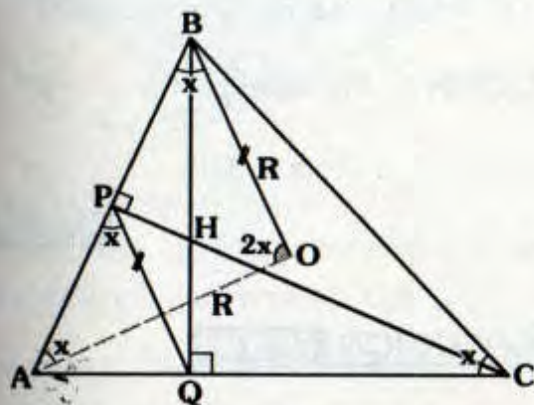
- Reemplazando (I) en (II) :

$$2(2x) + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ$$

Clave D

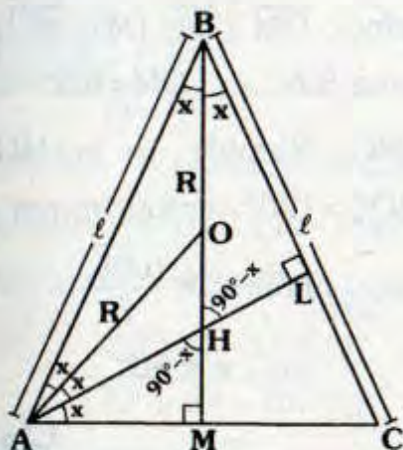
RESOLUCIÓN N° 103



- H : Ortocentro del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow \overline{BQ}$ y \overline{CP} son alturas
- $\triangle PBCQ$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle PBO = x$
- O : Circuncentro
 $\Rightarrow BO = AO = R$ y $m\angle BOA = 2x$
- $\triangle BOA$: $x + x + 2x = 180^\circ$
 $\therefore x = 45^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 104



- B, O, H y M son colineales (teorema 12.6)

$$\Rightarrow m\angle ABO = x$$

- Se observa $m\angle HAM = x$

- O : Circuncentro

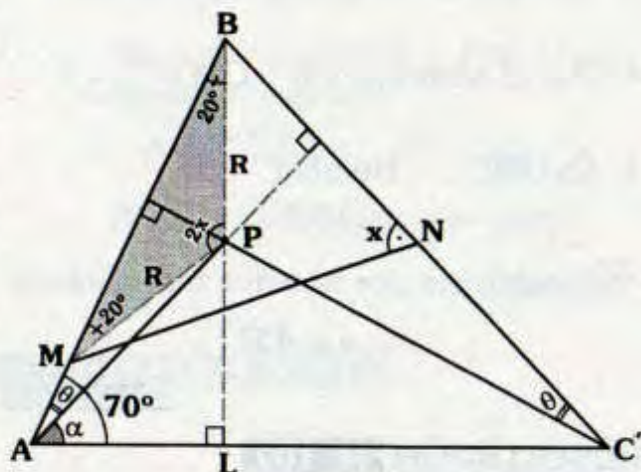
$$\Rightarrow AO = OB = R \Rightarrow m\angle BAO = x$$

- $\triangle ABM$: $x + 3x = 90^\circ$

$$\therefore x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 105



- Como P es ortocentro del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow m\angle BAP = m\angle BCP = \theta$
- Pero, $\alpha + \theta = 70^\circ \Rightarrow m\angle ABL = 20^\circ$
- Como P es circuncentro del $\triangle MBN$
 $\Rightarrow PM = PB = R$ y $m\angle BPM = 2x$
- $\triangle MBP$: $20^\circ + 20^\circ + 2x = 180^\circ$
 $\therefore x = 70^\circ$

Clave B

The diagram shows a triangle ABC with base AC of length $2l$. A point M is on AC such that $AM = l$ and $MC = l$. A vertical line segment BM of length $2l$ is drawn from vertex B to the base. A point H is located on the segment BM such that $BH = 2l$. A point O is located on the segment BM such that $OM = l$. A dashed line segment OC is drawn, and the angle $\angle BOC$ is marked as 45° .

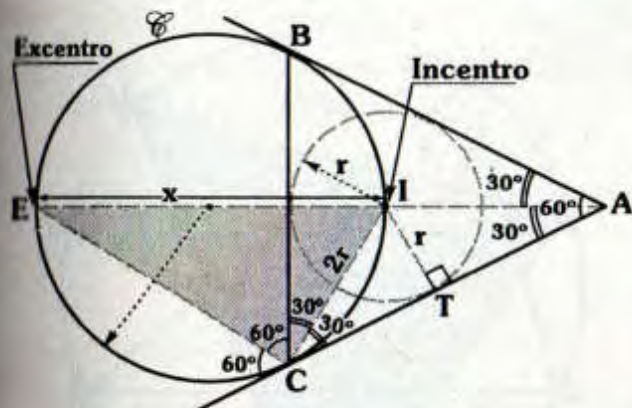
- Clave
- E**

- $$\therefore x = 3\sqrt{5}$$

Clave

- Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ ($M \in \overline{BC}$), por el teorema 9.6 $\Rightarrow OM = R/2$.
 - $\triangle OMC$: Notable $\Rightarrow m\angle MOC = 60^\circ$
 - $m\angle BOC = 120^\circ$, entonces por ángulo inscrito: $m\angle BAC = \frac{m\widehat{BC}}{2}$
- $\therefore x = 60^\circ$

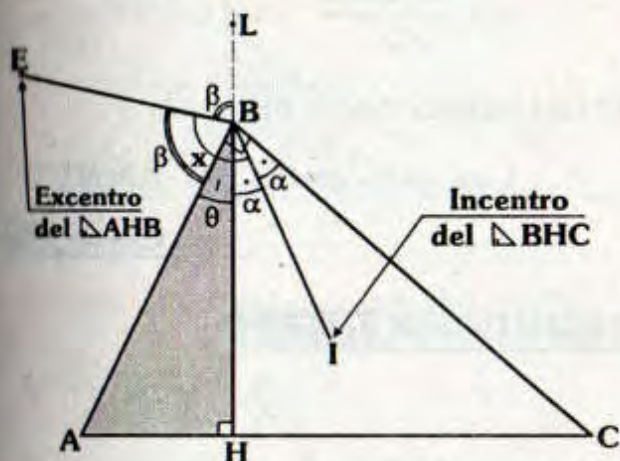
Clave

RESOLUCIÓN N° 109

- Por el teorema 9.1 :
Sabemos que el incentro I y el excentro E pertenecen a \mathcal{C} .
 - $\triangle ITC$: Notable $\Rightarrow CI = 2r$
 - $\triangle ECI$: Notable
- $\therefore x = 4r$

$$\therefore x = 4r$$

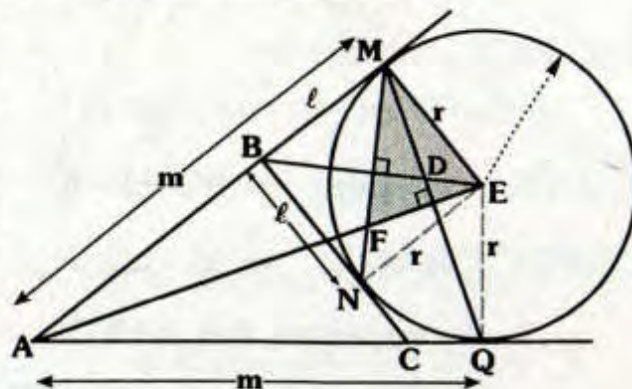
Clave C

RESOLUCIÓN N° 110

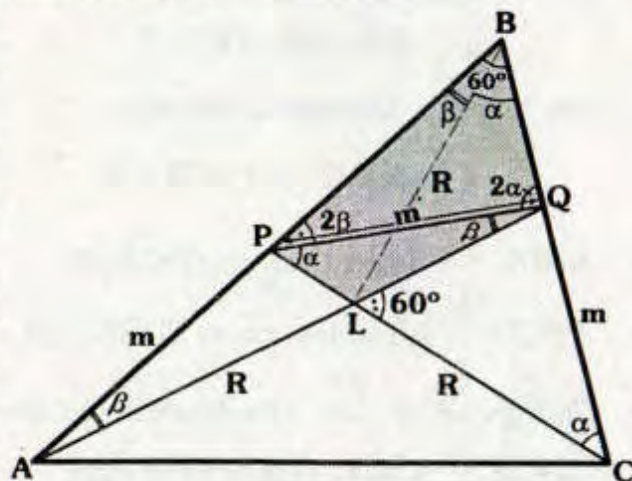
- I : Incentro $\Rightarrow m\angle HBI = m\angle IBC = \alpha$
 - E: Excentro $\Rightarrow m\angle LBE = m\angle EBA = \beta$
 - $m\angle ABC = 90^\circ = \theta + \alpha + \alpha$
 - En "B" : $180^\circ = \theta + \beta + \beta$
- $$\frac{270^\circ = 2\theta + 2\alpha + 2\beta}{\Rightarrow \theta + \alpha + \beta = 135^\circ}$$

- Se observa : $\alpha + \beta + \theta = x$

$$\therefore x = 135^\circ$$

Clave **D****RESOLUCIÓN N° 111**

- Por teorema de circunferencia :
 $AM = AQ = m$ y $BM = BN = \ell$
 - Se observa que BMEN y AMEQ son trapezoides simétricos
 $\Rightarrow \overline{AE} \perp \overline{MQ}$ y $\overline{BE} \perp \overline{MN}$
- \therefore **D es ortocentro del $\triangle MEF$**

Clave A**RESOLUCIÓN N° 112**

- $\triangle APQ$ y $\triangle PQC$: son isósceles
 $\Rightarrow m\angle PAQ = m\angle PQA = \beta$
y $m\angle LBC = m\angle LCB = \alpha$

- Clave
- B**

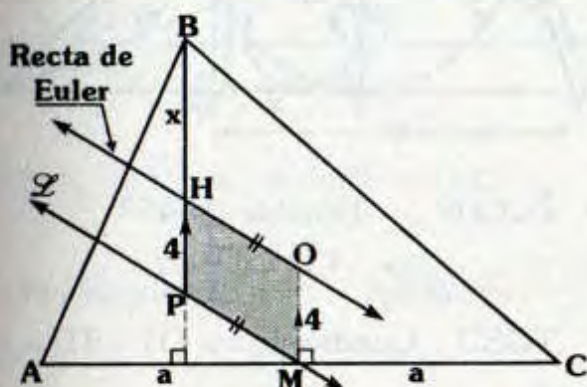
Clave **E**

Clave

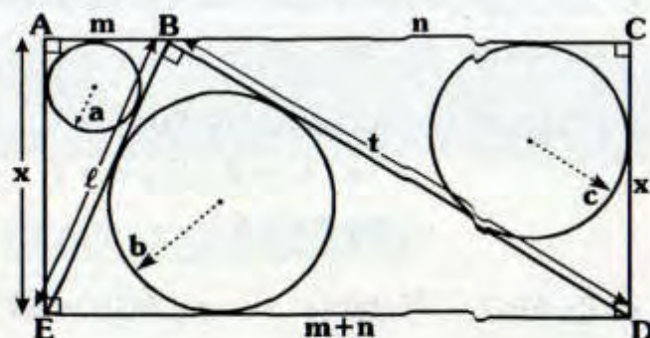
- Sabemos que la recta de Euler (\mathcal{L}) contiene al ortocentro, lo mismo que dicho ortocentro pertenece a \overline{AD} , entonces L es ortocentro.
- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{BC}$, por el teorema 9.6:

$$OM = \frac{16}{2} = 8$$

- $\triangle OMP$: Notable de 37° y 53°
 $\therefore x = 10$

Clave B**RESOLUCIÓN N° 116**

- Sea O el circuncentro del $\triangle ABC$.
- Por el teorema 9.4 : $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- $\square PHOM$: Paralelogramo
 $\Rightarrow OM=4$
- Finalmente por teorema 9.6 :
 $x=2(4)$
 $\therefore x=8$

Clave A**RESOLUCIÓN N° 117**

- Por el teorema de Poncelet :

$$\triangle ABE: m + x = l + 2a$$

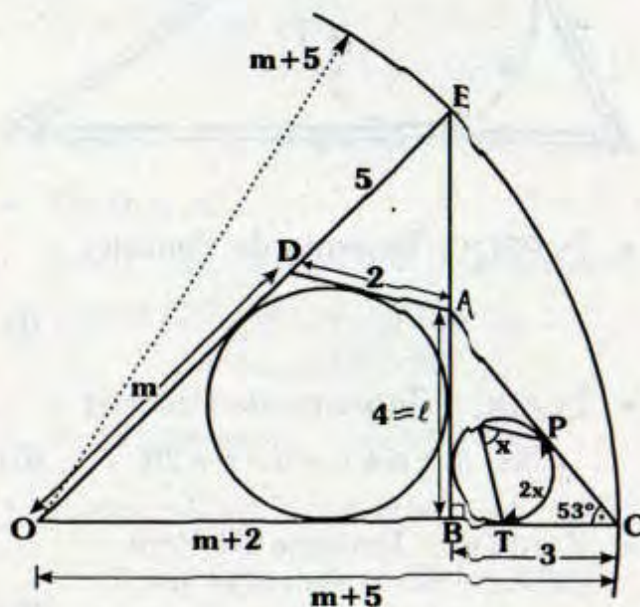
$$\triangle BCD: n + x = 2c \quad (+)$$

$$\triangle BDE: \cancel{\ell} + \cancel{\ell} = \cancel{m} + \cancel{n} + 2b \quad \downarrow$$

$$\underline{2x = 2a + 2c + 2b}$$

$$\therefore x = a + b + c$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 118

Por ángulo inscrito : $m\widehat{PT} = 2x$

Sea $OD = m$, entonces el radio del arco es $m+5 \Rightarrow OB = m+2$

$\triangle ODA$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow m+2+2 = m+l$
 $\Rightarrow l = 4$

• $\triangle ABC$: Notable $\Rightarrow m\angle ACB = 53^\circ$

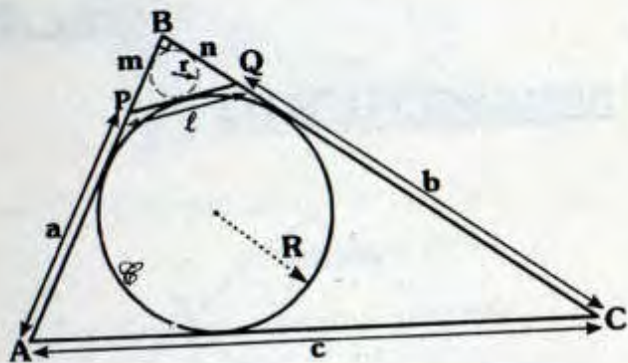
• Por teorema de circunferencia :

$$2x + 53^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = \frac{127^\circ}{2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 119



• $\triangle PBQ$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow m+n = l+2r \quad \dots(I)$

• $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow m+a+n+b = c+2R \quad \dots(II)$

• $\triangle APQC$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow c+l = a+b \quad \dots(III)$

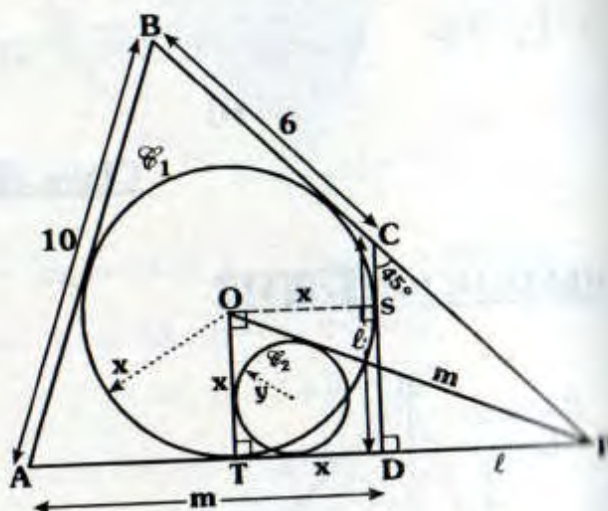
• (I) + (II) + (III) :
 $2(m+n) = 2(R+r)$

• Pero $m+n = 10$ (dato)

$$\therefore R+r = 10$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 120



• $\triangle CDP$: Notable de 45°
 $\Rightarrow CD = DP = l$

• TOSD : Cuadrado $\Rightarrow OT = TD = x$

• $\triangle ABCD$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow 10+l = 6+m \quad \dots(I)$

• $\triangle OTP$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow x+x+l = m+2y \quad \dots(II)$

• (I) - (II) : $10-2x = 6-2y$

$$\therefore x-y = 2$$

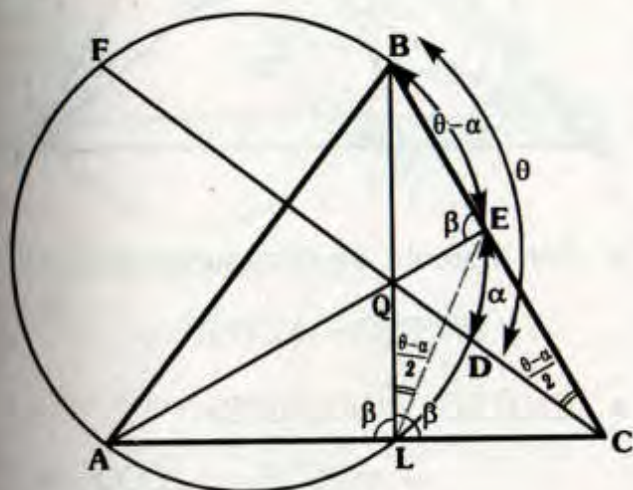
Clave A

Solucionario

Ciclo

Semestral
Intensivo

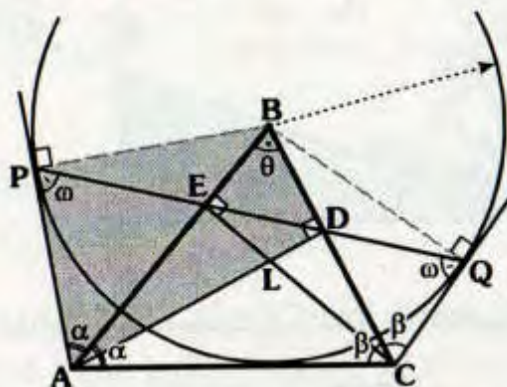
RESOLUCIÓN N° 121



- Sea $m\widehat{ED} = \alpha \Rightarrow m\widehat{BE} = \theta - \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\angle BLE = \frac{\theta - \alpha}{2}$
- Por ángulo exterior : $m\angle BCF = \frac{\theta - \alpha}{2}$
- Luego el $\triangle LQEC$ es inscriptible
 $\Rightarrow m\angle QLC = m\angle QEB = \beta$
- En "L" : $\beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ$
- Finalmente \overline{AE} y \overline{BL} son alturas
 $\therefore Q$ es ortocentro del $\triangle ABC$

Clave **A**

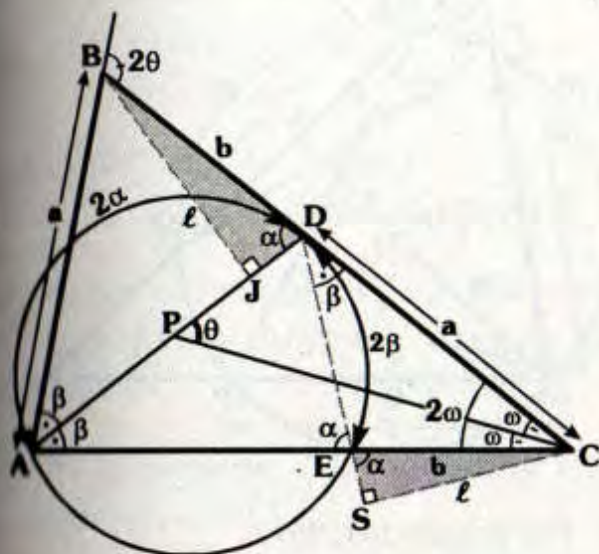
RESOLUCIÓN N° 122



- Por teoremas en la circunferencia :
 $\overline{BP} \perp \overline{PA}$, $\overline{BQ} \perp \overline{QC}$,
 $m\angle PAB = m\angle BAC = \alpha$,
 $m\angle ACB = m\angle BCQ = \beta$ y
 $m\angle APQ = m\angle PQC = \omega$
- $\triangle APQC$:
 $\omega + \omega + \alpha + \alpha + \beta + \beta = 360^\circ$
 $\Rightarrow \omega + \alpha + \beta = 180^\circ \quad \dots (I)$
- $\triangle ABC$: $\theta + \alpha + \beta = 180^\circ \quad \dots (II)$
- De (I) y (II) :
 $\omega = \theta$, con lo cual nos damos cuenta
que el $\triangle APBD$ es inscriptible :
 $\Rightarrow m\angle ADB = 90^\circ$
- Análogamente : $m\angle CEB = 90^\circ$
- Luego \overline{AD} y \overline{CE} son alturas del $\triangle ABC$
 $\therefore L$ es ortocentro del $\triangle ABC$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 125

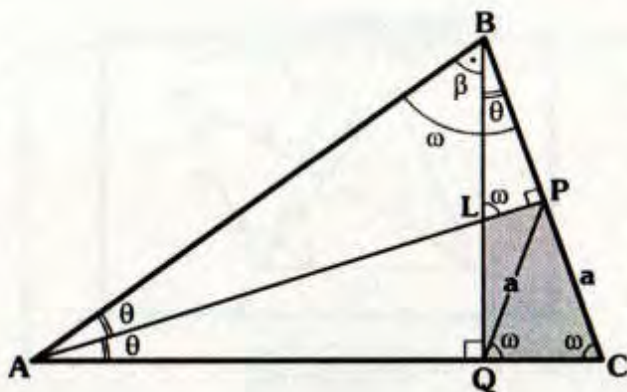


- Por ángulo inscrito :
 $m\widehat{DE} = 2\beta$ y $m\widehat{AD} = 2\alpha$
- Por ángulo semiinscrito :
 $m\angle ADB = \beta$ y $m\angle EDC = \beta$
- Trazamos $\overline{BI} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CS} \perp \overline{DE}$
- $\triangle BID \cong \triangle ESC$ (ALA) $\Rightarrow BJ = SC = \ell$
- $\triangle ABJ \cong \triangle DSC$ (LLL)
 $\Rightarrow m\angle BAJ = m\angle SDC = \beta$
- Por ángulo exterior :
 $\triangle APC: \beta + \omega = \theta$
 $\triangle ABC: 2\beta + m\angle ACB = 2\theta$
 $\Rightarrow m\angle ACB = 2\omega$
 $\therefore P : \text{Incentro de } \triangle ABC$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 126

- En "B" : $\omega = \beta + \theta$
- $\triangle ABL$: Por ángulo exterior :
 $m\angle BLP = \beta + \theta = \omega$

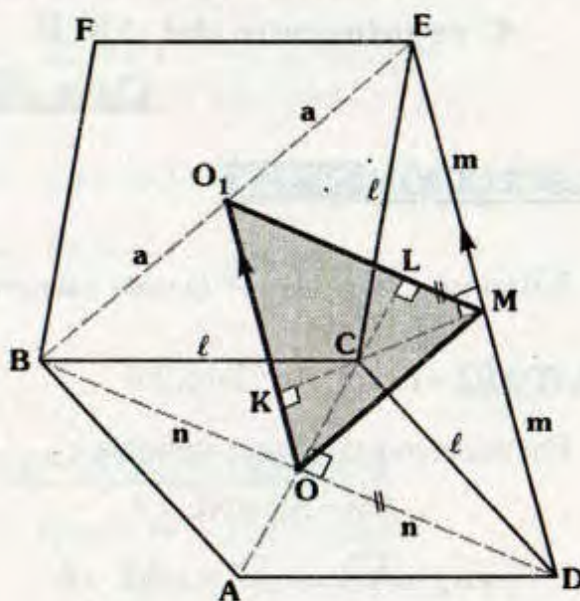


- $\triangle PLQC$: Inscriptible (dato)
 $\Rightarrow m\angle PCQ = \omega$
- $\triangle PQC$: Isósceles $\Rightarrow m\angle PQC = \omega$
- $\triangle ABPQ$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle PAQ = \theta$
- Luego, se nota que \overline{AP} es bisectriz del triángulo isósceles ABC $\Rightarrow \overline{AP}$ es altura.
- $\triangle QLPC$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle LQA = 90^\circ$

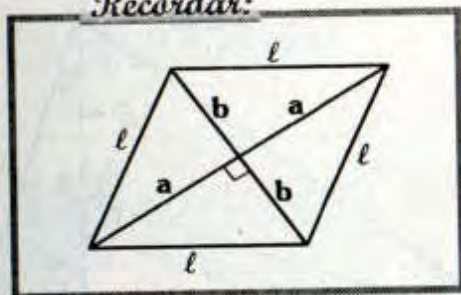
$\therefore L$ es ortocentro del $\triangle ABC$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 127



Recordar:



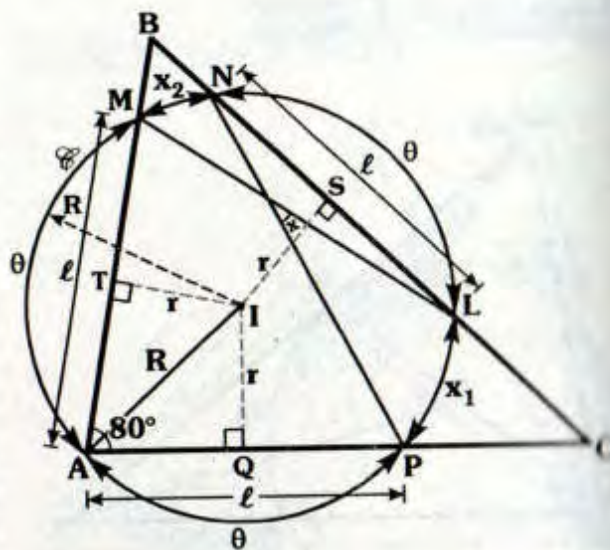
- ABCD : Rombo
 $\Rightarrow BO=OD=n$ y $m\angle COD=90^\circ$
- BCEF : Rombo
 $\Rightarrow BO_1=O_1E=a$
- $\overline{MO_1}$: Base media del $\triangle BED$
 $\Rightarrow \overline{MO_1} \parallel \overline{BD}$
- Entonces al prolongar \overline{OC} , nos damos cuenta que \overline{OL} es altura.
- $\triangle CED$: Isósceles $\Rightarrow m\angle CME=90^\circ$
- $\overline{OO_1}$: Base media del $\triangle BED$
 $\Rightarrow \overline{OO_1} \parallel \overline{ED}$
- Luego al prolongar \overline{MC} , nos daremos cuenta que \overline{MK} es altura.

$\therefore C$ es ortocentro del $\triangle BED$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 128

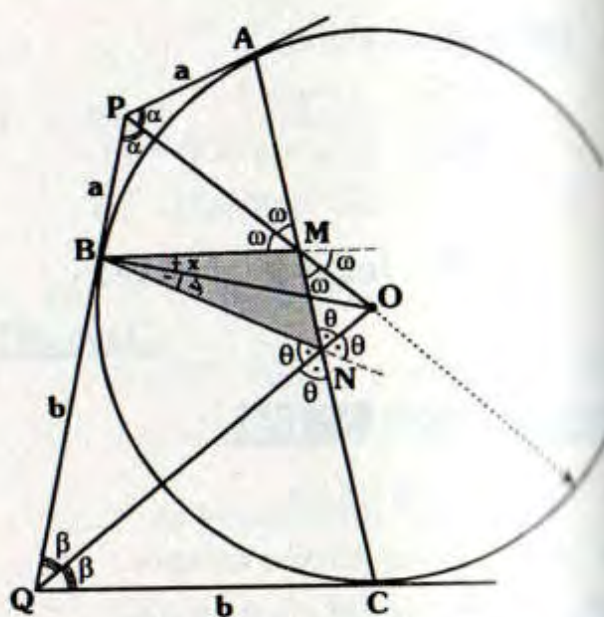
- Sabemos : $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (ángulo interior)
- $IT = IQ = IS = r$ (r : Inradio)
- Por teorema de circunferencia :
 $AM = AP = NL = \ell$
 $\Rightarrow m\widehat{AM} = m\widehat{AP} = m\widehat{NL} = \theta$



- Por ángulo inscrito :
 $\theta + x_1 + x_2 = 160^\circ \quad \dots (I)$
- En \odot : $\theta + \theta + x_1 + x_2 + \theta = 360^\circ \dots (II)$
- De (I) y (II) : $x_1 + x_2 = 60^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave II

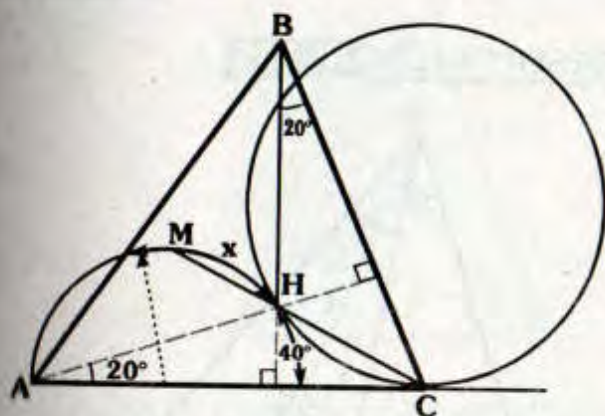
RESOLUCIÓN N° 129



- Por teorema de circunferencia :
 $m\angle APO = m\angle OPB = \alpha$
 $m\angle BQO = m\angle OQC = \beta$
 $PA = PB = a$ y $QB = QC = b$
- $\triangle BPM \equiv \triangle PAM$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle BMP = m\angle PMA = \omega$
- Al prolongar \overline{BM} , nos damos cuenta que \overline{MO} es bisectriz exterior del $\triangle BMN$.
- Análogamente, \overline{NO} es bisectriz exterior del $\triangle BMN$.
- Luego O es excentro del $\triangle MBN$
 $\Rightarrow x = y$
 $\therefore \frac{x}{y} = 1$

Clave D

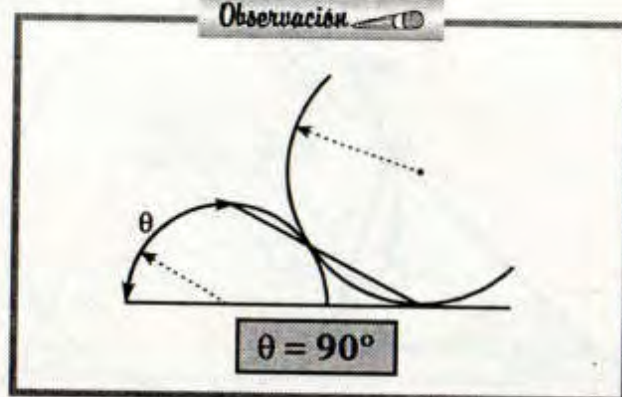
RESOLUCIÓN N° 130



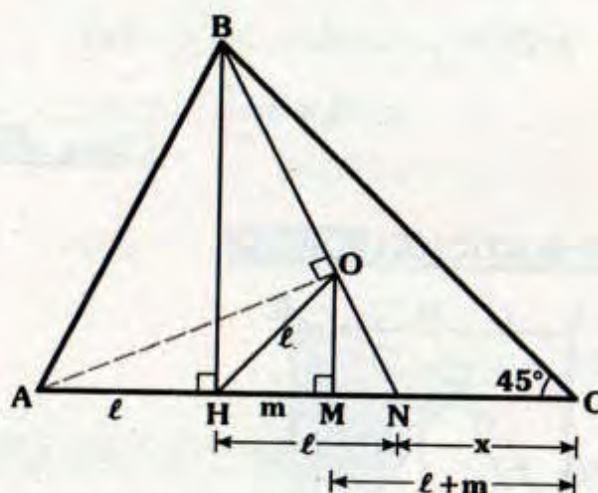
- H : Ortocentro
 $\Rightarrow m\angle HAC = m\angle HBC = 20^\circ$
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{HL} = 40^\circ$
- De la observación : $x + 40^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 50^\circ$

Clave E

Observación



RESOLUCIÓN N° 131

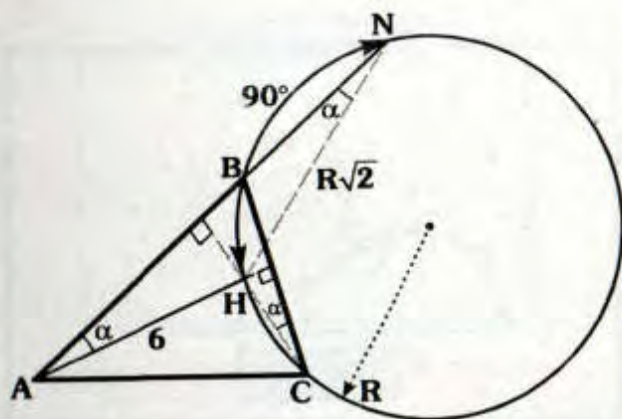


- Por teorema fundamental :
 $m\angle BDA = 2(45^\circ) = 90^\circ$
- $\triangle AON$: Por el teorema
 $\Rightarrow HN = HA = HO = l$
- $AM = MC = l + m$ (teorema 9.4.)
- $HC = m + l + m = l + x$
 $\therefore x = 2m$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 132

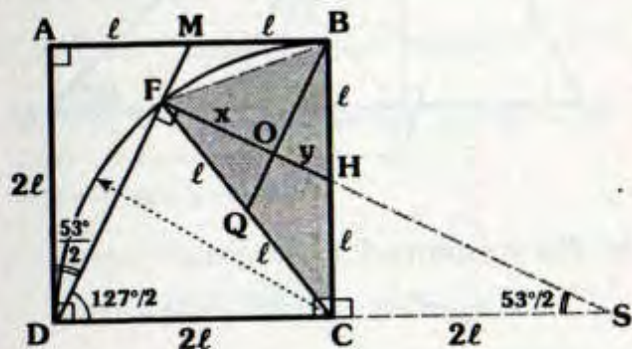
- Como H : Ortocentro
 $\Rightarrow m\angle BAH = m\angle BCH = \alpha$



- Por ángulo inscrito : $m\angle BNH = \alpha$
 - Como $m\widehat{HBN} = 90^\circ \Rightarrow HN = R\sqrt{2}$
 - AHN : Isósceles $\Rightarrow 6 = R\sqrt{2}$
- $\therefore R = 3\sqrt{2}$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 133

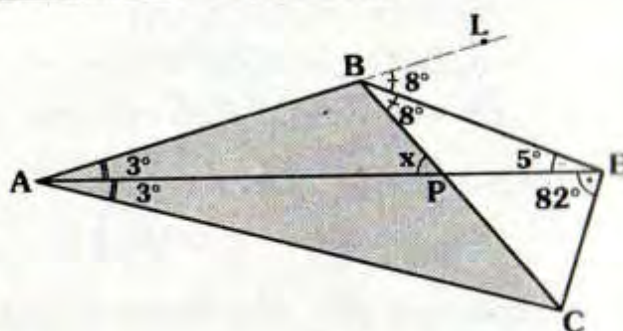


- $\triangle ADM$: Notable $\Rightarrow m\angle ADM = \frac{53^\circ}{2}$
- Prolongamos \overline{DC} y \overline{FH} hasta que se corten en S.
- Por el teorema recíproco \triangle : $SC = 2l$
- $\triangle HCS$: Notable de $53^\circ/2 \Rightarrow HC = l$
- O : Baricentro del $\triangle BCF$, por teorema fundamental :

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

Clave C

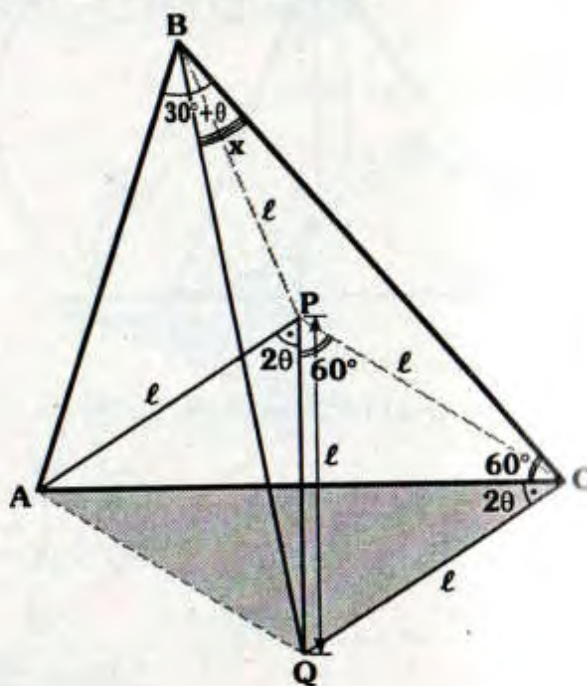
RESOLUCIÓN N° 134



- Se observa que \overrightarrow{AE} bisectriz interior del $\triangle ABC$, además:
 $m\angle BEC = 90^\circ - 3^\circ$
 $\Rightarrow E$: Excentro del $\triangle ABC$ (criterio 8.9)
- \overrightarrow{BE} : Bisectriz exterior del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow m\angle EBC = 8^\circ$
- $\triangle BPE$: $x = 8^\circ + 5^\circ$
 $\therefore x = 13^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 135



- Trazamos \overline{AQ} , luego por el criterio 8.14:

$\Rightarrow P$ es circuncentro del $\triangle AQC$

$$\Rightarrow PC = \ell$$

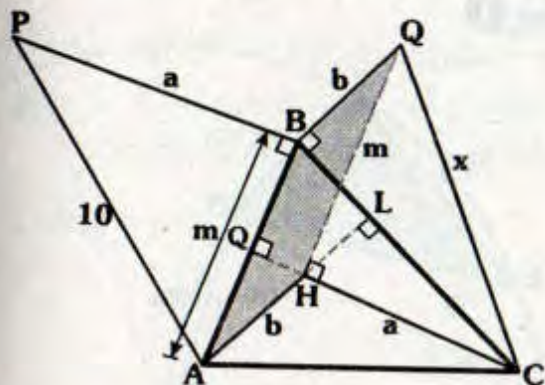
- Se nota que el $\triangle QPC$ es equilátero
 $\Rightarrow m\angle QPC = 60^\circ$
- Por el criterio 8.13. P es circuncentro
 del : $\triangle ABC \Rightarrow BP = \ell$

- Como $PQ=PC=PB=\ell$
 \Rightarrow P circuncentro del ΔBQC

- Finalmente por teorema fundamentalmente :

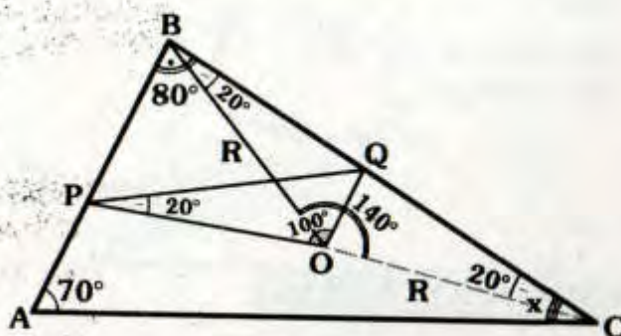
$$x = \frac{60^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave A**RESOLUCIÓN N° 136**

- H : ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ y \overline{CQ} son alturas.
- Se observa que $AH=BQ=b$ y $\overline{AH} \parallel \overline{BQ}$
 \Rightarrow $ABQH$ es un paralelogramo
 $\Rightarrow QH=AB=m$
- $\triangle ABP \cong \triangle QHC$ (LAL)
 $\therefore x=10$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 137

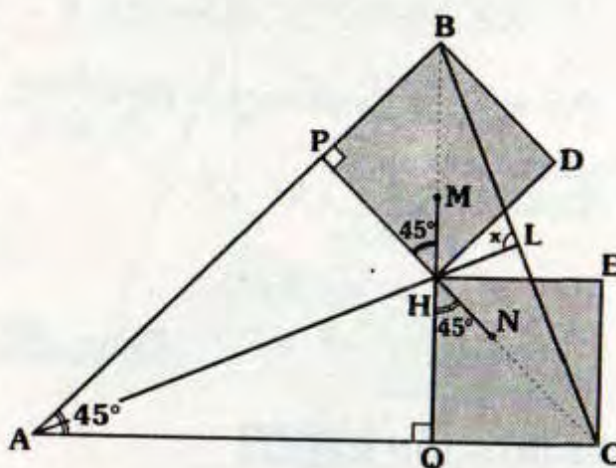
- O : Circuncentro $\Rightarrow BO=OC=R$

$$m\angle BOC = 2(70^\circ) = 140^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle OBC = 20^\circ$$
- $\triangle PBQO$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PBQ = 80^\circ$$
- $\triangle ABC$: $70^\circ + 80^\circ + x = 180^\circ$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Clave E**RESOLUCIÓN N° 138**

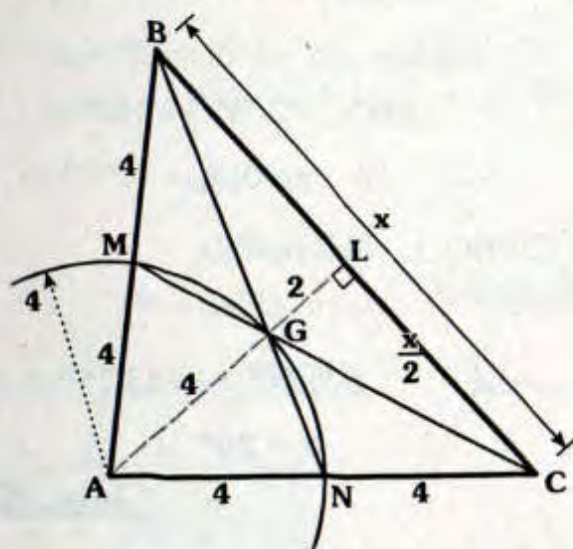
- $\triangle APHQ$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle PHM = m\angle PAQ = 45^\circ$
- Como $BPHD$ es un cuadrado, al prolongar \overline{HM} llega al punto B.

- Analogamente la prolongación de \overline{HN} llega a C.
- Se observa que \overline{BQ} y \overline{CP} son alturas del $\triangle ABC$.

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 139

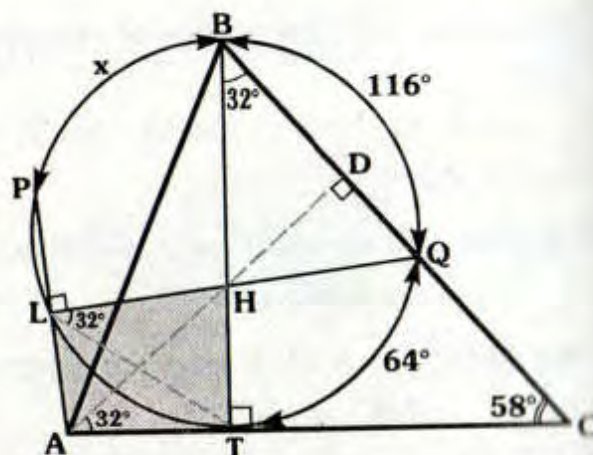


- Como G es baricentro:
 $AM=MB=4$ y $AN=NC=4$
- Por teorema fundamental: $GL = \frac{4}{2} = 2$
- $\triangle ALC$: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 8^2 - 6^2$
 $\therefore x = 4\sqrt{7}$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 140

- H: Ortocentro $\Rightarrow \overline{BT}$ y \overline{AD} son alturas.
- $\triangle BTC$: $m\angle TBC = 32^\circ$,
 $\triangle ADC$: $m\angle DAC = 32^\circ$

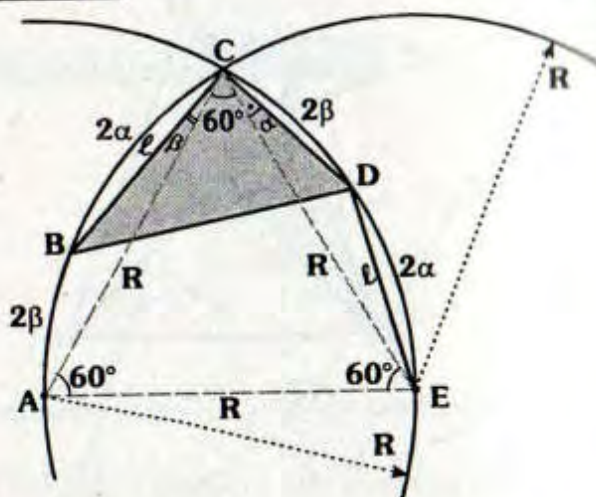


- Por ángulo inscrito : $m\angle QLT = 32^\circ$
- $\triangle ALHT$ \therefore Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle PLH = 90^\circ$
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{PBQ} = 180^\circ$
 $\Rightarrow x + 116^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 64^\circ$

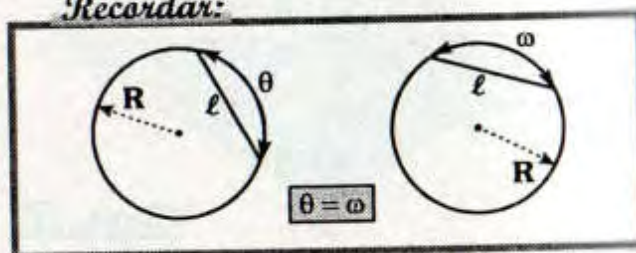
Clave C

RESOLUCIÓN N° 141

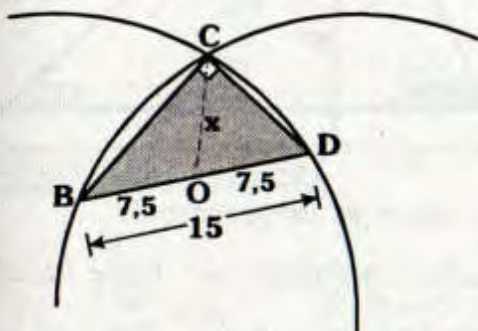
Paso 1




Recordar:



- Se observa que el $\triangle ACE$ es equilátero.
- Como : $ED = BC = \ell$
 $\Rightarrow m\widehat{ED} = m\widehat{BC} = 2\alpha$
- Luego, $m\widehat{CD} = m\widehat{AB} = 2\beta$
 (ya que $m\widehat{EC} = m\widehat{AC} = 60^\circ$)
- Se nota : $m\widehat{CE} = 60^\circ = 2\alpha + 2\beta$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = 30^\circ$
- Entonces el $\triangle BCD$ es rectángulo.

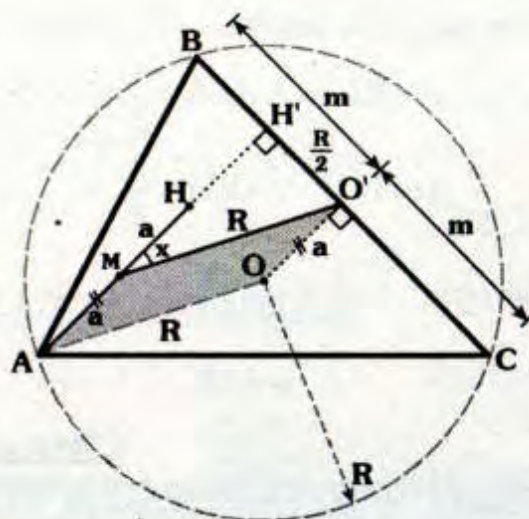
Paso 2

- Como $\triangle ABCD$: Rectángulo
 \Rightarrow C es su ortocentro y el punto medio de \overline{BD} (O) es su circuncentro.
- Luego por el teorema  :
 $\therefore x = 7,5$

Clave D

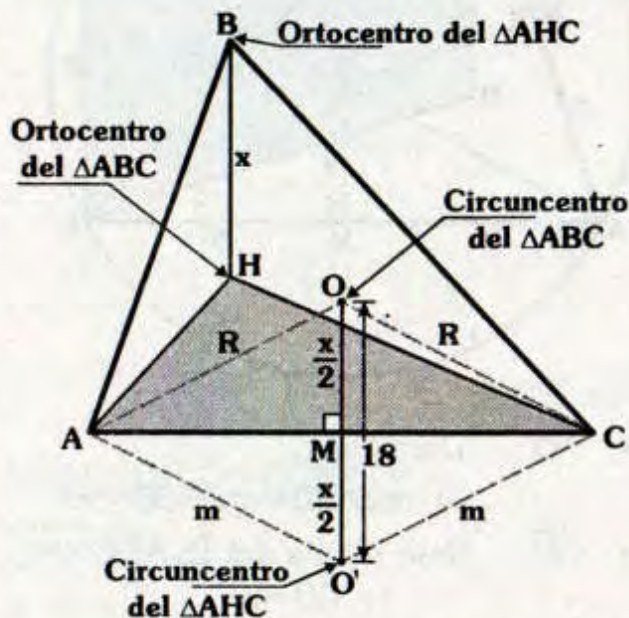
RESOLUCIÓN N° 142

- Como H es ortocentro
 $\Rightarrow A ; H \text{ y } H' \text{ son colineales.}$
- Por el teorema 9.4. : $\overline{OO'} \perp \overline{BC}$
 $\Rightarrow OO' = \frac{AH}{2} = a$



- Luego $AMO'O$ es un paralelogramo (ya que $OO'AM = a$ y $\overline{OO'} \parallel \overline{AM}$)
 $\Rightarrow MO' = R$
- $\triangle MH'O$: Notable de 30° y 60°
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 143

- Se observa $AOCO_1$ es un trapezoide simétrico $\Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{OO_1}$

Por el teorema 9,6 :

$$\triangle ABC : OM = \frac{x}{2}$$

$$\triangle AHC : O_1M = \frac{x}{2}$$

Se nota : $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 18$

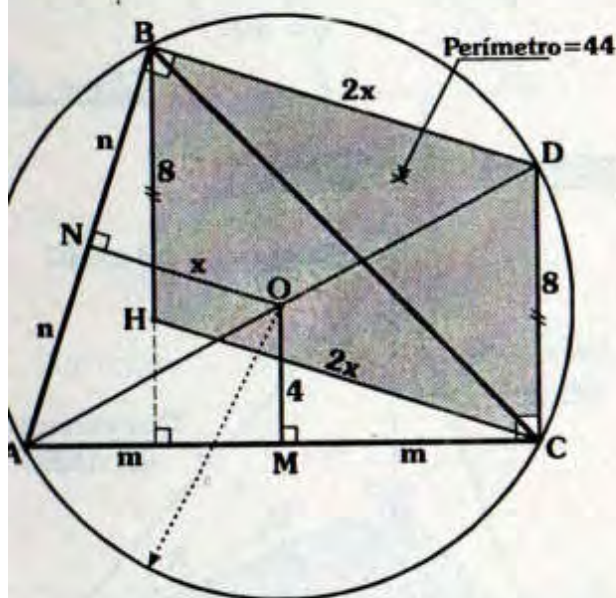
$\therefore x = 18$

Clave E

Nota

Se concluye que $AOCO_1$ es un rombo.

RESOLUCIÓN N° 144



\overline{AD} : Diámetro

$$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle ACD = 90^\circ$$

\overline{OM} : Base media del $\triangle ADC$
 $\Rightarrow CD = 8$

\overline{ON} : Base media del $\triangle ABD$
 $\Rightarrow BD = 2x$

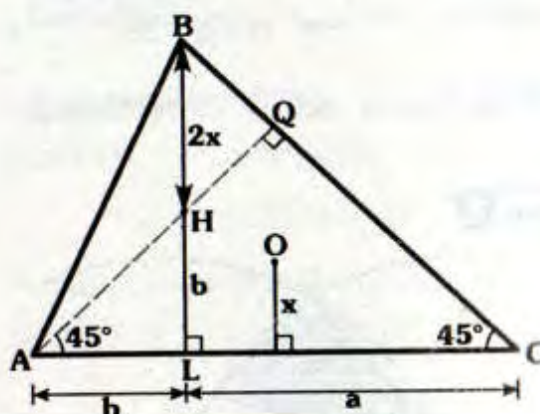
Por el teorema 9.6: $BH = 8$

• Se nota : BHCD es un paralelogramo
 $\Rightarrow CH = 2x$

• Perím. $ABCH = 44 = 8 + 2x + 8 + 2x$
 $\therefore x = 7$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 145

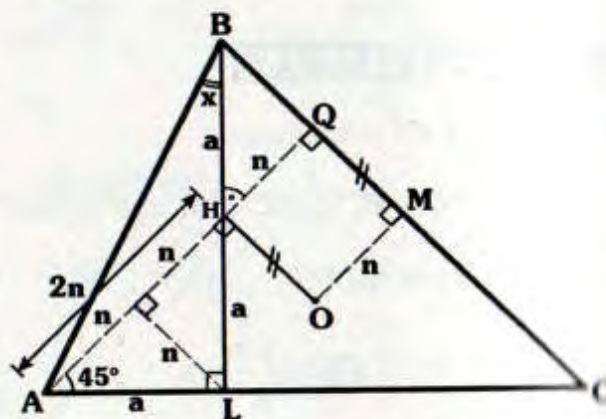


- Se ubica el ortocentro H.
- $\triangle ALH$ notable $\Rightarrow HL = AL = b$
- Por el teorema 9.6: $BH = 2x$
- $\triangle BLC$; notable $\Rightarrow 2x + b = a$
- Dato $a - b = 4$

$\therefore x = 2$

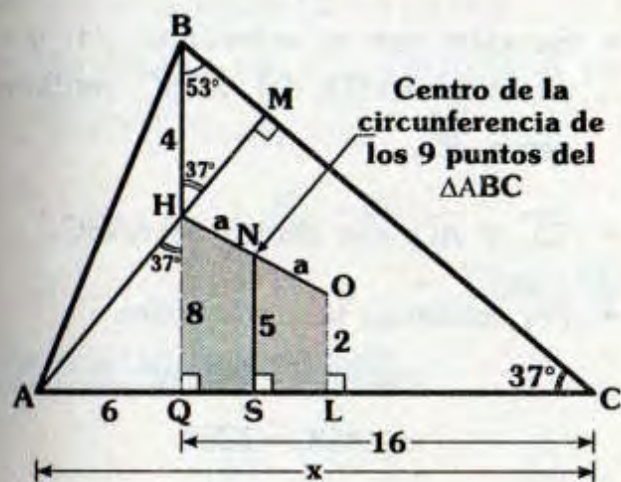
Clave C

RESOLUCIÓN N° 146



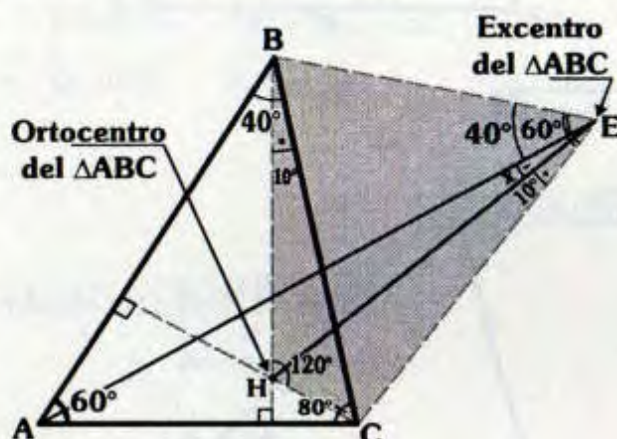
- Se traza la altura \overline{AQ} y $\overline{OM} \perp \overline{BC}$.
- $HQMO$: Rectángulo $\Rightarrow OM = HQ = n$
- Por el teorema 9.6: $AH = 2n$
- Luego trazamos $\overline{LN} \perp \overline{AH}$
 $\Rightarrow \triangle BQH \cong \triangle LNH$ (ALA) $\Rightarrow NH = n$
- $AN = NH = NL = n$ (\triangle)
- $\triangle ANL$: Notable $\Rightarrow m\angle NAL = 45^\circ$
- $\triangle AHL$: Notable $\Rightarrow AL = a$
- $\triangle ALB$: Notable

$$\therefore x = \frac{53^\circ}{2}$$

Clave D**RESOLUCIÓN N° 147**

- Trazamos la altura BQ y $\overline{OL} = \frac{4}{2} = 2$
- Por el teorema 9.6 : $OL = \frac{4}{2} = 2$
- \overline{NS} : Base media del trapecio $HOLQ$
 $\Rightarrow 5 = \frac{HQ + 2}{2} \Rightarrow HQ = 8$

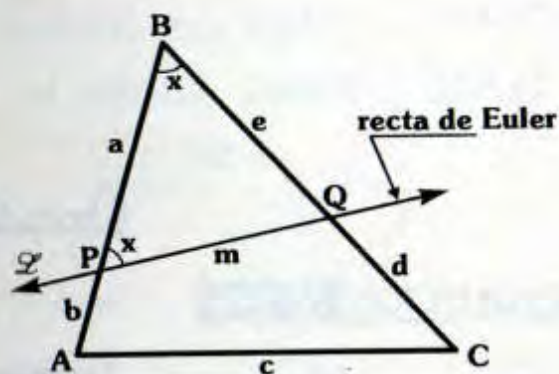
- $\triangle AHQ$: Notable $\Rightarrow AQ = 6$
 - $\triangle BQC$: Notable $\Rightarrow QC = 16$
- $$\therefore x = 22$$

Clave A**RESOLUCIÓN N° 148**

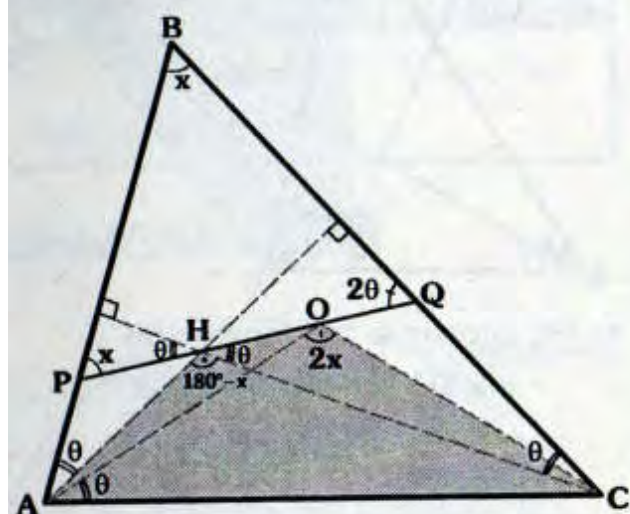
- Por teoremas fundamentales :
 $m\angle BHC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,
 $m\angle BEC = 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = 60^\circ$ y
 $m\angle BEA = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$
- $\triangle BHCE$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle HEC = 10^\circ$
- En "E" : $60^\circ = 40^\circ + x + 10^\circ$
 $\therefore x = 10^\circ$

Clave E**RESOLUCIÓN N° 149****Paso 1**

- Del dato :
 $(a + b + c + d + e) - (b + c + d + m) = a$
 $\Rightarrow e = m \Rightarrow m\angle BPQ = x$



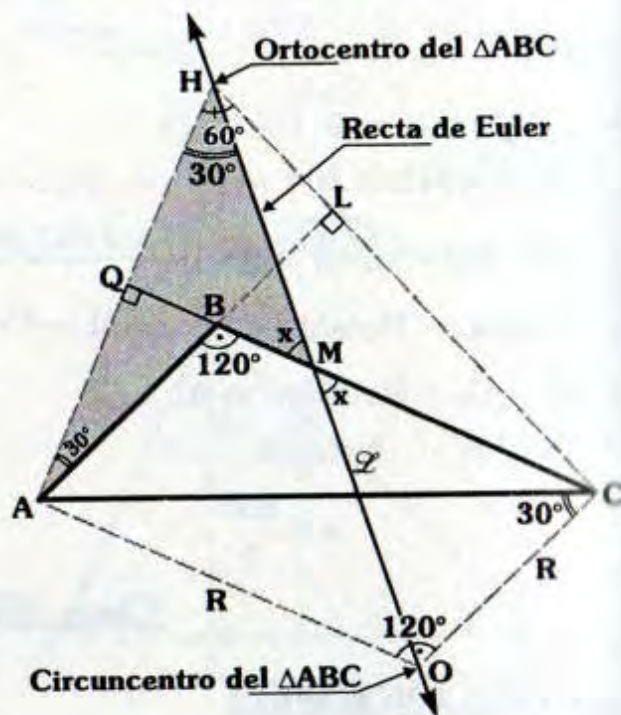
Paso 2



- Por teoremas fundamentales :
 $m\angle AHC = 180^\circ - x$ y $m\angle AOC = 2x$
- Se observa : $x + \theta = 90^\circ$... (I)
- $\triangle PBQ$: $x + x + m\angle BQP = 180^\circ$... (II)
- De (I) y (II) : $m\angle BQP = 2\theta$
- Por el teorema 9.4 : $m\angle OAC = \theta$
- $\triangle HQC$: Por ángulo exterior
 $m\angle QHC = \theta$
- $\triangle AHOC$: Inscriptible
 $\Rightarrow 180^\circ - x = 2x$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave B

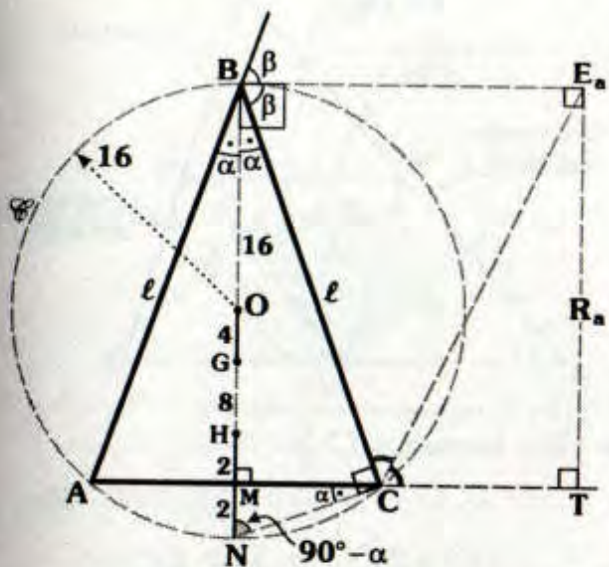
RESOLUCIÓN N° 150



- Se sabe que el ortocentro (H) y el circuncentro (O) del $\triangle ABC$ pertenecen a \mathcal{L} .
- \overline{CL} y \overline{AQ} son alturas del $\triangle ABC$.
- Por teoremas fundamentales :
 $m\angle AHC = 60^\circ$ y
 $m\angle AOC = 120^\circ$
- $\triangle AOC$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle ACO = m\angle OAC = 30^\circ$
- $\triangle AHCO$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle AHO = 30^\circ$
- En $\triangle HQM$: $x + 30^\circ = 90^\circ$
 $\therefore x = 60^\circ$

Clave I

RESOLUCIÓN N° 151

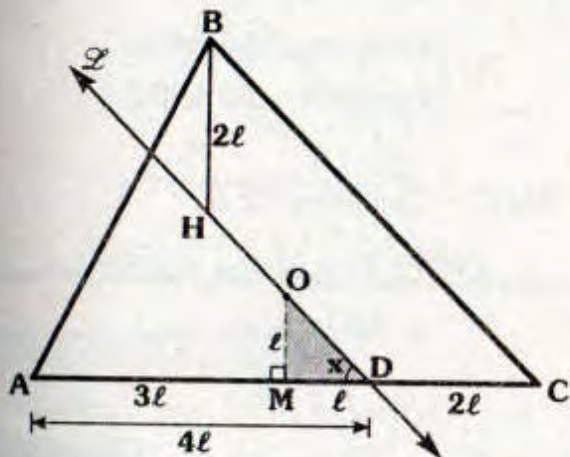


- Como el $\triangle ABC$ es isósceles $\Rightarrow B, O, G$ y H son colineales.
- Por el teorema 9.5 : $HN=2$
- Por el teorema 12.6 : $GH=8$
- Se observa que el circunradio es 16.
- $BMTE_a$: Rectángulo

$$\therefore R_a = 30$$

Clave **C**

RESOLUCIÓN N° 152



- Como \mathcal{L} es la recta de Euler, el circuncentro O pertenece a \mathcal{L} .

- Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$, por el teorema 9.6.

$$OM = \frac{BH}{2} \Rightarrow OM = l$$

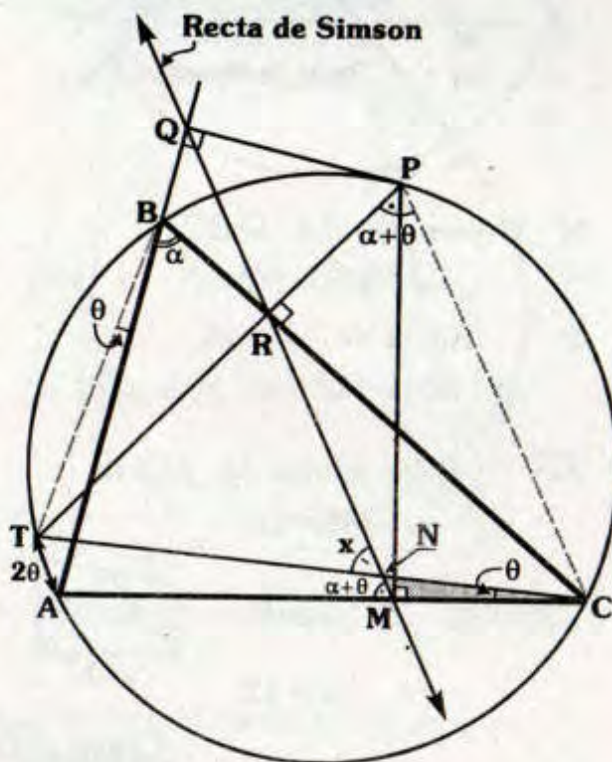
$$\text{Además : } AM = MC = 3l \Rightarrow MD = l$$

- $\triangle OMD$: Notable

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN N° 153



- Por ángulo inscrito :
 $m\angle TBA = m\angle TCA = \theta$
 $m\angle TPC = \alpha + \theta$
- QM : Recta de Simson $\Rightarrow \overline{PR} \perp \overline{BC}$
- $\triangle PRMC$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle RPC = m\angle RMA = \alpha + \theta$

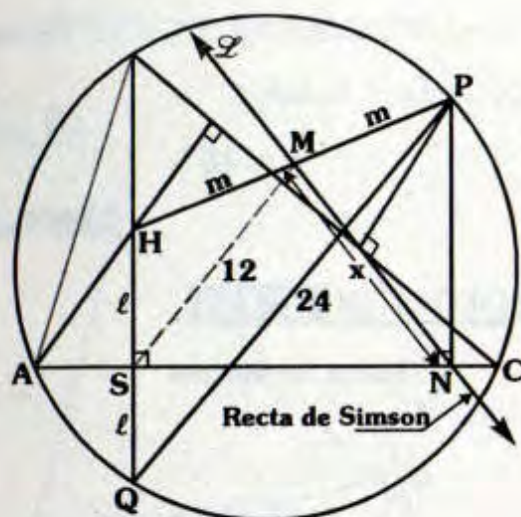
Por ángulo exterior $\triangle MNC$:

$$x + \theta = \alpha + \theta$$

$$\therefore x = \alpha$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 154



H : Ortocentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow HS = SQ = l$$

\mathcal{L} : Recta de Simson

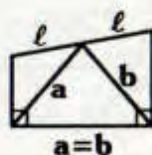
$$\Rightarrow HM = MP = m \text{ (ver pág. 78)}$$

\overline{MS} : Base media del $\triangle QHP$

$$\Rightarrow MS = 12$$

$\square SHPN$: Trapecio

$$\therefore x = 12$$



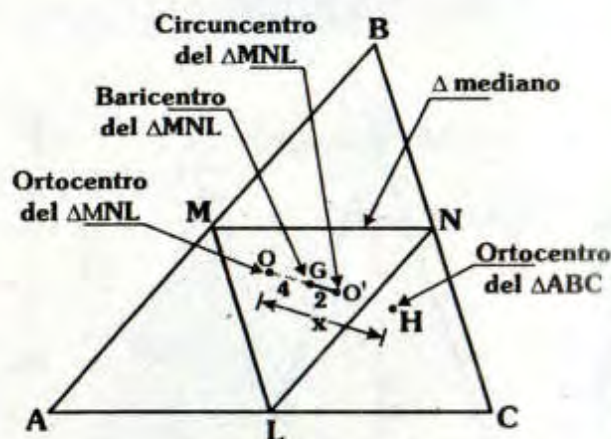
Clave B

RESOLUCIÓN N° 155

Paso 1

$\triangle MNL$: Teorema 12.6

O { Circuncentro del $\triangle ABC$.
Ortcentro del $\triangle MNL$.

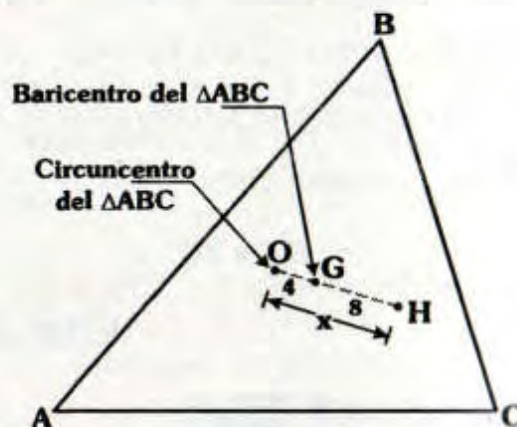


• Por teorema 11.3 :

$\Rightarrow O, G \text{ y } O' \text{ son colineales y}$

$$OG = 2(GO') = 4 \Rightarrow OG = 6$$

Paso 2



• Por el teorema 11.2:

G { Baricentro del $\triangle ABC$
Baricentro del $\triangle MNL$

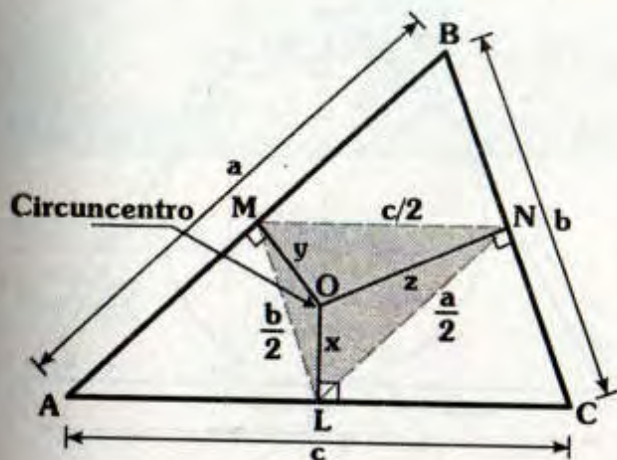
• $\triangle ABC$: Teorema 12.6

$\Rightarrow O, G \text{ y } H \text{ son colineales}$
 $\text{y } GH = 8$

$$\therefore x = 12$$

Clave C

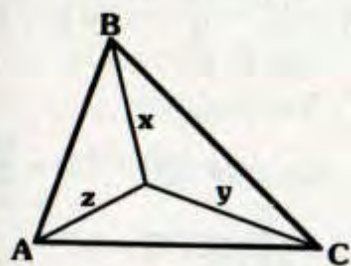
RESOLUCIÓN N° 156



- Por el teorema 9.4 :
M, N y L son puntos medios
 \Rightarrow MNL : Triángulo mediano del triángulo ABC.
- De la observación :
 $P_{\Delta MNL} < x + y + z < 2P_{\Delta MNL}$
- Pero, del dato : $a + b + c = 8$
 $\Rightarrow 2 < x + y + z < 4$
 $\therefore (x + y + z)_{\text{entero}} = 3$

Clave D

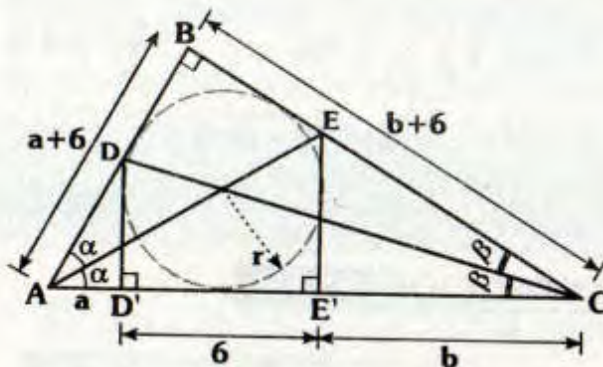
Observación



$$P_{\Delta ABC} < x + y + z < 2P_{\Delta ABC}$$

RESOLUCIÓN N° 157

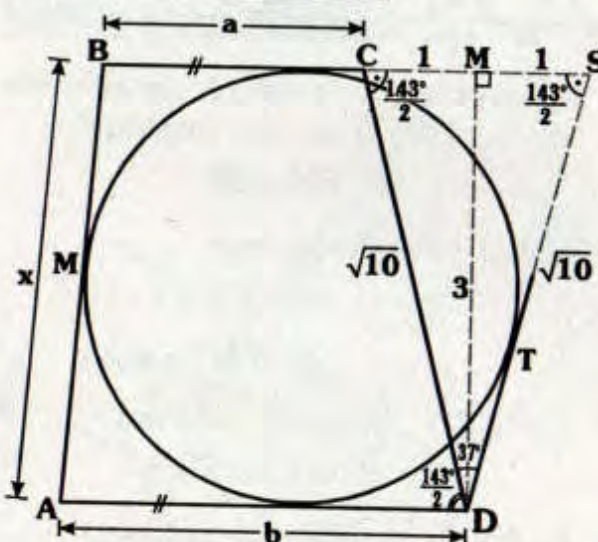
- Por teorema de la bisectriz :
 $AB = AE' = a + 6$ y $BC = CD' = 6 + b$



- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow a + 6 + b + 6 = a + 6 + b + 2r$
 $\therefore r = 3$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 158



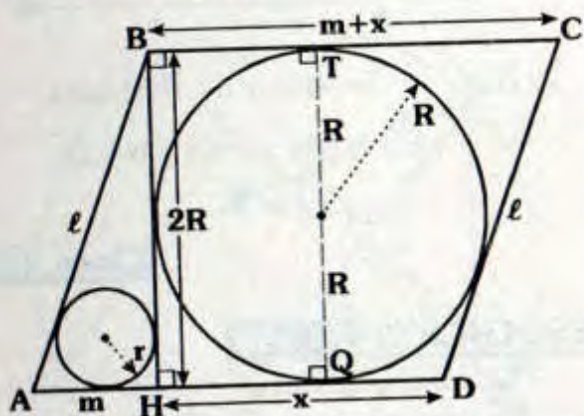
- Prolongamos \overline{DT} y \overline{BC} hasta que se corten en S.
- Por ángulo alternos internos :
 $m\angle SCD = \frac{143^\circ}{2}$
- $\triangle SCD$: Isósceles $\Rightarrow DS = \sqrt{10}$
- $\triangle CMD$: Notable $\Rightarrow CM = MS = 1$
- $\triangle ABCD$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow x + \sqrt{10} = a + 2 + b$

Pero, $\frac{a+b}{2} = 5$ (dato) $\Rightarrow a+b=10$

$\therefore x = 12 - \sqrt{10}$

Clave B

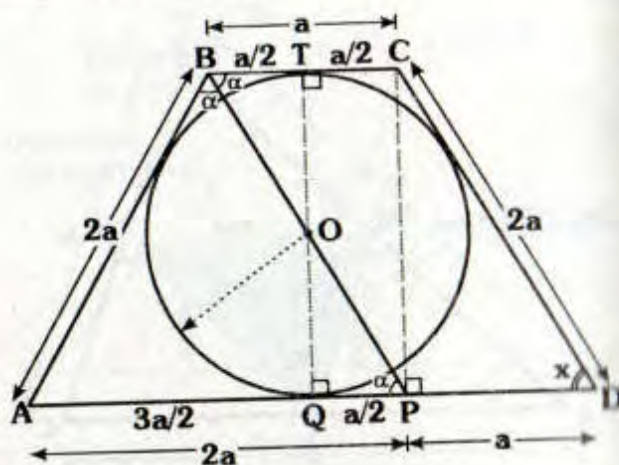
RESOLUCIÓN N° 159



- Aprovechando teoremas de circunferencia, HBTQ es un rectángulo
 $\Rightarrow BH = 2R$
- ABCD : Paralelogramo
 $\Rightarrow AB = CD = l$ y
 $BC = AD = m+x$
- $\triangle HBCD$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow x+m+x = 2R+l \quad \dots (I)$
- $\triangle ABH$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow 2R+m = l+2r \quad \dots (II)$
- (I) - (II) :
 $x+m+x - (2R+m) = 2R+l - (l+2r)$
 $\Rightarrow 2x+m-2R-m = 2R+l-l-2r$
 $2x = 4R-2r$
 $\therefore x = 2R-r$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 160



- Por teoremas de circunferencia :
 $m\angle ABO = m\angle OBC = \alpha$ y
 $m\angle OTC = m\angle OQP = 90^\circ$
- Por ángulos alternos internos :
 $m\angle BPA = \alpha$
- $\triangle ABP$: Isósceles $\Rightarrow AB = AP = 2a$
- $\triangle ABCD$: Teorema de Pitot
 $\Rightarrow 2a+2a = 3a+BC$
 $\Rightarrow BC = a$
- \overline{QT} : Eje de simetría
 $\Rightarrow BT = TC = \frac{a}{2}$; $AQ = QC = \frac{3a}{2}$
- QTCP : Rectángulo
(ya que $QP = TC = \frac{a}{2}$)
 $\Rightarrow m\angle CPQ = 90^\circ$
- $\triangle CPD$: Notable de 30° y 60° .
 $\therefore x = 60^\circ$

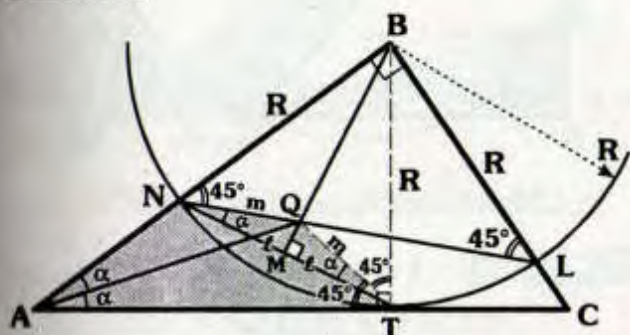
Clave A

Solucionario

Ciclo Repaso

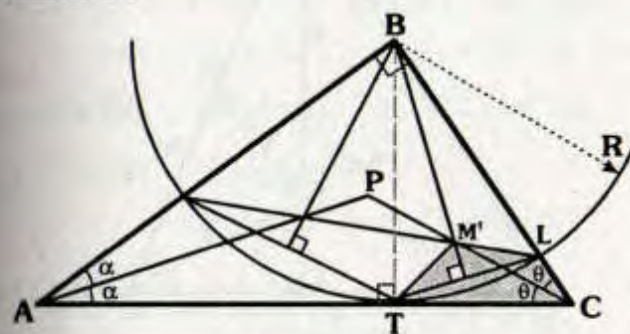
RESOLUCIÓN N° 161

Paso 1



- $\triangle NBL$: Isósceles $\Rightarrow m\angle BNL = 45^\circ$
- Por teorema de circunferencia :
 $NM = MT = \ell$
- $\triangle NQT$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle QNT = m\angle QTN = \alpha$
- $\triangle BNT$: Isósceles $\Rightarrow m\angle QTB = 45^\circ$
- $\triangle ANQT$: Inscriptible
 $\Rightarrow m\angle NAQ = m\angle QAT = \alpha$
 $\Rightarrow \vec{AQ}$: Bisectriz interior del $\triangle ABC$

Paso 2



- De igual modo, $\triangle TM'LC$ es inscrip-
tible

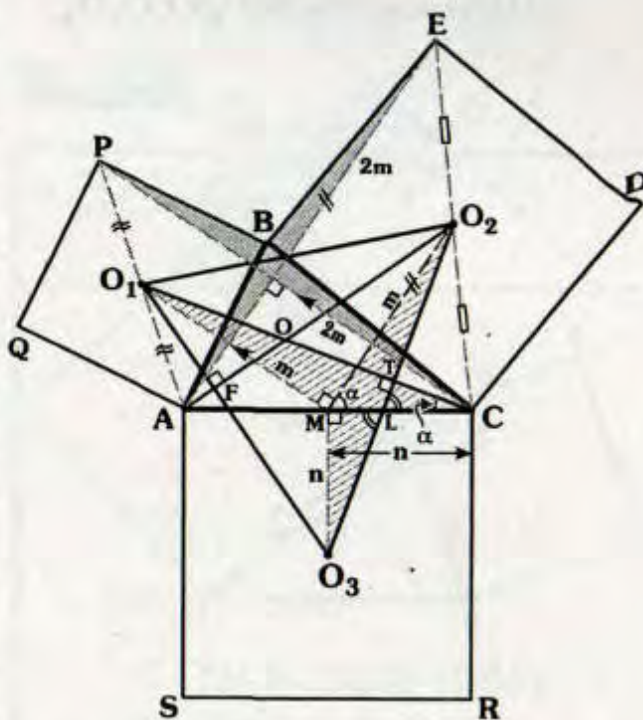
$$\Rightarrow m\angle LCM' = m\angle TCM' = \theta$$

- $\vec{CM'}$: Bisectriz interior del $\triangle ABC$.

$\therefore P$: Incentro del $\triangle ABC$

Clave **A**

RESOLUCIÓN N° 162

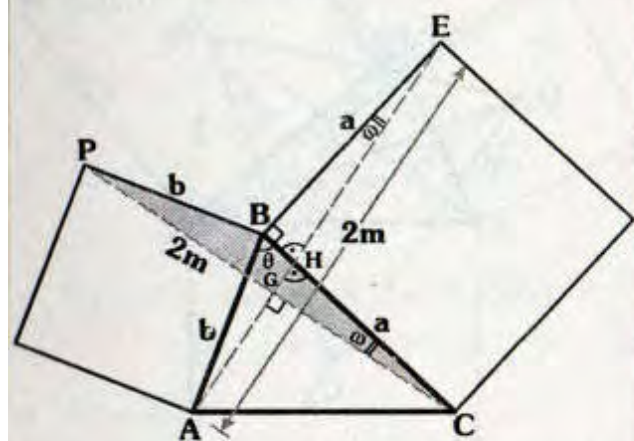


- De la observación :
 $PC = AE = 2m$ y $\overline{AE} \perp \overline{PC}$
- Trazamos $\overline{O_3M} \perp \overline{AC}$, como $ACRS$ es
cuadrado $\Rightarrow O_3M = MC = n$

- $\overline{O_1M}$: Base media del ΔPAC
 $\Rightarrow \overline{O_1M} \parallel \overline{PC}$ y $O_1M = m$
 - $\overline{O_2M}$: Base media del ΔREC
 $\Rightarrow \overline{O_2M} \parallel \overline{AE}$ y $O_2M = m$
 - Por ángulos entre paralelas :
 $m\angle O_1MO_2 = 90^\circ$
 - $\Delta O_2MO_3 \cong \Delta O_1MC$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle MO_3O_2 = m\angle MCO_1 = \alpha$
 - ΔLTC : Por ángulo exterior
 $\Rightarrow m\angle LTO_1 = 90^\circ$
 - Del mismo modo $m\angle O_1FO_2 = 90^\circ$
- $\therefore O$: Ortocentro del $\Delta O_1O_2O_3$

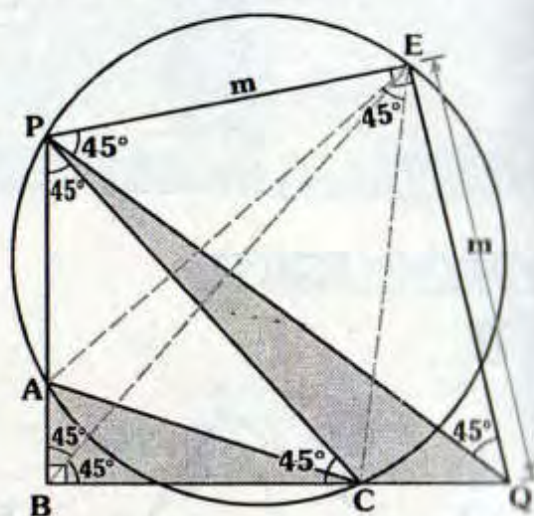
Clave C

Observación



- $\Delta ABE \cong \Delta PBC$ (LAL)
 $\Rightarrow m\angle PCB = m\angle BEA = \omega$ y
 $PC = AE = 2m$
- ΔHGC : Por ángulo exterior
 $m\angle CGA = 90^\circ$
 $\therefore \overline{AE} \perp \overline{PC}$

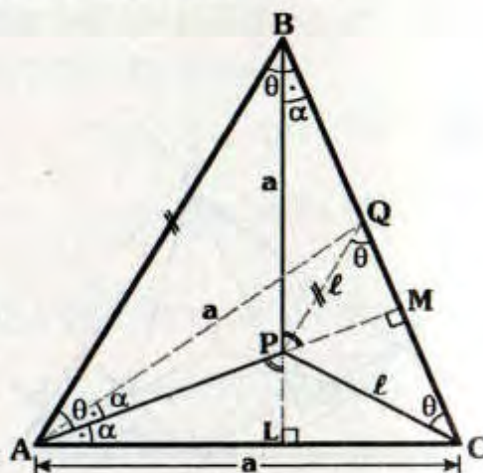
RESOLUCIÓN N° 163



- Por Definición : $m\angle EBC = 45^\circ$
 - $\Delta BPEQ$: Inscriptible
 $m\angle EPQ = m\angle EQP = 45^\circ$
 - Por teorema fundamental :
 $m\angle REC = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
 - Por ángulo inscrito : $m\angle APC = 45^\circ$
 - ΔPCQ : Por el criterio 8.15.
- $\therefore E$: Circuncentro del ΔPCQ

Clave I

RESOLUCIÓN N° 164

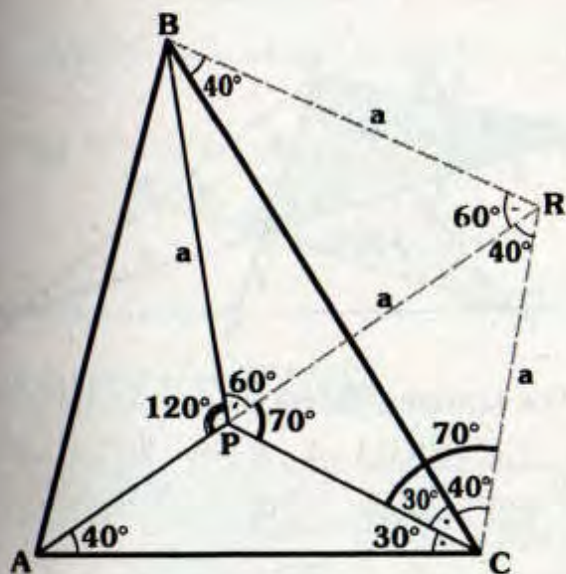


- Trazamos $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$
 \Rightarrow $\triangle ABQP$ es un trapecio isósceles
 \Rightarrow $AQ=BP=a$ y
 $m\angle PBQ = m\angle QAP = \alpha$
- Se observa que el $\triangle QPC$ es isósceles
 $\Rightarrow PQ=PC=\ell$
- $\triangle APQ \cong \triangle APU$ (LLL) $\Rightarrow m\angle PAC = \alpha$
- $\triangle AQC$: Isósceles $\Rightarrow \overline{AM}$ es altura
- Luego al prolongar \overline{BP} se nota que \overline{BL} es altura.

$\therefore P$ es ortocentro de $\triangle ABC$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 165



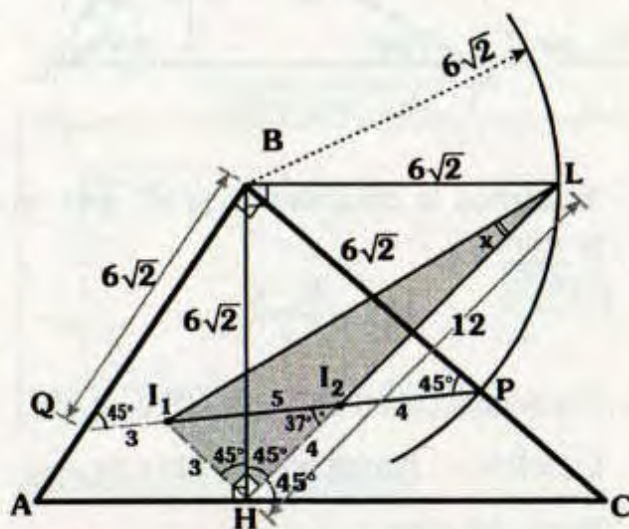
- Prolongamos \overline{AP} hasta R , tal que :
 $m\angle ARC = 40^\circ \Rightarrow AC=CR=a$
- $\triangle PRC$: Isósceles $\Rightarrow PR=RC=a$
- $\triangle PBR$: Equilátero
 $\Rightarrow BR=a$ y $m\angle BRP = 60^\circ$
- $\triangle BRC$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle RBC=m\angle RCB = 40^\circ$

- Como $\triangle RPC$ es isósceles
 $\Rightarrow m\angle RCP=70^\circ \Rightarrow m\angle BCP = 30^\circ$
- Se observa que \overline{CP} es bisectriz y
 $m\angle APB = 120^\circ = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2}$

$\therefore P$: Incentro del $\triangle ABC$
 (criterio 8.3)

Clave D

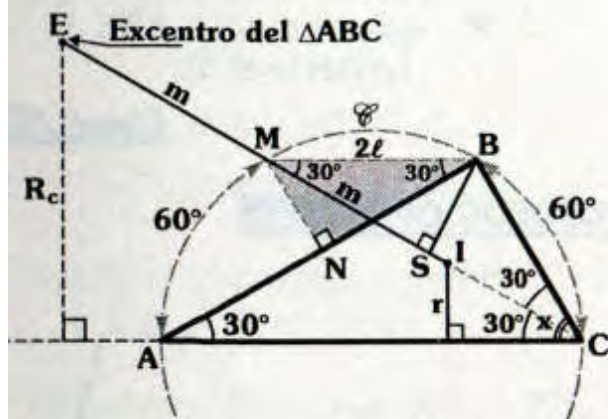
RESOLUCIÓN N° 166



- Por el teorema 9.8. (c)
 $\Rightarrow m\angle BQP = m\angle BPQ = 45^\circ$,
 $QB=BH=BP$,
 $PI_2 = HI_2 = 4$ y $QI_1 = HI_1$
- $\triangle I_1HI_2$: Notable
 $\Rightarrow HI_3 = 3$ y $m\angle I_1I_2H = 37^\circ$
- $\triangle QBP$: Notable $\Rightarrow QB=BP=5\sqrt{2}$
- Como $BH=BL=6\sqrt{2}$,
 entonces $m\angle BHL = 45^\circ$
 $\Rightarrow H, I_2, L$ son colineales
- $\triangle HBL$: Notable $\Rightarrow HL=12$

$\triangle I_1HL$: Notable

$$\therefore x = 14^\circ$$

Clave **B****RESOLUCIÓN N° 167**

Trazamos la circunferencia \mathcal{C} , por el teorema 9.7:

$$MN = \frac{R-r}{2}$$

Por ángulo inscrito : $m\angle BMC = 30^\circ$

$\triangle MBS$: Notable $\Rightarrow BM=2\ell$

Pero, del dato :

$$R-r=2\ell \Rightarrow \frac{R-r}{2}=\ell$$

$\triangle MNB$: Notable $\Rightarrow m\angle MBN = 30^\circ$

Por ángulo inscrito : $m\angle ACM = 30^\circ$

$$\therefore x = 60^\circ$$

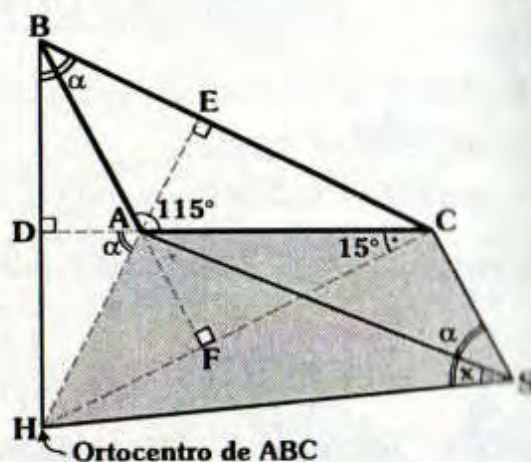
Clave E**RESOLUCIÓN N° 168**

Como H es ortocentro :

\overline{AE} , \overline{BD} y \overline{CF} son alturas del $\triangle ABC$

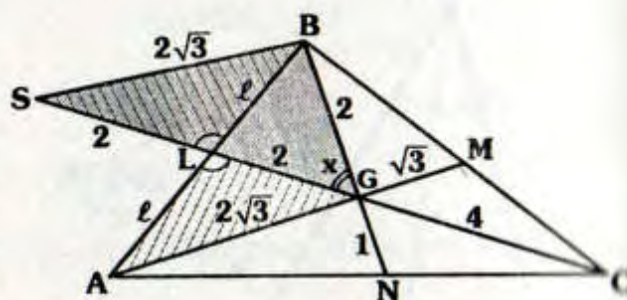
$\triangle ADBE$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle DAH = \alpha$$



- $\triangle AFC$: $m\angle ACF = 15^\circ$
- $\triangle AHSC$: Inscriptible
 $\therefore x = 15^\circ$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 169

- Por teorema de baricentro :
 $GC=2(GL)=4$; $GB=2(GN)=2$,
 $GA=2(GM)=2\sqrt{3}$
- Prolongamos \overline{GL} hasta S, tal que
 $LS=2$
- $\triangle LBS \cong \triangle AGL$ (LAL) $\Rightarrow SB=2\sqrt{3}$
- $\triangle SBG$: Notable

$$\therefore x = 60^\circ$$

Clave C

$$m_{\angle BE_1H} = \frac{2\beta}{2} \text{ y } m_{\angle BE_2H} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\begin{aligned} \triangle E_1 H E_2 B: \quad m\angle E_1 B E_2 &= \alpha + 90^\circ + \beta \\ \Rightarrow m\angle E_1 B E_2 &= 135^\circ \end{aligned}$$

$\Delta E_1 H E_2$: Se observa que \overline{HB} es bisectriz interior y

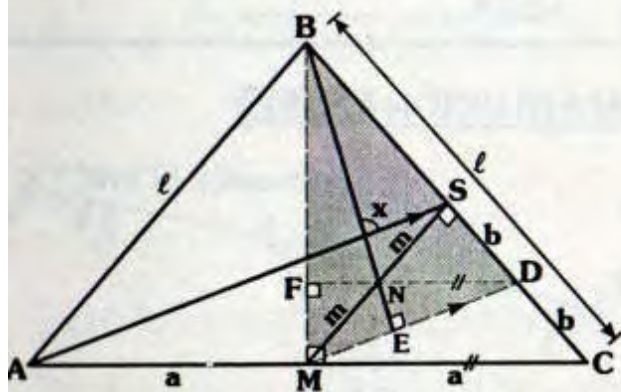
$$m\angle E_1BE_2 = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow B : \text{Incentro del } \triangle E_1 H E_2$$

$$\Rightarrow m_{\Delta} H E_2 B = m_{\Delta} B E_2 E_1 = \alpha$$

LBHE₂: Inscriptible

$$\therefore x = 45^\circ$$

Clave **C****RESOLUCIÓN N° 173**


Ubicamos el punto medio D de \overline{SC} ,
 $SD = DC = b$.

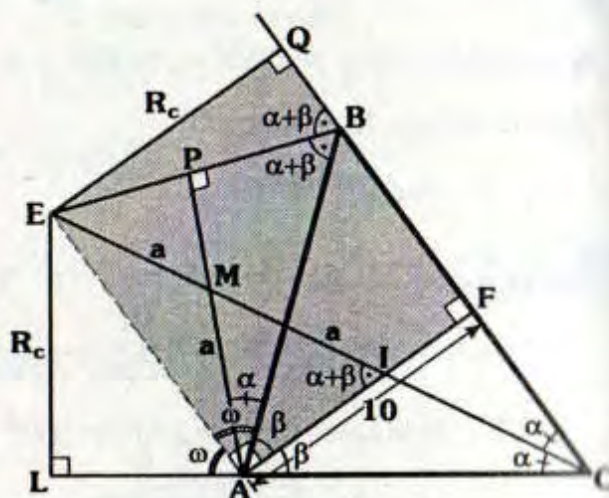
\overline{DN} : Base media del ΔMSC
 $\Rightarrow \overline{DN} // \overline{MC}$, con lo cual
 $m\angle DFM = 90^\circ$.

Se observa que \overline{DF} y \overline{MS} son alturas del $\triangle BMD \Rightarrow N$ es ortocentro
 $\Rightarrow \overline{BE}$ es altura

- \overline{MD} base del $\triangle ASC \Rightarrow \overline{DM} \parallel \overline{AS}$
- Finalmente por ángulos correspondientes.

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave 

RESOLUCIÓN N° 174

- I : Incentro
 $\Rightarrow m\angle BCI = m\angle ACI = \alpha$ y
 $m\angle BAI = m\angle CAI = \beta$
- E : Excentro
 $\Rightarrow m\angle EAL = m\angle EAB = \omega$ y
 $\Rightarrow m\angle QBE = m\angle EAB = \alpha + \beta$

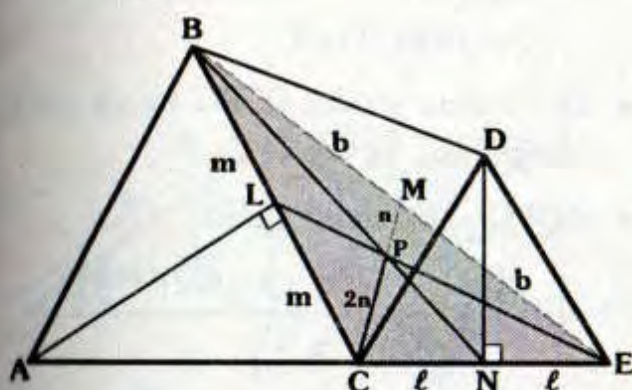
- Sabemos : $m\angle EAI = 90^\circ$
- $\triangle APB$: $\alpha + \alpha + \beta = 90^\circ$
- $\triangle AFC$: $m\angle BFA = \beta + 2\alpha = 90^\circ$
- EQFA : Rectángulo

$$\therefore R_c = 10$$

Clave **H**

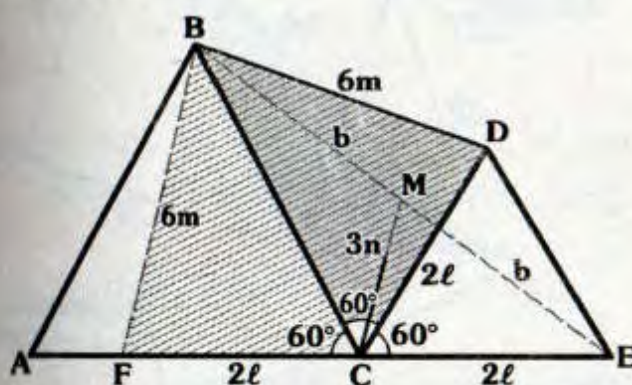
RESOLUCIÓN N° 175

Paso 1



- \overline{EL} y \overline{BN} son medianas, entonces P es baricentro del $\triangle BCE$
 $\Rightarrow BM = ME = b$ y $CP = 2(PM) = 2n$

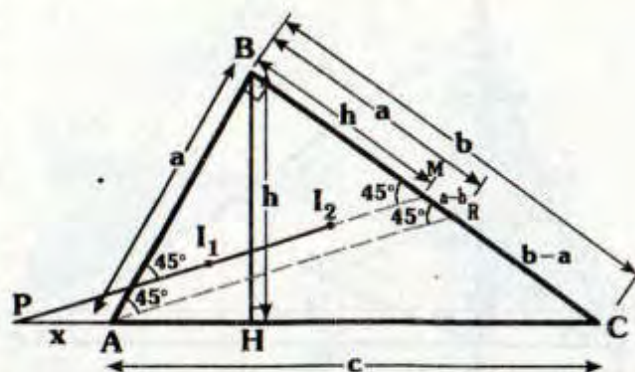
Paso 2



- Se ubica S en \overline{AC} tal que $SC = 2l$, \overline{CM} : base media del $\triangle BSE$
 $\Rightarrow BS = 6m$
- $\triangle BSC \cong \triangle BCD$ (LAL)
 $\Rightarrow BD = BS = 6m$
 $\therefore \frac{BD}{CP} = \frac{6m}{2m} = 3$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 176

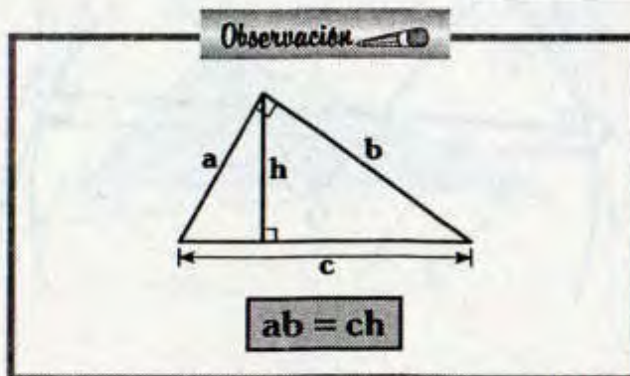


- Por el teorema 9.8 :
 $m\angle BMP = 45^\circ$ y $BH = BM = h$
- Trazamos $\overline{AR} \parallel \overline{PM} \Rightarrow AB = BR = a$
- $\triangle PMC$: Teorema de Tales
 $\Rightarrow \frac{a-h}{b-a} = \frac{x}{c} \dots (I)$
- De la observación :
 $ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c} \dots (II)$
- Reemplazando (II) en (I) :

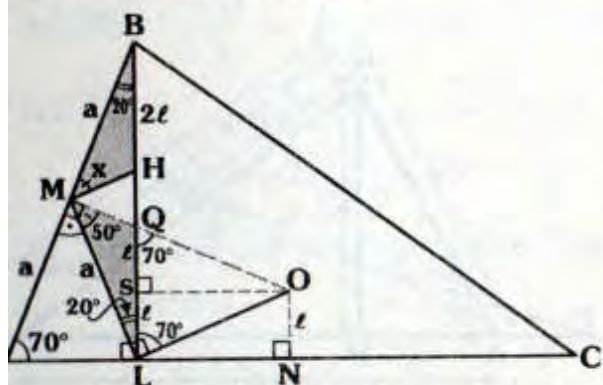
$$\frac{a - \frac{ab}{c}}{b - a} = \frac{x}{c}$$

$$\therefore x = \frac{a(c-b)}{b-a}$$

Clave E



RESOLUCIÓN N° 177



Por el teorema 9.6 : $BM = 2(ON) = 2\ell$

Por el teorema 9.4 : $m\angle AMO = 90^\circ$

$\triangle ABL$: Por el teorema \triangle

$$\Rightarrow ML = a \Rightarrow m\angle MLB = 20^\circ$$

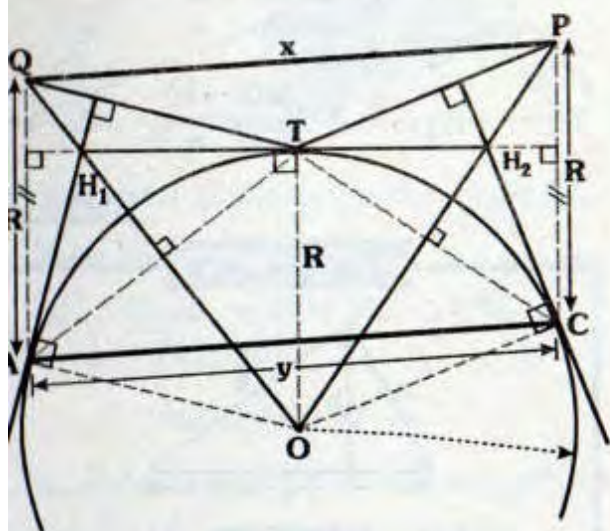
Luego, trazamos la altura OS del triángulo isósceles OQL (SLNO : rectángulo) $\Rightarrow LS = SQ = 2\ell$

$$\triangle MHB \cong \triangle MQL \quad (LAL)$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 178

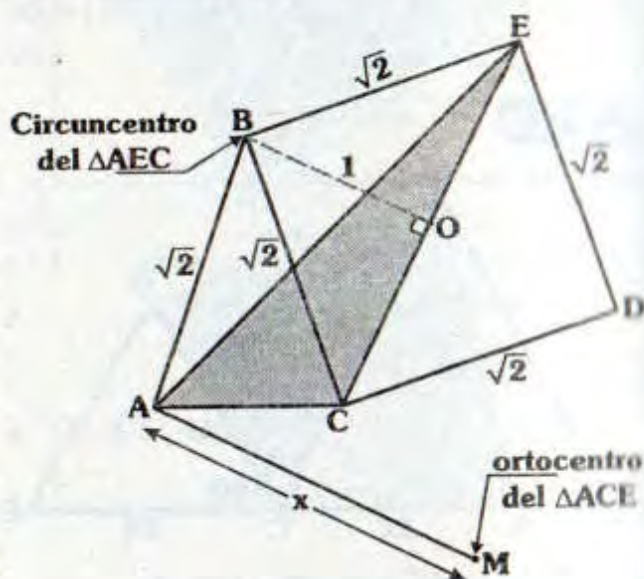


- H_1 : Ortocentro de AQT
- Se nota que : $\overline{AO} \parallel \overline{QT}$ y $\overline{AQ} \parallel \overline{TO}$
 \Rightarrow AQTO : Paralelogramo
 $\Rightarrow AQ = TO = R$
- Del mismo modo, OTPC es un paralelogramo $\Rightarrow OT = PC = R$
- AQPC : Paralelogramo
 $(AQ = PC = R \text{ y } \overline{AQ} \parallel \overline{PC})$

$$\therefore \frac{x}{y} = 1$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 179

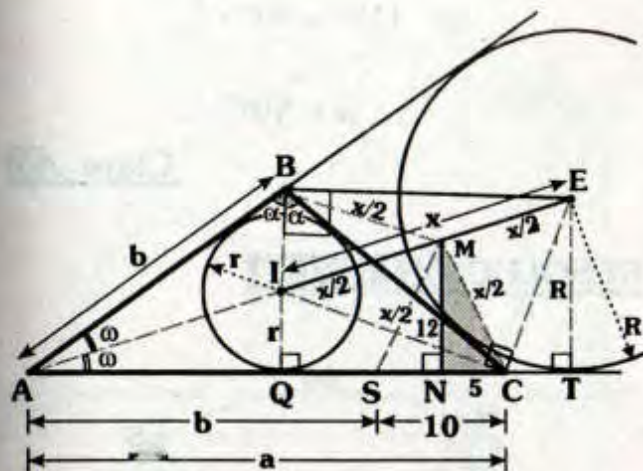


- Como $AB = BC = BE = \sqrt{2}$:
 $\Rightarrow B$: Circuncentro del $\triangle ACE$
- Por propiedad del cuadrado $BO = 1$.
- De la observación del teorema 9.6:

$$x = 2(1)$$

$$\therefore x = 2$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 180

- Sabemos : A, I, E son colineales
- Por el teorema 9.3 :

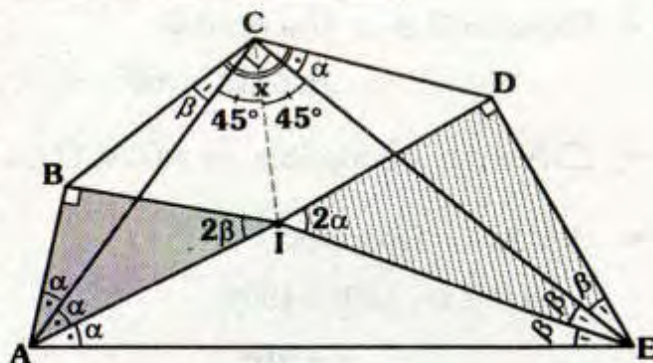
$$m\angle IBE = m\angle ICE = 90^\circ$$
- Sea : $IM = ME = \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow CM = BM = \frac{x}{2} \quad (\triangle)$$
- Luego, se ubica S en \overline{AC} , tal que
 $AS = b \Rightarrow SC = 10 \quad (a - b = 10, \text{ dato}).$
- $\triangle ABM \equiv \triangle AMS \text{ (LAL)} \Rightarrow SM = \frac{x}{2}$
- \overline{MN} : Base media del trapecio QIET

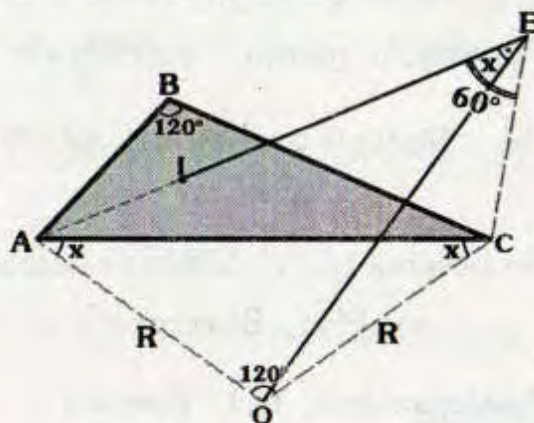
$$\Rightarrow MN = \frac{R+r}{2}$$
- Pero, $R+r = 24 \Rightarrow MN = 12$
- $\triangle SMC$: Isósceles $\Rightarrow SN = NC = 5$
- $\triangle MNC$: $5^2 + 12^2 = (x/2)^2$

$$\therefore x = 26$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 181

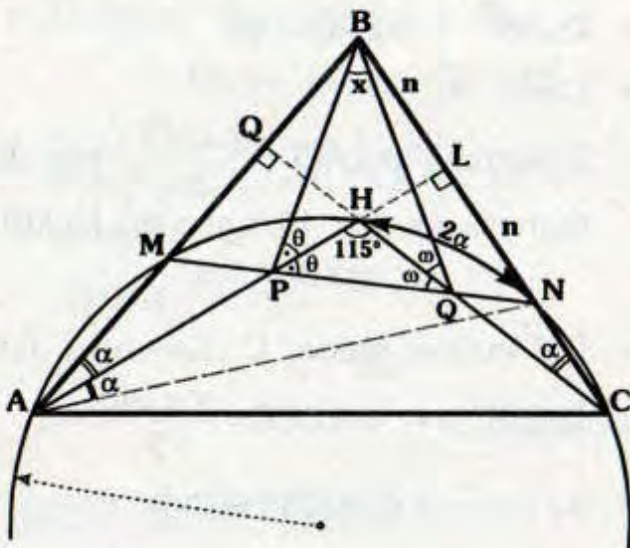
- $\triangle ACE : 2\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$
 - I : Incentro del $\triangle ACE$
 $\Rightarrow m\angle ACI = m\angle ECI = 45^\circ$
 - $\triangle ABI : m\angle AIB = 2\beta$
 - Como $\overset{\rightarrow}{AC}$:
 Bisectriz y $m\angle ACI = \frac{m\angle ABI}{2}$, por el
 teorema $\Rightarrow C$: Excentro del $\triangle ABI$
 $\Rightarrow m\angle BCA = \beta$
 - Del mismo modo, C : Excentro del
 $\triangle EDI \Rightarrow m\angle DCE = \frac{m\angle DIE}{2} = \alpha$
 - Se observa : $x = \alpha + 90^\circ + \beta$
- $\therefore x = 135^\circ$

Clave **E****RESOLUCIÓN N° 182**

- Teorema 7.4 : $m\angle AOC = 120^\circ$
- Teorema 7.3 : Inscriptible
 $m\angle AEC = 60^\circ$
- $\triangle AECO$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle ACO = x$
- $\triangle AOC$: Isósceles
 $\Rightarrow x + x + 120^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 30^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 183



- H : Ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ y \overline{CQ} son alturas, sabemos :
 $m\angle QAH = m\angle LCH = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\angle HAN = \alpha$
- \overline{AL} : Bisectriz y altura del $\triangle ABN$
 $\Rightarrow BL = LN = n$
- Se observa que el $\triangle PBN$ es isósceles
 $\Rightarrow \overline{PH}$: Bisectriz
- Analogamente, \overline{QH} : Bisectriz

- H : Incentro del $\triangle PBQ$
 $\Rightarrow 115^\circ = 90^\circ + \frac{x}{2}$
 $\therefore x = 50^\circ$

Clave D

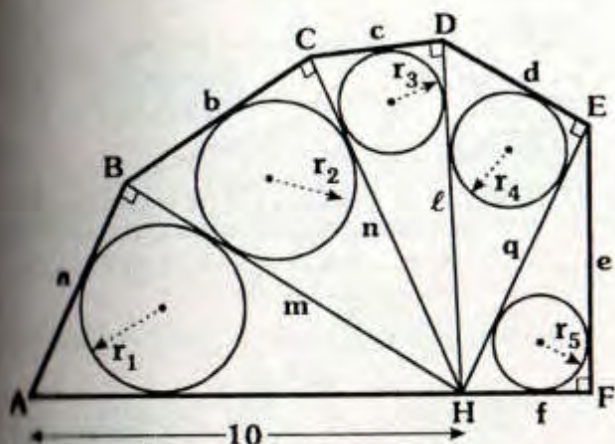
RESOLUCIÓN N° 184



- Por teoremas fundamentales :
 $m\angle AHC = 60^\circ$ y $m\angle AOC = 120^\circ$
- $\triangle AHCO$: Inscriptible
- Por ángulo inscrito : $m\angle ASC = 60^\circ$
- $\triangle BSC$: Equilátero $\Rightarrow BC = BS = b$
- Se observa que :
 $m\widehat{HAO} = m\widehat{SHA} = 60^\circ + \beta \Rightarrow x = a + b$
- Pero, $a + b = 12$
 $\therefore x = 12$

Clave C

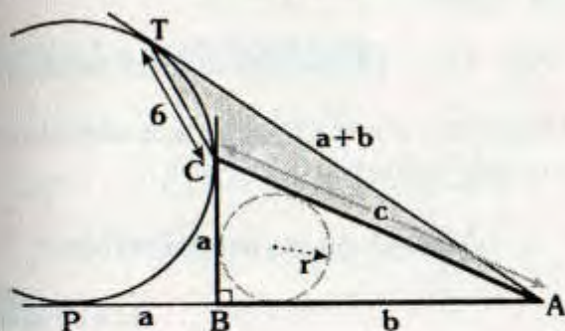
SOLUCIÓN N° 185



- Piden :
 - Por el teorema de Poncelet :
- $$2p_{ABCDEF} = a + b + c + d + e + f + 10 \quad \dots (I)$$
- $$\begin{aligned} \triangle ABH: a + m &= 10 + 2r_1 \\ \triangle BCH: b + n &= m + 2r_2 \\ \triangle CDH: c + l &= n + 2r_3 \\ \triangle DEH: d + q &= l + 2r_4 \\ \triangle EFH: e + f &= q + 2r_5 \end{aligned} \quad (+)$$
- $$a + b + c + d + e + f = 10 + 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)$$
- 10 (dato)
- $$\dots (II)$$
- Reemplazando (II) en (I) :
- $$\therefore 2p_{ABCDEF} = 40$$

Clave A

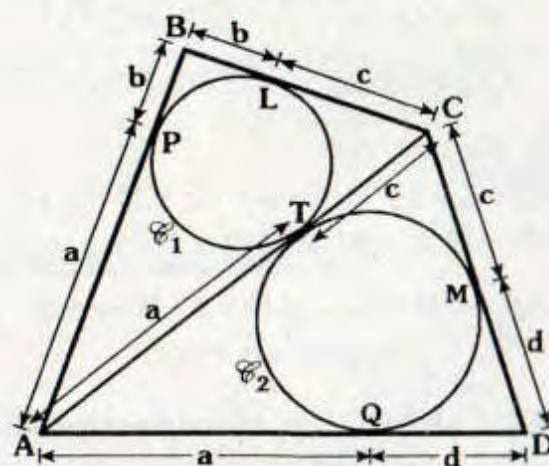
SOLUCIÓN N° 186



- $\triangle ABC$: Teorema de Poncelet
 $\Rightarrow a + b = c + 2r \quad \dots (I)$
- Por teorema de circunferencia :
 $BP = BC = a$ y $AP = AT = a + b$
- $\triangle CTA$: Teorema $\Rightarrow 6 > a + b - c \quad \dots (II)$
- Reemplazando (I) en (II) :
 $6 > c + 2r - c \Rightarrow 6 > 2r \Rightarrow 3 > r$
 $\therefore r_{\text{máx. entero}} = 2$

Clave E

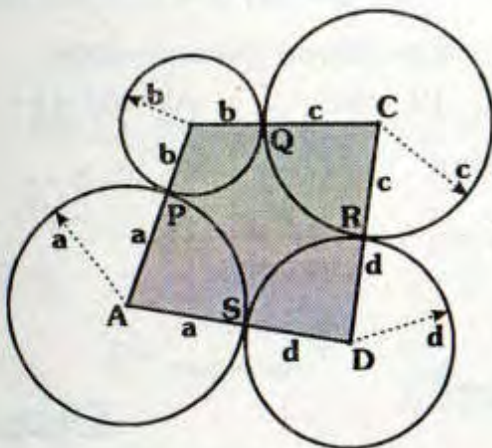
SOLUCIÓN N° 187



- Por teorema en la circunferencia :
 $AP = AT = AQ = a$; $CL = CT = CM = c$;
 $BP = BL = b$ y $DM = DQ = d$
 - Se observa :
 $AB = a + b$; $BC = b + c$; $CD = c + d$ y
 $DA = d + a$, entonces en el cuadrilátero ABCD :
 $AB + CD = BC + AD = a + b + c + d$
 - Como el $\triangle ABCD$, cumple con el teorema de Pitot.
- $$\therefore ABCD \text{ es circunscriptible}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 188



- Por circunferencia :

$$AP=AS=a \quad , \quad BP=BQ=b$$

$$CQ=CR=c \quad , \quad DR=DS=d$$

- Se observa que :

$$AB=a+b, \quad BC=b+c, \quad CD=c+d \quad \text{y} \quad DA=d+a; \quad \text{entonces :}$$

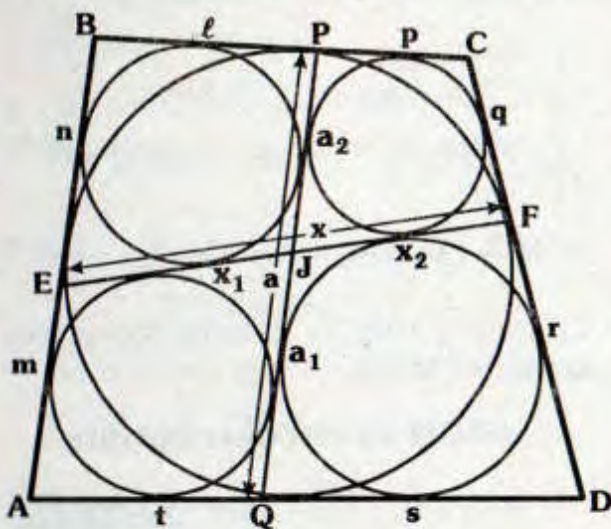
$$AB+CD=BC+AD=a+b+c+d$$

(Teorema de Pitot)

∴ El $\triangle ABCD$ es circunscriptible

Clave B

RESOLUCIÓN N° 189



- Por el teorema de Pitot :

$$\triangle EBPJ : \quad n+a_2=\ell+x_1$$

$$\triangle JPCF : \quad a_2+q=p+x_2$$

$$\triangle JFDQ : \quad a_1+r=x_2+t$$

$$\triangle AEJQ : \quad a_1+m=x_1+t$$

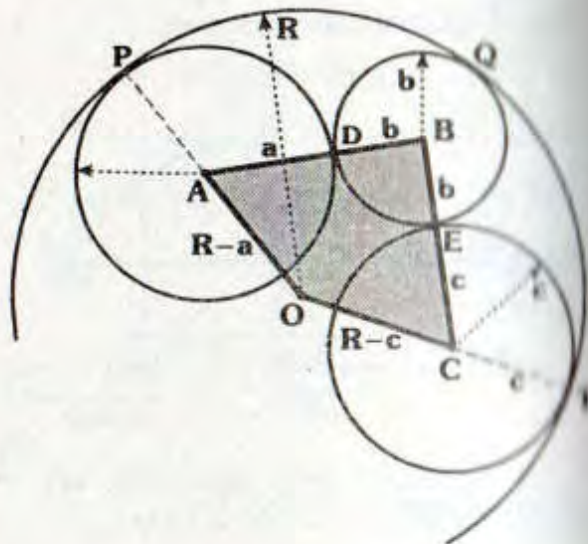
$$\triangle ABCD : \quad \ell+p+s+t=m+n+q+t$$

$$\underbrace{a_1+a_1+a_2+a_2}_{2a}=x_1+x_1+x_2+x_2$$

$$\therefore x=a$$

Clave III

RESOLUCIÓN N° 190



- Por teorema de circunferencia :

$$OA=R-a ; \quad AB=a+b ;$$

$$BC=b+c \quad \text{y} \quad CO=R-c$$

- Se nota :

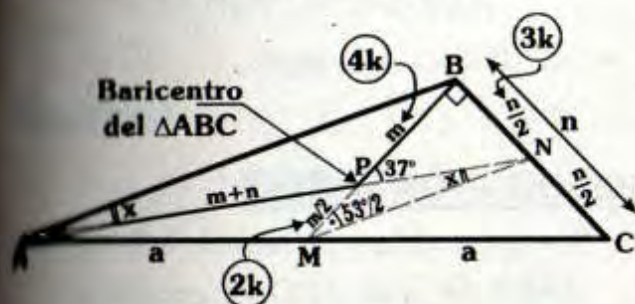
$$AB-OC=BC-AO=a+b-c-R$$

- Finalmente por el recíproco del teorema de Steiner.

∴ $ABCO$ es exinscriptible

Clave C

RESOLUCIÓN N° 191



- Como P es baricentro del $\triangle ABC$:

$$BN = NC = \frac{n}{2} \text{ y } AM = MC = a$$

- \overline{MN} : Base media del $\triangle ABC$
 $\Rightarrow m\angle ANM = x$

- Por teorema fundamental :

$$PN = \frac{m+n}{2} \text{ y } PM = \frac{m}{2}$$

- $\triangle PBN$: $m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$
 $3m = 2n \Rightarrow m = 4k \text{ y } n = 6k$

- Reemplazando en el gráfico; se nota que los $\triangle PBN$ y $\triangle MBN$ son notables

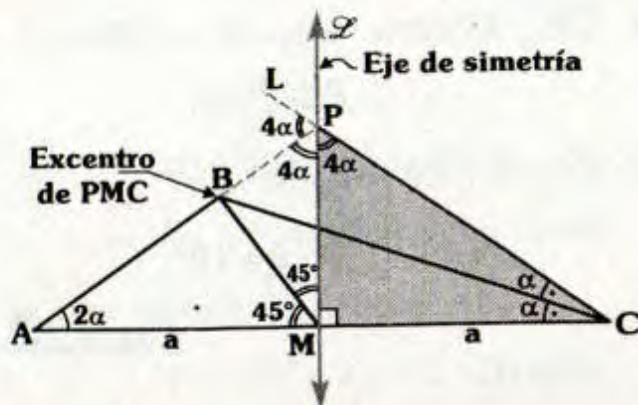
$$\Rightarrow m\angle BPN = 37^\circ \text{ y } m\angle BMN = \frac{53^\circ}{2}$$

- $\triangle MPN$: $\frac{53^\circ}{2} + x = 37^\circ$
 $\therefore x = 10,5^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 192

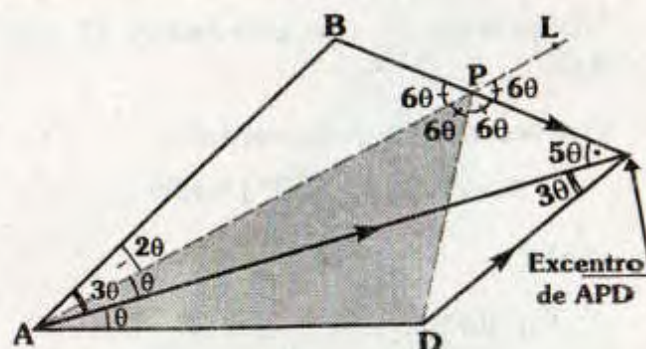
- Trazamos la mediatriz de \overline{AC} (\mathcal{L}), se nota : $m\angle PCA = 2\alpha$ y $m\angle BMP = 45^\circ$
- $\triangle APC$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow m\angle LPA = 4\alpha$



- \overline{BM} y \overline{CB} son bisectrices
 $\Rightarrow B$: Excentro de $\triangle PMC$
 $\Rightarrow m\angle BPM = 4\alpha$
- De la simetría : $m\angle MPC = 4\alpha$
- En "P" : $4\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ$
 $\therefore \alpha = 15^\circ$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 193



- Ubicamos P en \overline{BC} , tal que:
 $m\angle BAP = 2\theta$
- $\triangle APC$: Por ángulo exterior
 $\Rightarrow m\angle APB = 6\theta$
- $\triangle ABP \cong \triangle ADP$ (ALA) $\Rightarrow m\angle APD = 6\theta$
- Se observa que \overline{AC} es bisectriz interior de $\triangle APD$ y $m\angle APD = 2(m\angle ACD) = 6\theta$
 $\Rightarrow C$: Excentro de $\triangle APD$ (criterio 8.5)

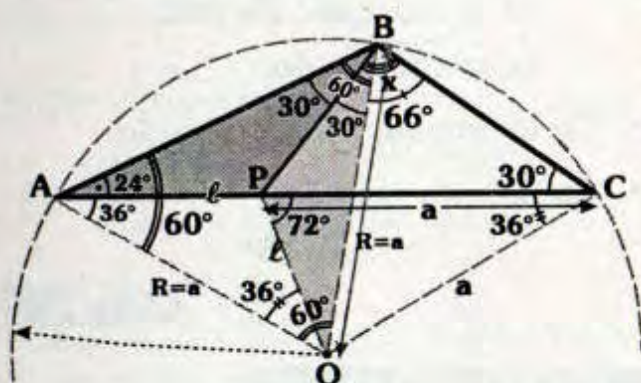
- \overline{CP} : Bisectriz exterior $\triangle APD$
 $\Rightarrow m\angle DPC = 60^\circ$

- En "P": $60 + 60 + 60 = 180^\circ$

$$\therefore \theta = 10^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 194



- Ubicamos el circuncentro O del $\triangle ABC$.

- Por teorema fundamental:
 $m\angle AOB = 2(30^\circ) = 60^\circ$

- $\triangle ABO$:
 Equilátero $\Rightarrow a = R$

- $\triangle AOC$:
 Isósceles $\Rightarrow m\angle ACO = 36^\circ$

- $\triangle POC$:
 Isósceles $\Rightarrow m\angle CPO = 72^\circ$

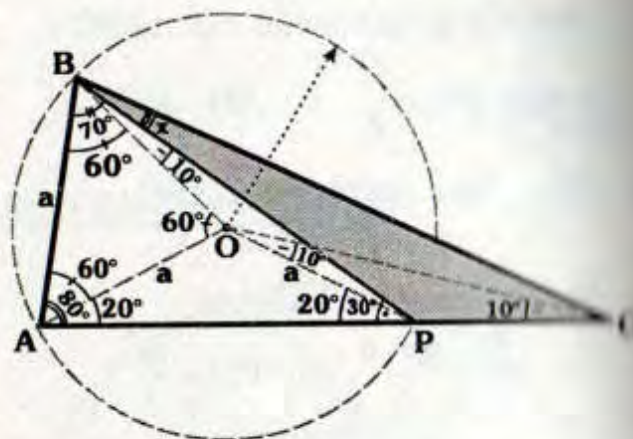
- Por ángulo exterior en $\triangle APO$:
 $72^\circ = 36^\circ + m\angle POA \Rightarrow m\angle POA = 36^\circ$
 $\Rightarrow AP = PO = \ell$

- $\triangle ABP \cong \triangle PBO$ (LLL)
 $m\angle ABP = m\angle PBO = 30^\circ$
 $\therefore x = 96^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 195

- Se ubica O en la región interior del $\triangle ABP$, tal que ABO es equilátero.

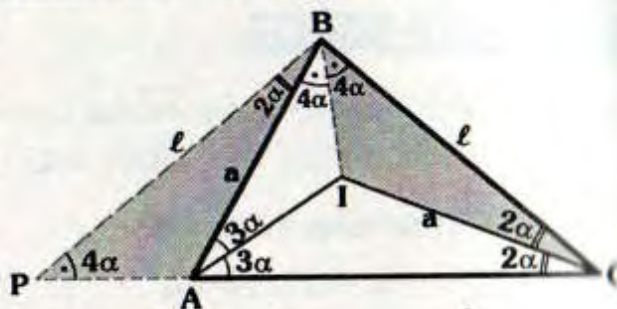


- Por el criterio 8.13: O es circuncentro del $\triangle ABP \Rightarrow OP = a$.
- $\triangle AOP$: Isósceles $\Rightarrow m\angle OPA = 20^\circ$
- $\triangle OPC$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle POC = m\angle OCP = 10^\circ$
- $\triangle OBCP$: Inscriptible
 (ya que $m\angle OCP = m\angle OBP = 10^\circ$)

$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave D

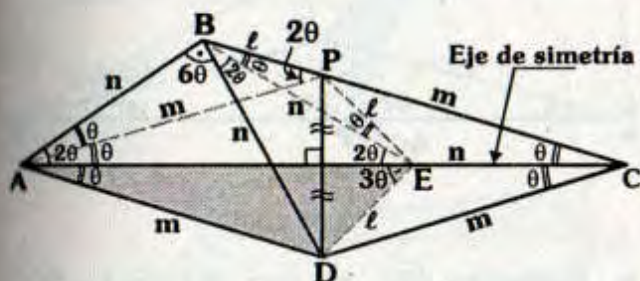
RESOLUCIÓN N° 196



- Prolongamos \overline{CA} hasta P, tal que:
 $m\angle BPC = 4\alpha$
- $\triangle PBC$: Isósceles $\Rightarrow PB=BC=\ell$
- $\triangle PAB \cong \triangle BIC$ (LAL) $\Rightarrow m\angle IBC=4\alpha$
- Pero, I : Incentro $\Rightarrow m\angle ABI=4\alpha$
- $\triangle PBC$: $4\alpha + 10\alpha + 4\alpha = 180^\circ$
 $\therefore \alpha = 10^\circ$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 197

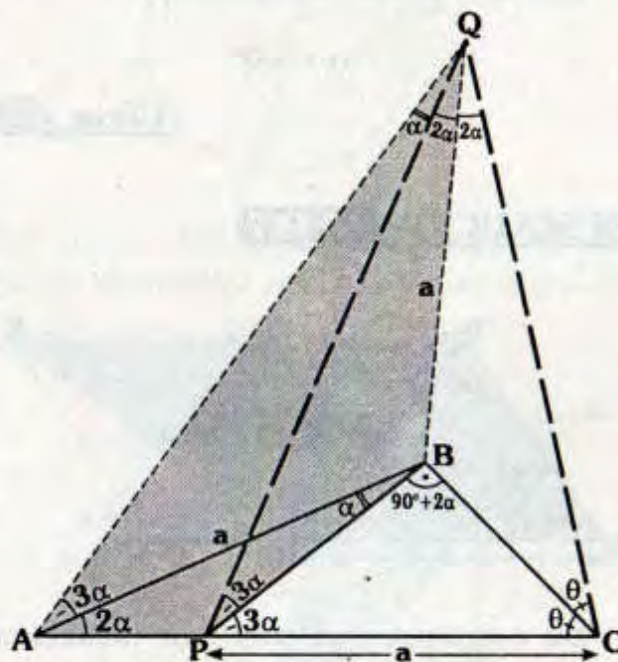


- Ubicamos P en \overline{BC} , tal que :
 $\overline{PD} \perp \overline{AC}$ (\overline{AC} : Mediatriz de \overline{PD})
- De la simetría $m\angle PAC = \theta$
- Luego trazamos BE, tal que :
 $m\angle CBE = \theta$
- $\triangle BEC$: Isósceles $\Rightarrow BE=EC=n$
- $\triangle ABE$: Isósceles
 $\Rightarrow AB=BE=n$ ($m\angle BEA = 2\theta$)
- $\triangle ABPE$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle BEP = \theta$
- De la simetría (P y D simétricos) :
 $m\angle AED = 3\theta$

- Como :
 $AB=BE=n$
 $m\angle ABD = 2(m\angle AED) = 6\theta$
 $\Rightarrow B$: Circuncentro del $\triangle ADE$
- Por teorema fundamental :
 $m\angle DBE = 2(m\angle EAD) = 2\theta$
- $\triangle ABE$: $2\theta + 8\theta + 2\theta = 180^\circ$
 $\therefore \theta = 15^\circ$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 198



- Se construye el $\triangle PQC$, tal que B sea su incentro :
 $m\angle QPB = m\angle BPC = 3\alpha$ y
 $m\angle PCB = m\angle QCB = \theta$

Sabemos :

$$m\angle PBC = 90^\circ = \frac{m\angle PQC}{2}$$

(Teorema fundamental)

$$\Rightarrow m\angle PQC = 4\alpha$$

Como : $m\angle BAP = m\angle PQB = 2\alpha$, el $\triangle APBQ$ es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle QAB = 3\alpha \text{ y } m\angle AQP = \alpha$$

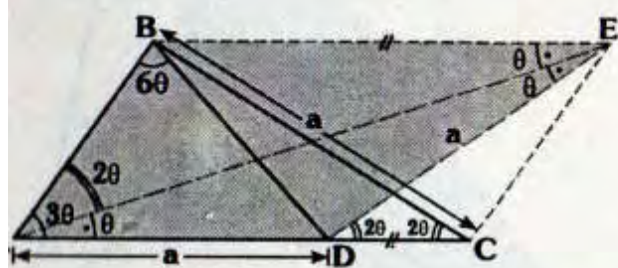
$\triangle AQB$: Isósceles $\Rightarrow AB = BQ = a$

Finalmente se nota que el problema radica en calcular α en el $\triangle PQC$, lo cual ya hemos desarrollado en el problema : 196.

$$\therefore \alpha = 10^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 199



Se construye el trapecio isósceles $BDCE$ ($\overline{BE} \parallel \overline{CD}$)

$$\Rightarrow m\angle EDC = 2\theta \text{ y } DE = a$$

$\triangle AED$:

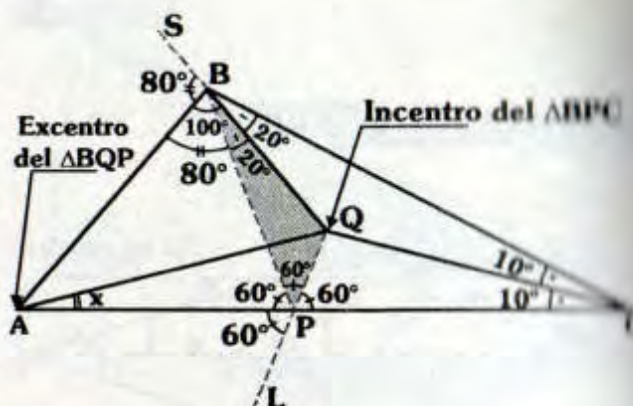
Isósceles $\Rightarrow AD = DE = a$

- $m\angle BEA = \theta$ (ángulos alternos)
- Notamos que el ABED corresponde al gráfico del problema : 197

$$\therefore \theta = 15^\circ$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 200



- Trazamos \overline{BP} , tal que $m\angle PBQ = 20^\circ$
- Q : Incentro de BPC
 $\Rightarrow m\angle CPQ = m\angle BPQ = 60^\circ$
- Prolongamos \overline{QP} hasta L, se nota $m\angle APL = 60^\circ$
- Como \overline{PA} y \overline{BA} son bisectrices exteriores $\Rightarrow A$: Excentro de BPQ
- Por teorema fundamental :

$$x = \frac{20^\circ}{2}$$

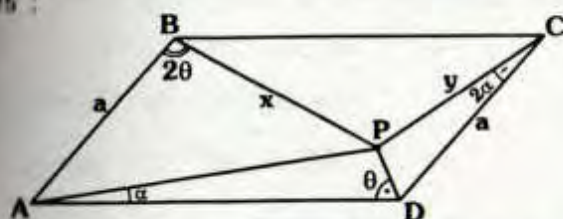
$$\therefore x = 10^\circ$$

Clave E

Solucionario Olímpicos

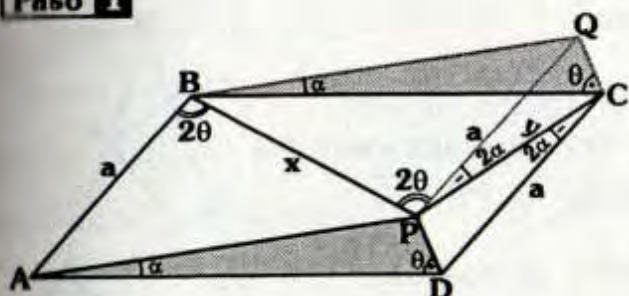
RESOLUCIÓN N° 201

Grafiquemos de acuerdo a las condiciones :



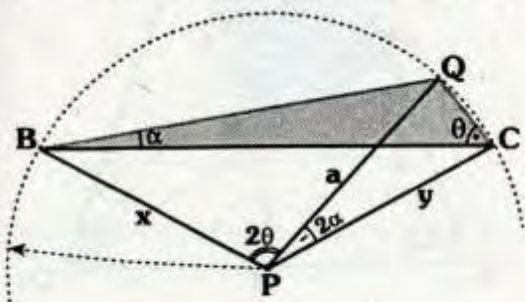
Se nos pide demostrar : $x=y=a$

Paso 1



- Se traza el triángulo $AQC \cong \triangle APD$ ($AP=BQ$ y $PD=QC$).
- Se verifica $\overline{AP} \parallel \overline{BQ}$ y $\overline{DP} \parallel \overline{CQ} \Rightarrow ABQP$ y $DPQC$ son paralelogramos.
- Se tiene entonces :

$$PQ=a ; m\angle BPQ = 2\theta ; m\angle QPC = 2\alpha$$

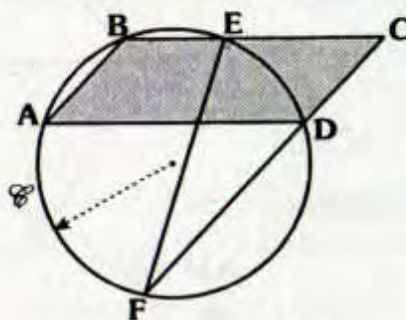


- En el denominado criterio 7.17 se analizó y demostró. (Ver pág. 34).

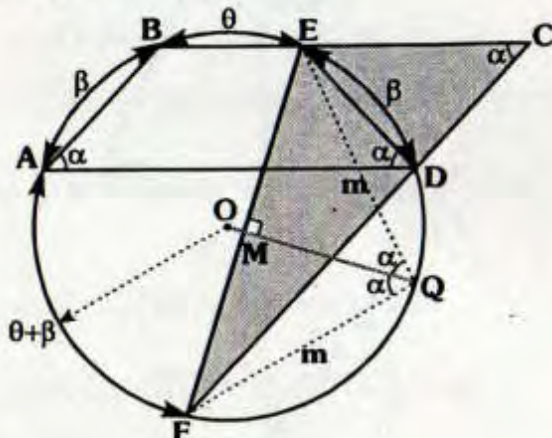
- P es circuncentro del $\triangle BQC$

$$\Rightarrow x=a=y$$

RESOLUCIÓN N° 202



Por dato : $ABCD$ es paralelogramo nos piden demostrar que el circuncentro del $\triangle FEC$ está en \mathcal{C} .



- Se traza $\overline{OQ} \perp \overline{EF}$
- Por teorema :

$$\text{Como: } \overline{AD} \parallel \overline{BE} \Rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{ED} = \beta ; y$$

$$\overline{FD} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\widehat{AF} = m\widehat{ABE} = \theta + \beta$$

- Por ángulo inscrito : $\theta + \beta = 2\alpha$
 $m\angle FQE = 2\alpha$
- Por teorema 8.14.
- Debido a que:
 $FQ = QE$ y $m\angle AQE = 2(m\angle FCE)$
 $\Rightarrow Q$ es circuncentro del $\triangle AEC$
 $\therefore Q \in \mathcal{C}$

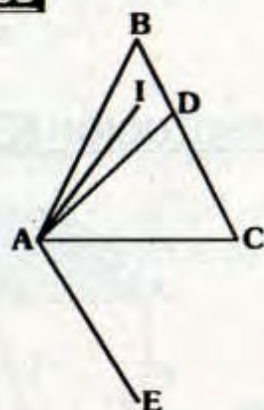
RESOLUCIÓN N° 203

Del gráfico :

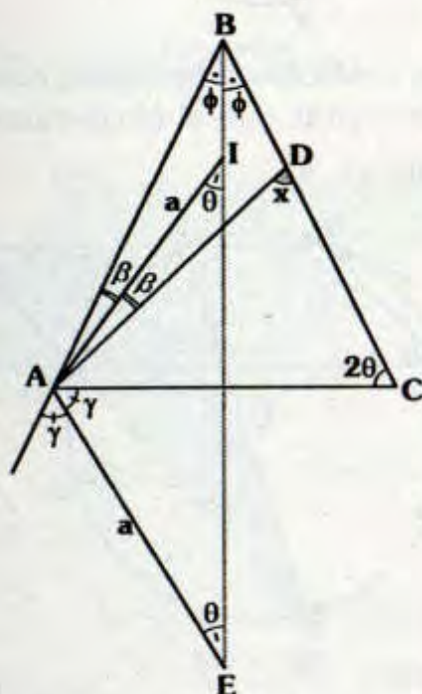
I es incentro del $\triangle ABD$.

E es excentro relativo a \overline{AC} del $\triangle ABC$ y $AI = IE$

Piden demostrar:



AD = AC



- Debido a que \overline{BI} es bisectriz del $\angle ABD$ y \overline{BE} también es bisectriz del $\angle ABD$.
 $\Rightarrow B, I$ y E son colineales

- En $\triangle ABC$ por teorema sobre bisectrices: $m\angle ACD = 2(m\angle AED)$
 $\Rightarrow m\angle ACD = 2\theta$
- En $\triangle BAD$: \overline{BI} es bisectriz del $\angle BAD$
- Por dato $AI = AE \Rightarrow \triangle AIE$: Isósceles
 $\Rightarrow m\angle AIE = m\angle IEA$
- En $\triangle ABI$: $\theta = \beta + \phi$
- En $\triangle ABD$: $x = 2\beta + 2\phi$
 $\Rightarrow x = 2\theta$
 $\Rightarrow \triangle ADC$ es isósceles
 $\therefore AD = AC$

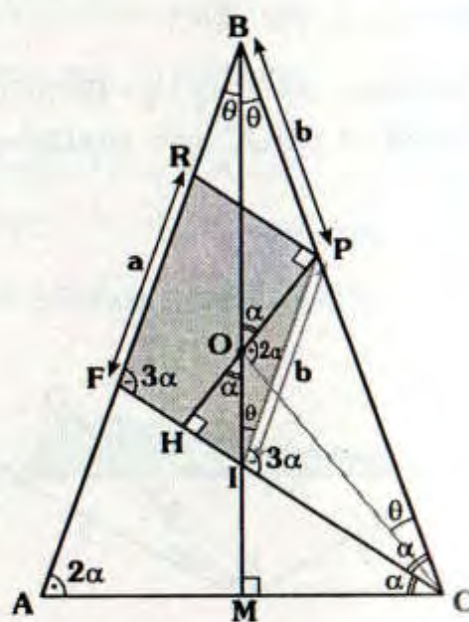
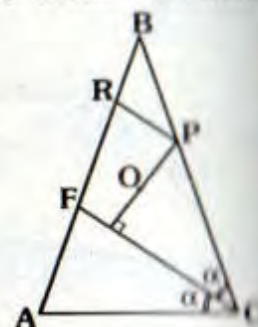
RESOLUCIÓN N° 204

Graficando de acuerdo a las condiciones:

Del gráfico $AB = BC$,
 O es circuncentro del $\triangle ABC$ y $\overline{PR} \parallel \overline{CF}$.

Piden demostrar :

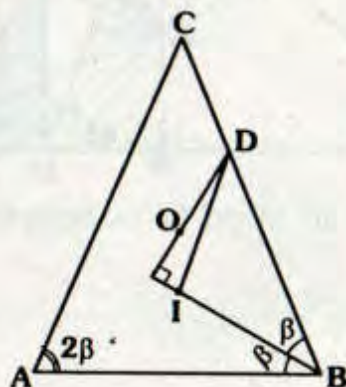
FR = BP



- Se sabe $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ por ser $AB=BC$, además \overline{BO} es bisectriz del $\angle ABC$.
- En $\triangle IMC$ y $\triangle IHO$ se tiene :
 $m\angle HOI = \alpha$
- Debido a que $m\angle HOI = m\angle ICP = \alpha$
 $\Rightarrow \triangle IOPC$ es inscriptible
- Por ser O el circuncentro :
 $OB = OC \Rightarrow m\angle OCB = \theta$
 $m\angle BOC = 2(m\angle BAC)$
 $\Rightarrow m\angle BOC = 4\alpha$
- Luego $m\angle POC = 3\alpha$
- Debido a que el $\triangle IOPC$ es inscriptible, se tendrá :
 $m\angle PIO = \theta \Rightarrow \triangle APB$ isósceles
Luego $IP = BP = b$.
 $m\angle PIC = 3\alpha \Rightarrow \overline{IP} \parallel \overline{FR}$
- De lo último y por ser $\overline{FI} \parallel \overline{RP}$
- Se concluye que $FRPI$ es un paralelogramo $\Rightarrow a=b$.

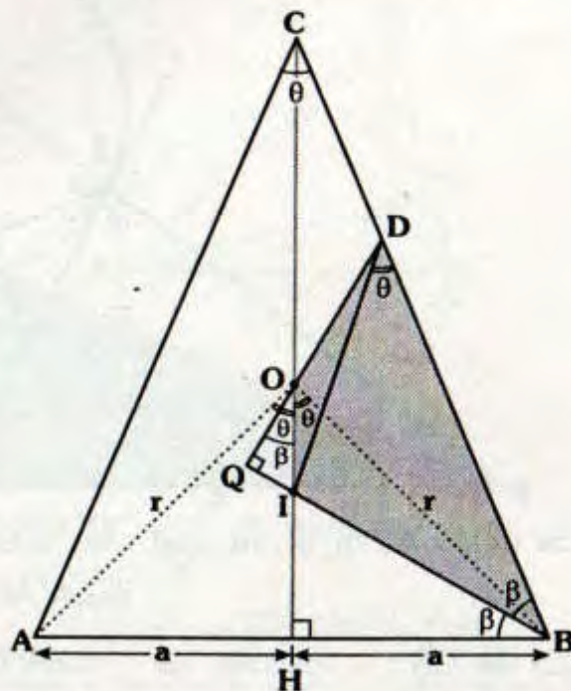
$$\therefore FR = BP$$

RESOLUCIÓN N° 205



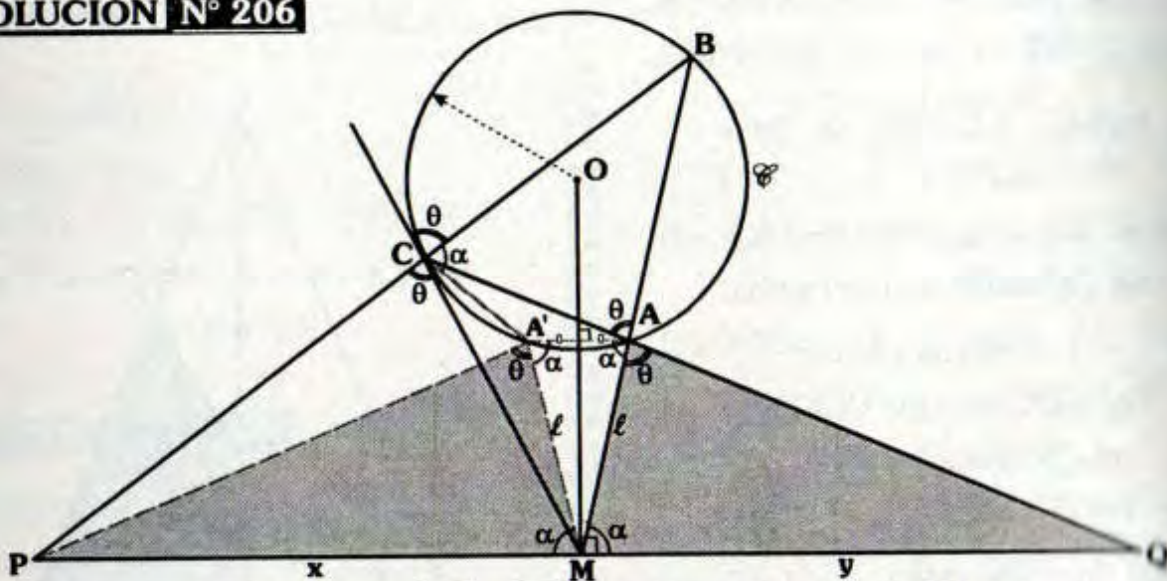
O e I son circuncentro e incentro del triángulo ABC respectivamente.

Vamos a demostrar : $\overline{AC} \parallel \overline{ID}$



- Debido a que el triángulo ACB es isósceles, luego C, O e I son colineales.
 \Rightarrow La recta que los contiene es perpendicular a \overline{AB} en su punto medio.
- Por teorema del circuncentro :
 $m\angle AOB = 2(m\angle ACB) = 2\theta$
 $\triangle AOC$ es isósceles $\Rightarrow m\angle HOB = \theta$
- En el $\triangle IHB$ y $\triangle IQO$ se cumple :
 $m\angle QOI = \beta$
 $\Rightarrow \triangle IODB$ es inscriptible
- Luego $m\angle IDB = m\angle IOB = \theta$
- Se tendrá entonces :
 $m\angle ACB = m\angle IDB = \theta$
 $\therefore \overline{DI} \parallel \overline{CA}$

RESOLUCIÓN N° 206

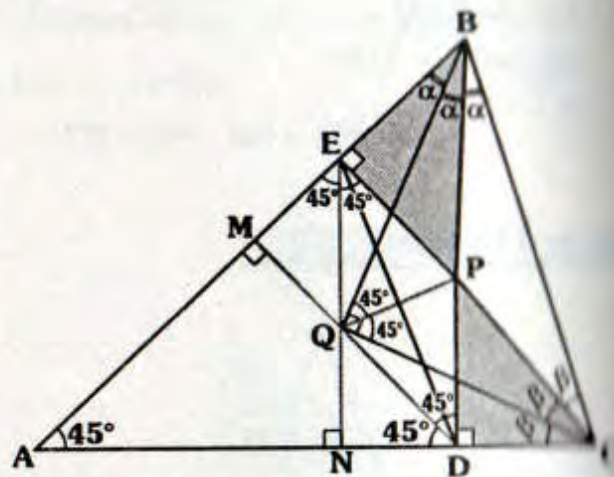


- Se ubica A' en \mathcal{C} , tal que $\overline{AA'} \perp \overline{OM} \Rightarrow AM = A'M = \ell$ ($\triangle AA'M$: isósceles) y $m\angle A'AM = m\angle AMQ = \alpha$
- $\triangle AA'CB$: Inscrito $\Rightarrow m\angle A'CB = \alpha$
- $\triangle PCA'M$: Inscriptible $\Rightarrow m\angle PA'M = \theta$
- $\triangle PA'M \cong \triangle MAQ$ (ALA)

$$\therefore x = y$$

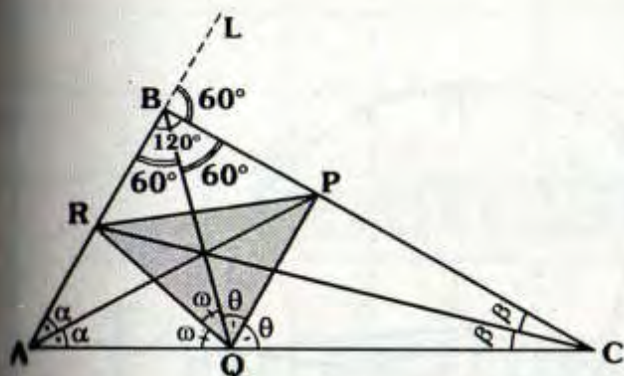
RESOLUCIÓN N° 207

- P : Incentro del $\triangle BQC$
 $\Rightarrow m\angle BQP = m\angle PQC = 45^\circ$
- Q : Excentro $\triangle BPE$
 $\Rightarrow m\angle AEQ = m\angle QEP = 45^\circ$
- Q : Excentro $\triangle PDC$
 $\Rightarrow m\angle PDQ = m\angle QDA = 45^\circ$
- Al prolongar \overline{EQ} y \overline{DQ} , nos damos cuenta que \overline{DM} y \overline{EN} son alturas del $\triangle AED$, por lo tanto Q es ortocentro del $\triangle ADE$.



RESOLUCIÓN N° 208

- Al prolongar \overline{AB} hasta L , $m\angle LBP = 60^\circ$
- P : Excentro del $\triangle ABQ \Rightarrow m\angle BQP = m\angle PQC = \theta$

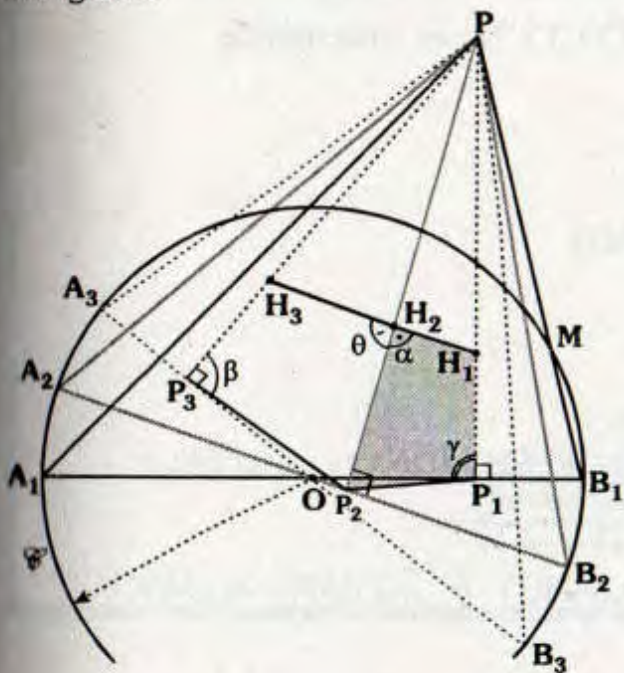


- R : Excentro del $\triangle BQC$
 $\Rightarrow m\angle BQR = m\angle RQA = \omega$
- En "Q" : $2\omega + 2\theta = 180^\circ$
 $\Rightarrow \omega + \theta = 90^\circ$
 $\therefore m\angle PQR = 90^\circ$

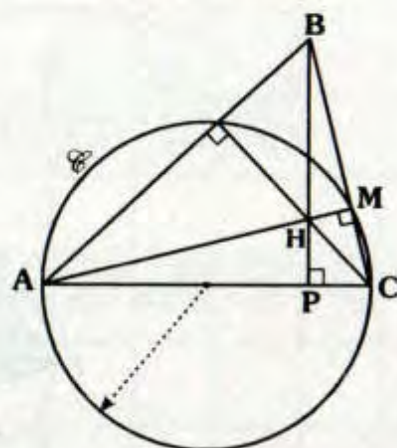
RESOLUCIÓN N° 209

Puesto que para todos los triángulos ABP tienen como mediana "fija": \overline{PO} , el baricentro también es fijo, luego el lugar geométrico de los circuncentros será la misma que el descrito por el ortocentro, dado que son homotéticos.

Analicemos los ortocentros para tres triángulos.



Observación



En el gráfico

Por teorema de la secante

Se cumple :

$$(BH)(BP) = (BM)(BC) = \text{Pot}_{(B, \odot)}$$

- De la observación :

$$(PM)(PB_1) = (PH_1)(PP_1) = (PH_2)(PP_2) = (PH_3)(PP_3)$$

$$\Rightarrow \triangle P_1H_1H_2P_2, \triangle P_2P_3H_3H_2 \text{ y } \triangle P_1P_2P_3P \text{ son inscriptibles.}$$

- Luego :

$$\left. \begin{aligned} \theta + \beta &= 180^\circ \\ \alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \beta + \gamma &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \theta + \alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow H_1, H_2 \text{ y } H_3 \text{ son colineales}$$

\therefore El lugar geométrico es una recta

- 300

Enunciado de los Problemas Propuestos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO



Editorial
CUZCAN
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

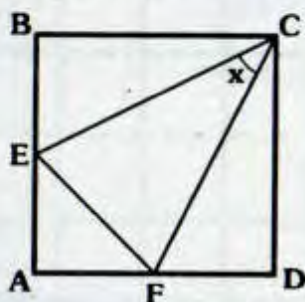
Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA N° 1

Si el centro del cuadrado ABCD es el baricentro de ECF, calcule x.

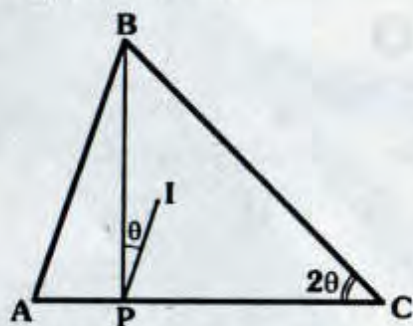
- A) 30°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



PROBLEMA N° 2

En el gráfico I es incentro de ABC, si $AP=PI$ y $PC=4$, calcule AB.

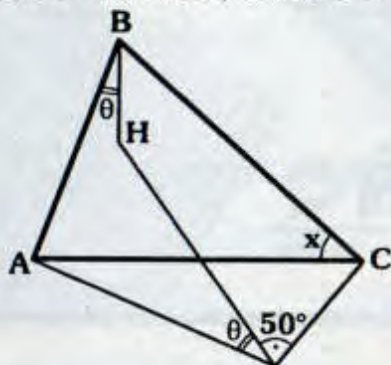
- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6



PROBLEMA N° 3

Si H es ortocentro de ABC, calcule x.

- A) 25°
- B) 30°
- C) 35°
- D) 40°
- E) 50°



PROBLEMA N° 4

Se tiene el paralelogramo ABCD, I_1 e I_2 son incentros de ABD y BCD, si :

$$m\angle BAD = m\angle I_1 B I_2$$

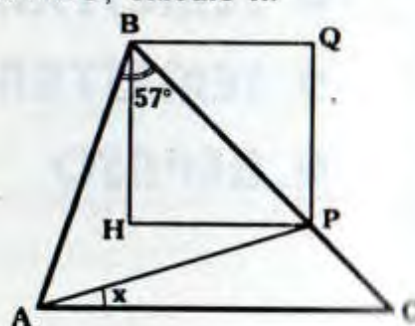
Calcule $m\angle BCD$.

- A) 30°
- B) 36°
- C) 45°
- D) 60°
- E) 75°

PROBLEMA N° 5

Si HBQP es un cuadrado y H es el ortocentro de ABC, calcule x.

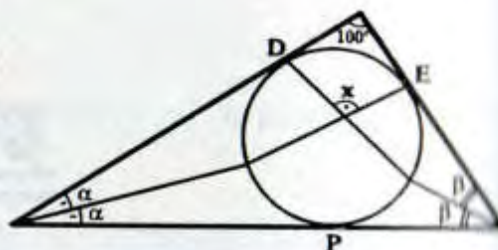
- A) 12°
- B) 13°
- C) 14°
- D) 15°
- E) 16°



PROBLEMA N° 6

D, E y P son puntos de tangencia, calcule x.

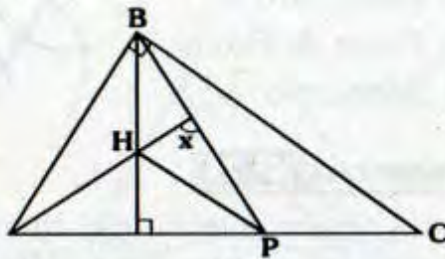
- A) 90°
- B) 100°
- C) 110°
- D) 120°
- E) 135°



PROBLEMA N° 7

Si $\overline{HP} \parallel \overline{BC}$, calcule "x".

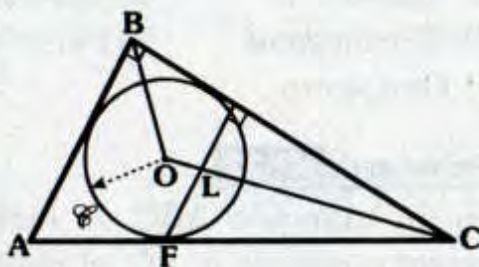
- A) 60°
- B) 75°
- C) 80°
- D) 90°
- E) 120°



PROBLEMA N° 8

\odot esta inscrita en ABC, si $BO = 4\sqrt{2}$, calcule FL.

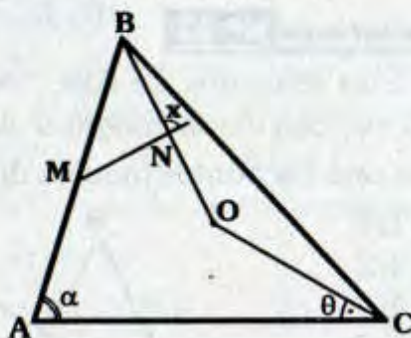
- A) 5
- B) 4
- C) 3
- D) 2
- E) 1



PROBLEMA N° 9

O es circuncentro de ABC, si $AM = MB$, $BN = NO$ y $\alpha - \theta = 40^\circ$, calcule "x".

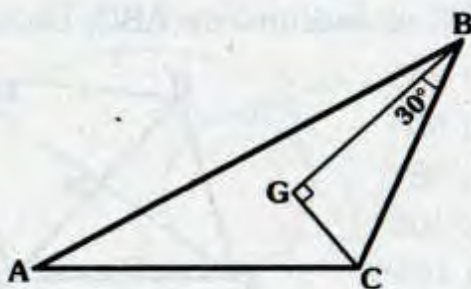
- A) 60°
- B) 70°
- C) 80°
- D) 90°
- E) 100°



PROBLEMA N° 10

Si G es baricentro de ABC y $CG = 2$, calcule AC.

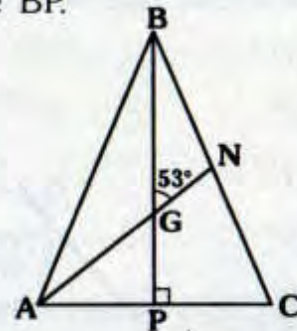
- A) $2\sqrt{7}$
- B) $2\sqrt{3}$
- C) $3\sqrt{7}$
- D) $\sqrt{7}$
- E) 4



PROBLEMA N° 11

En el gráfico, $AB = 2(BN) = 2(NC)$ y $GN = 10$, calcule BP.

- A) 20
- B) 28
- C) 30
- D) 36
- E) 40



PROBLEMA N° 12

En un paralelogramo ABCD, M es punto medio de \overline{BC} , $\overline{BD} \cap \overline{AM} = F$, si $BD = 12$ calcule BF.

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7

PROBLEMA N° 13

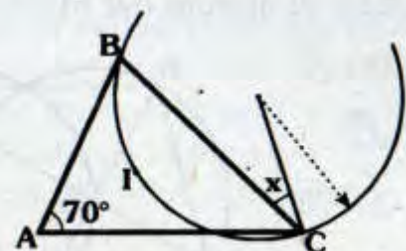
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B) de incentro I, si $AI = 4$ y $CI = 6\sqrt{2}$, calcule AC.

- A) $2\sqrt{17}$
- B) $3\sqrt{17}$
- C) $2\sqrt{34}$
- D) $3\sqrt{34}$
- E) $4\sqrt{34}$

PROBLEMA N° 14

I es incentro de ABC, calcule x :

- A) 35°
- B) 37°
- C) 45°
- D) 53°
- E) 60°



PROBLEMA N° 15

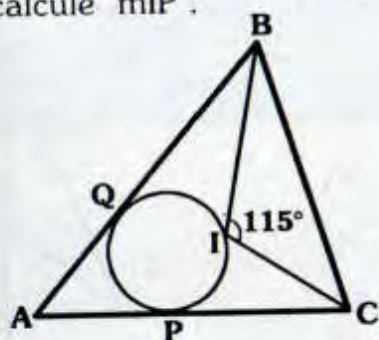
Dado un triángulo ABC, I es incentro y E es el excentro relativo a \overline{BC} , si :

- $m\angle EIC = 50^\circ + m\angle IEC$, calcule $m\angle ABC$.
- A) 30°
- B) 32°
- C) 34°
- D) 38°
- E) 40°

PROBLEMA N° 16

es incentro de ABC , P y Q son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{P}$.

- A) 100°
- B) 115°
- C) 120°
- D) 135°
- E) 140°



PROBLEMA N° 17

En un triángulo ABC , H y O son el ortocentro y circuncentro respectivamente, si $OB=13$ y $AC=24$, calcule BH .

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 10
- E) 12

PROBLEMA N° 18

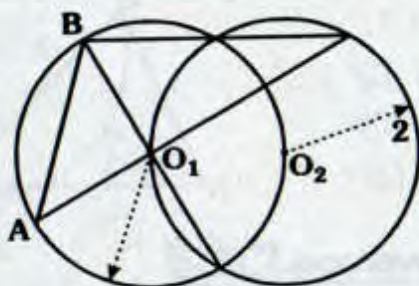
Se tiene el triángulo rectángulo ABC , recto en B , si el inradio es 3 y el perímetro de la región triangular ABC es 40, calcule su circunradio.

- A) 6
- B) $\frac{13}{2}$
- C) $\frac{17}{2}$
- D) 12
- E) 14

PROBLEMA N° 19

Calcule el inradio del triángulo ABO_1 .

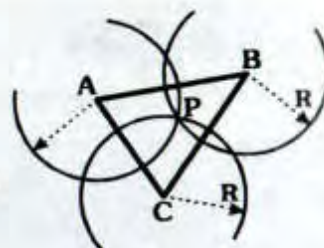
- A) $2 - \sqrt{2}$
- B) $\sqrt{2} - 1$
- C) $3 - \sqrt{2}$
- D) $4 - \sqrt{2}$
- E) $\sqrt{2} + 1$



PROBLEMA N° 20

¿Qué punto notable es P de ABC ?

- A) Incentro
- B) Circuncentro
- C) Ortocentro
- D) Punto de Brune
- E) Baricentro



PROBLEMA N° 21

En la región interior del triángulo ABC se ubica el punto P , si $AP=PC$ y

$$m\angle ABC + m\angle PAC = 90^\circ,$$

indique que punto notable es P de ABC .

- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Circuncentro
- D) Punto de Miquel
- E) Ortocentro

PROBLEMA N° 22

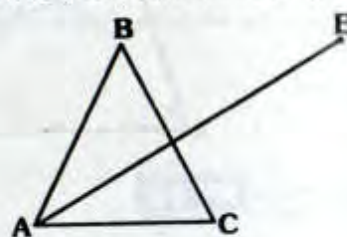
En un triángulo ABC de incentro I y excentro relativo a \overline{AC} el punto E , calcule $m\angle AIC + m\angle AEC$.

- A) 90°
- B) 120°
- C) 135°
- D) 180°
- E) 200°

PROBLEMA N° 23

Si E es excentro de ABC , $AB=BC=8$ y $AC=6$, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de \overline{BC} y \overline{AE} .

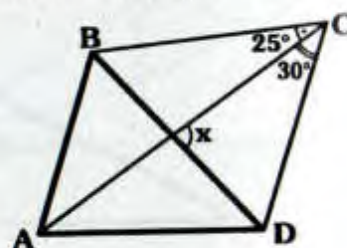
- A) $\frac{1}{4}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 1
- D) 1,5
- E) 2



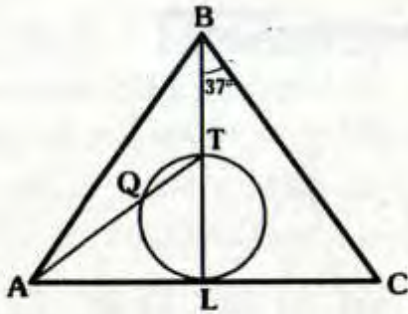
PROBLEMA N° 24

Si C es excentro de ABD , calcule x .

- A) 85°
- B) 90°
- C) 95°
- D) 100°
- E) 105°



- A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5



PROBLEMA N° 34

En un triángulo rectángulo, la longitud de un cateto es igual a la distancia de su ortocentro a su circuncentro, calcule la medida del menor ángulo interior.

- A) 30° B) 37° D) 45° D) 53° E) 60°

PROBLEMA N° 35

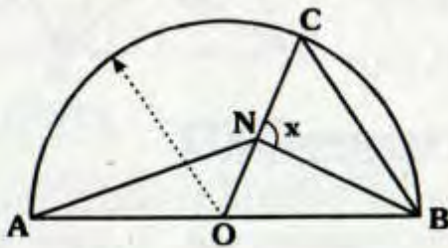
El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es 1, calcule la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

- A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

PROBLEMA N° 36

Si $AN=CB$ y $CN=2(NO)$, calcule x .

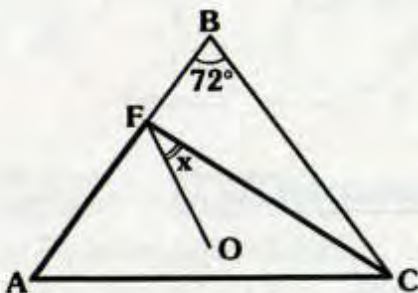
- A) 90°
B) 75°
C) 60°
D) 53°
E) 45°



PROBLEMA N° 37

Si $AB=BC$ y O es circuncentro de AFC, calcule x .

- A) 30°
B) 32°
C) 34°
D) 36°
E) 38°



PROBLEMA N° 38

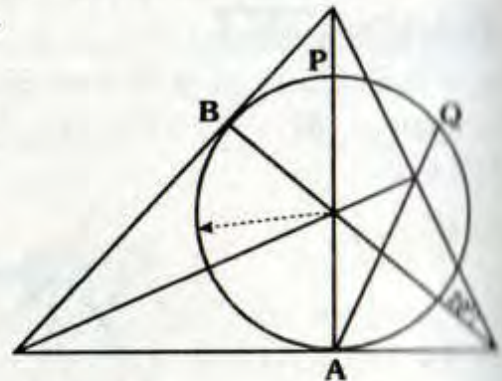
En un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$), el punto F es su excentro relativo a \overline{BC} y su altura BH mide 8, calcule la distancia de F a \overline{BC} .

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 1 E) 2

PROBLEMA N° 39

Si A y B son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{PQ}$.

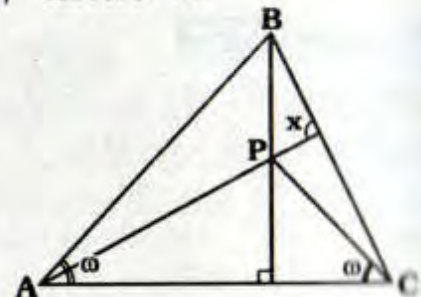
- A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



PROBLEMA N° 40

Si $AP=BC$, calcule x .

- A) 90°
B) 60°
C) 75°
D) 120°
E) 80°



PROBLEMA N° 41

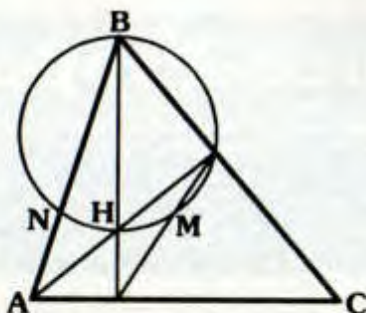
Calcule el circunradio de un triángulo ABC, si $m\angle BAC = 53^\circ$ y $BC=12$.

- A) 5 B) 5,5 C) 6
D) 7,5 E) 8

PROBLEMA N° 42

Si H es ortocentro de ABC y $m\widehat{HM} = 40^\circ$, calcule $m\widehat{HN}$.

- A) 20°
- B) 30°
- C) 40°
- D) 50°
- E) 60°



PROBLEMA N° 43

En un triángulo ABC, N es el excentro relativo a BC, luego se ubica el excentro E del $\triangle BNC$, relativo a BC, tal que :

$$m\angle BEC = 2m\angle BAC = 2x,$$

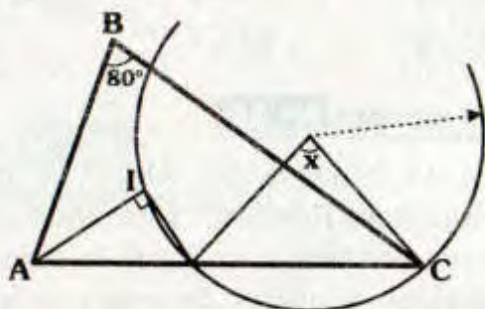
calcule x.

- A) $180^\circ/7$
- B) $200^\circ/7$
- C) $90^\circ/7$
- D) 60°
- E) 53°

PROBLEMA N° 44

I es incentro ABC, calcule x.

- A) 40°
- B) 50°
- C) 60°
- D) 70°
- E) 80°



PROBLEMA N° 45

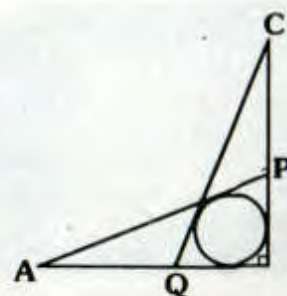
En un triángulo ABC de ortocentro H se traza la altura AR, en HR y BR se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que $\overline{QP} \parallel \overline{BH}$, si $m\angle QAC = 65^\circ$, calcule $m\angle PCA$.

- A) 20°
- B) 25°
- C) 26°
- D) 28°
- E) 30°

PROBLEMA N° 46

Si $AP = CQ$ y $CP = 4$, calcule AQ.

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5



PROBLEMA N° 47

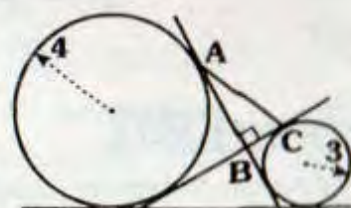
En un triángulo ABC de incentro I, E_1 y E_2 son excentros relativos a \overline{AB} y \overline{BC} , si $m\angle ABC = 20^\circ$, calcule $m\angle E_1 I E_2$.

- A) 40°
- B) 60°
- C) 80°
- D) 100°
- E) 120°

PROBLEMA N° 48

Calcule el inradio de ABC.

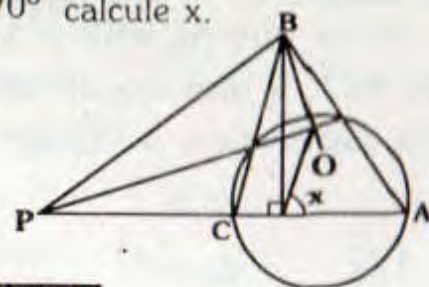
- A) 0,5
- B) 1
- C) 1,5
- D) 2
- E) 2,5



PROBLEMA N° 49

Si O es circuncentro de ABC y $m\angle PBO = 70^\circ$ calcule x.

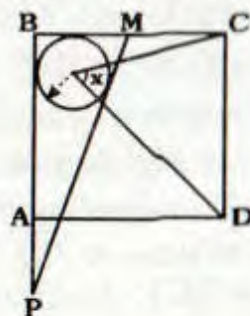
- A) 60°
- B) 62°
- C) 65°
- D) 68°
- E) 70°



PROBLEMA N° 50

ABCD es un cuadrado, si $BM = MC = 5$ y $AP = 2$, calcule x.

- A) 41°
- B) 43°
- C) 47°
- D) 55°
- E) 59°

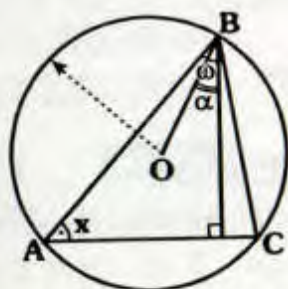


Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA N° 51

En la figura, hallar x , si $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 50^\circ$.



PROBLEMA N° 52

Se tiene un triángulo acutángulo ABC en el cual se trazan las alturas \overline{BH} y \overline{CJ} , sobre las prolongaciones \overrightarrow{HB} y \overrightarrow{JC} se ubican los puntos P y Q respectivamente de modo que $AC=BP$ y $AB=CQ$. Si $CQ=6\sqrt{3}$, la distancia del vértice A a la recta que contiene a \overline{PQ} es:

- A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 53

Sea el triángulo ABC, cuyo ángulo interno en B mide 120° y cuyos lados \overline{AB} y \overline{BC} miden a y b unidades ($a < b$). La bisectriz del ángulo B y la mediatriz de \overline{AC} se intersectan en P y desde P se traza el segmento \overline{PQ} perpendicular a \overline{BC} en Q. Calcule QC.

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{a+b}{4}$ C) $\frac{b-a}{2}$
D) $b-a$ E) $b-2a$

PROBLEMA N° 54

La circunferencia exinscrita al lado \overline{AB} del triángulo ABC, determina el punto de tangencia M en la prolongación del lado \overline{CA} . Se traza \overline{AF} perpendicular a \overline{OB} (O es el centro de la circunferencia) tal que: $m\angle AMF = m\angle ACB$

Calcule $m\angle ACB$

- A) 45° B) 30° C) 60°
D) 75° E) $67,5^\circ$

PROBLEMA N° 55

En un cuadrilátero ABCD se trazan las bisectrices interiores formándose un nuevo cuadrilátero, calcular la suma de dos ángulos opuestos de este cuadrilátero.

- A) 120° B) 180° C) 150°
D) 140° E) 110°

PROBLEMA N° 56

En un triángulo ABC ($AC > AB$) se traza la circunferencia exinscrita relativa al lado \overline{BC} de centro O. $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{F\}$, por F se traza una recta tangente a la circunferencia que intercepta a \overline{AB} en E y a \overline{AC} en J, si $AB=6\mu$ y $FJ=2\mu$, entonces $AJ - BF$ (en μ) es:

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

PROBLEMA N° 57

En un triángulo ABC recto en B, $AB < BC$. La circunferencia inscrita es tangente a \overline{AB} y \overline{BC} en los puntos N y P respectivamente. Exteriormente se construye el trapecioide BDEC circunscrito a una circunferencia siendo M y Q los puntos de tangencia con los lados \overline{BD} y \overline{BC} respectivamente. Si $DE = 5\mu$, $AC = CE$ y $DM + AN = 3\mu$. Calcule PQ (en μ).

- A) 3 B) 1,5 C) 2,5 D) 1 E) 2

PROBLEMA N° 58

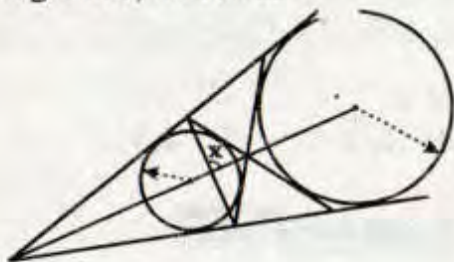
Sea el triángulo ABC, recto en B, se traza $BH \perp \overline{AC}$, si \overline{BM} es la bisectriz del ángulo ABH, \overline{BN} la bisectriz del ángulo HBC y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, entonces la longitud de \overline{MN} es:

- A) $r/3$ B) $r/2$ C) r D) $3r/2$ E) $2r$

PROBLEMA N° 59

Del siguiente gráfico, hallar x.

- A) 75°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 135°

**PROBLEMA N° 60**

Dos triángulos equiláteros ABC y CDE están ubicados de modo que A, C y E son colineales y los puntos B y D se encuentran en el mismo semiplano respecto a \overline{AE} . G_1 y G_2 son los baricentros de los triángulos ABC y CDE respectivamente. Si $AB = 2(DE)$ y $G_1D = L$, entonces

la distancia entre los puntos G_1 y G_2 es:

- A) $L/2$ B) $L/3$ C) L
D) $2L$ E) $2/3L$

PROBLEMA N° 61

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura \overline{BH} , si la diferencia de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos AHB y BHC es L unidades. Halle la distancia del incentro del triángulo ABC a la altura \overline{BH} .

- A) $L/5$ B) $L/4$ C) $L/3$
D) $L/2$ E) L

PROBLEMA N° 62

Sea el triángulo ABC recto en B, se traza la altura \overline{BH} , sean I_1 e I_2 son incentros de los triángulos BHA y BHC; I es el incentro del triángulo ABC e $\overrightarrow{I_1I_2} \cap \overline{BC} = \{D\}$. Halle la medida del ángulo I_1DB y que punto notable es I del triángulo I_1BI_2 .

- A) 45° ; incentro
B) 45° ; ortocentro
C) 45° ; circuncentro
D) 30° ; incentro
E) 30° ; ortocentro

PROBLEMA N° 63

Dado el triángulo ABC; donde la $m\angle BAC = 32^\circ$ y $m\angle ACB = 88^\circ$. Además O, I y H son circuncentro, incentro y ortocentro respectivamente. Halle $m\angle OIH$.

- A) 150° B) 151° C) 152°
D) 153° E) 155°

PROBLEMA N° 64

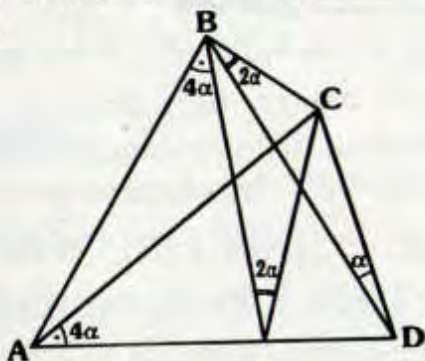
En un triángulo ABC, se ubica el incentro I, por I se traza una recta secante que intersecta a los lados \overline{AB} y \overline{AC} en M y N respectivamente. Si $m\angle INA = 60^\circ$, $MI/IN = \sqrt{3}$, halle la medida del ángulo BAC.

- A) 60° B) 75°
C) 90° D) Hay dos respuestas
E) 120°

PROBLEMA N° 65

En la figura adjunta, $AB=AD$. Halle el valor de α .

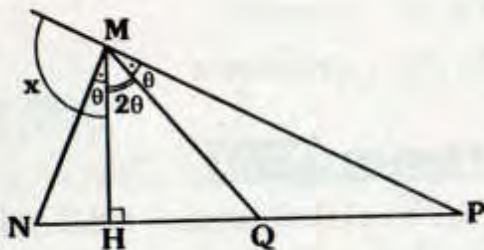
- A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



PROBLEMA N° 66

En el siguiente gráfico \overline{MQ} es mediana del triángulo MNP. Halle x.

- A) 60°
B) 90°
C) $67,5^\circ$
D) $12,5^\circ$
E) $112,5^\circ$



PROBLEMA N° 67

Hallar el perímetro de un triángulo rectángulo si los radios de las circunferen-

cias inscritas y circunscritas miden r y R unidades respectivamente.

- A) $4R-r$ B) $3R-r$
C) $2(R+r)$ D) $2(2R+r)$
E) $4(R+r)$

PROBLEMA N° 68

En un triángulo ABC, halle la longitud de la flecha relativa a \overline{AC} , si los radios de los círculos inscritos y exinscritos relativo a \overline{AC} , miden r y R respectivamente ($R > r$).

- A) $\frac{2R+r}{3}$ B) $\frac{R-r}{3}$ C) $\frac{R-r}{2}$
D) $2R-r$ E) $\frac{2R-r}{4}$

PROBLEMA N° 69

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), el cual está inscrito en una circunferencia, E es excentro relativo a \overline{BC} , \overline{AE} corta a la circunferencia en P. Si $BP=3$. Calcule EC.

- A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6
D) $3\sqrt{3}$ E) 4,5

PROBLEMA N° 70

Sea el cuadrilátero ABCD convexo, $M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{DC}$, sea O_1 el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero AMND, O_2 el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero NMBC. Si $AB+CD=40m$, $AD+BC=24m$. Halle MN.

- A) 8m B) 9m C) 10m
D) 11m E) 12m

PROBLEMA Nº 71

En un triángulo ABC recto en B, sobre \overline{AC} se ubica el punto F y se trazan $\overline{FP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{FQ} \perp \overline{BC}$ respectivamente :

$$(P \in \overline{AB} \wedge Q \in \overline{BC})$$

Si $AB+BC=PF+AC$ y los inradios de los triángulos APF y FQC miden 3 y 4 unidades, entonces \overline{PF} mide (en μ).

- A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

PROBLEMA Nº 72

En un triángulo rectángulo, si el semiperímetro es p y la hipotenusa mide h, entonces el inradio mide :

- A) $p - \frac{h}{2}$ B) $\frac{p-h}{2}$ C) $p-h$
D) $2p-h$ E) $\frac{p+h}{2}$

PROBLEMA Nº 73

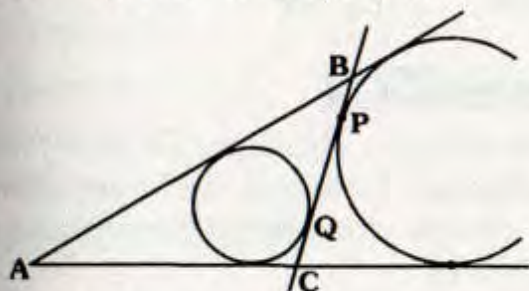
En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la altura \overline{BH} , si I es el incentro. Halle la distancia trazada de I a \overline{BH} si se sabe que:

$BH=12$ y $r_1=3$ (r_1 es el inradio del triángulo AHB).

- A) 1,5 B) 2 C) 1 D) 2,5 E) 1,25

PROBLEMA Nº 74

Si $AC=b$ y $AB=c$. Halle PQ.



- A) $\frac{c-b}{5}$ B) $\frac{c-b}{4}$ C) $\frac{c-b}{3}$
D) $\frac{c-b}{2}$ E) $c-b$

PROBLEMA Nº 75

ABCD es un cuadrilátero exinscriptible y circunscriptible. Si $AB=8\mu$ entonces AD (en μ) es :

- A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 15

PROBLEMA Nº 76

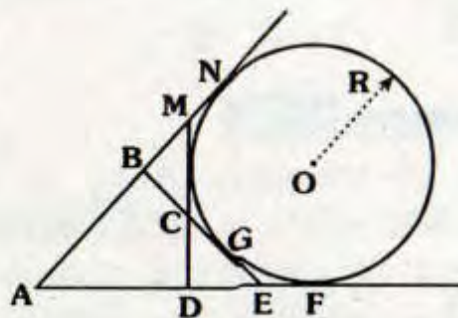
ABCD es un cuadrilátero en donde $BC=CD$, $m\angle BCD = m\angle DAB = 90^\circ$ se traza \overline{BE} de manera que $E \in \overline{AD}$, EBCD es un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD}$ ($H \in \overline{AD}$) tal que : $CH-HD=8\mu$, $EH=6\mu$, calcule el radio de la circunferencia inscrita en ABE (en μ).

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 77

En la figura $AN=18\mu$, $AD+DC=14\mu$, $OC=8\mu$. Halle el radio R (en μ).

- A) $4\sqrt{5}$
B) $4\sqrt{6}$
C) 6
D) $4\sqrt{3}$
E) 4



PROBLEMA N° 78

En un triángulo ABC, $AB = 5\mu$, $BC = 7\mu$, $AC = 6\mu$ se inscribe una circunferencia tangente a los lados \overline{AB} y \overline{BC} en P y Q. En el arco menor PQ se traza una tangente que interseca a los lados \overline{AB} y \overline{BC} en E y F respectivamente. Halle el perímetro del triángulo EBF (en μ).

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA N° 79

En un cuadrilátero convexo MNPQ, se traza \overline{RS} tal que: $S \in \overline{QP}$, $R \in \overline{MN}$. Si $Q+NP=a$ y $QP+MN=b$ y los cuadriláteros RMQS y RSPN son circunscriptibles, entonces la razón $RS/(b-a)$ es igual a:

- A) 10,3 B) 0,1 C) 0,2
D) 0,8 E) 0,5

PROBLEMA N° 80

Se tiene el triángulo ABC, $AB = 6\mu$, $AC = 8\mu$, se inscribe una circunferencia tangente al lado \overline{BC} en M, se exinscribe una circunferencia tangente al lado \overline{BC} en N. Halle MN (en μ).

- A) 1 B) 3 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

PROBLEMA N° 81

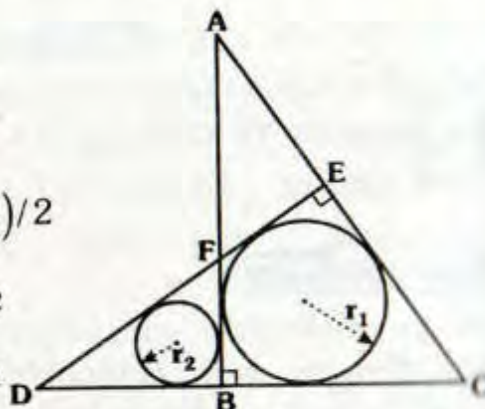
En un triángulo ABC, se cumple $m\angle BAC = 76^\circ$, $m\angle BCA = 44^\circ$ y la distancia del incentro al circuncentro es $5\sqrt{2}$. Calcule la distancia del circuncentro al ortocentro.

- A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

PROBLEMA N° 82

En la figura hallar FE en función de r_1 y r_2 .

- A) $r_2 - r_1$
B) $r_2 + r_1$
C) $(r_1 + r_2)/2$
D) $2r_1 - r_2$
E) $2r_2 - r_1$



PROBLEMA N° 83

Si el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de sus catetos 10 cm; entonces la distancia del incentro al circuncentro del triángulo rectángulo dado es:

- A) $\sqrt{65}$ cm B) 12 cm C) $\sqrt{51}$ cm
D) 8 cm E) 9 cm

PROBLEMA N° 84

En el $\triangle ABC$ ($m\angle B = 40^\circ$), M es el punto medio del segmento que une el incentro con el excentro relativo a \overline{AC} . Hallar $m\angle AMC$.

- A) 60° B) 80° C) 120°
D) 140° E) 90°

PROBLEMA N° 85

En un triángulo equilátero su lado mide a unidades. Entonces, la longitud del radio de una circunferencia exinscrita al triángulo es:

- A) $2a$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3a}{2}$
 D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

PROBLEMA N° 86

Se tiene un triángulo ABC cuyos lados miden $AC=b$, $AB=c$ y $BC=a$. Si $a+c=b+2r$ donde "r" es el inradio del triángulo ABC. Calcule $m\angle ABC$.

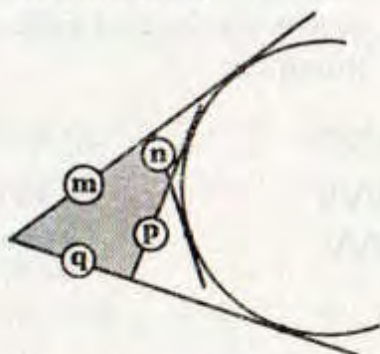
- A) 60° B) 45° C) 75°
 D) 90° E) 120°

PROBLEMA N° 87

Del siguiente gráfico. Calcular :

$$\frac{m+n}{m+n+p+q}$$

- A) $4/5$
 B) $3/4$
 C) $2/3$
 D) $2/3$
 E) $1/2$



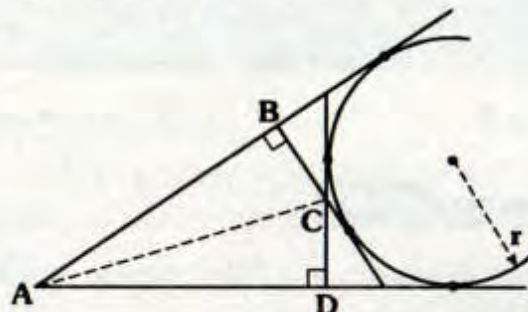
PROBLEMA N° 88

En un triángulo ABC: el ortocentro de su triángulo mediano es el del triángulo ABC.

- A) Ortocentro
 B) Incentro
 C) Baricentro
 D) Circuncentro
 E) Punto de Feuerbach

PROBLEMA N° 89

Con respecto a los inradios de los triángulos ABC y ADC r_1 y r_2 respectivamente se puede afirmar que :



- A) $r_1 > r_2$ B) $r_1 < r_2$
 C) $r_1 = r_2$ D) Falta información
 E) $r_1 + r_2 = r$

PROBLEMA N° 90

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas :

- I. Sean A y B dos puntos de una circunferencia de centro O; \vec{L} es la recta que contiene a los puntos medios de la cuerda AB y el arco AB, luego: $O \in \vec{L}$.
 II. En todo triángulo : ortocentro, incentro y baricentro son puntos de una misma recta.
 III. Todo trapecio es inscriptible.

- A) Sólo I B) Sólo II
 C) I y II D) I y III
 E) Sólo III

PROBLEMA N° 91

Se tiene un triángulo rectángulo ABC. Para hallar la longitud de la hipotenusa \overline{BC} es necesario conocer.

Los radios de los círculos exinscritos relativos a los catetos.

El inradio y exradio relativo a la hipotenusa.

Sólo I B) Sólo II

I y II D) Falta información

I ó II

PROBLEMA Nº 92

Indicar verdadero o falso según corresponda :

-) El incentro está ubicado en el interior para todo triángulo.
-) El ortocentro de un triángulo rectángulo está ubicado en el punto medio de la hipotenusa.
-) El baricentro de un triángulo puede estar ubicado en el exterior.
-) El circuncentro de un triángulo obtusángulo está ubicado en uno de sus vértices.
-) Todo triángulo tiene tres excentros.

A) VVFFV

B) FVVFV

C) VVVFF

D) VFFFV

E) VVFVV

PROBLEMA Nº 93

Diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I. Las alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices interiores de los ángulos del triángulo pedal.

II. En todo triángulo acutángulo la distancia del ortocentro al vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto al vértice considerado.

III. La circunferencia que pasa por 2 vértices de un triángulo y por su incentro, tiene su centro en la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

A) VVF

B) VFV

C) VVV

D) FFF

E) FVV



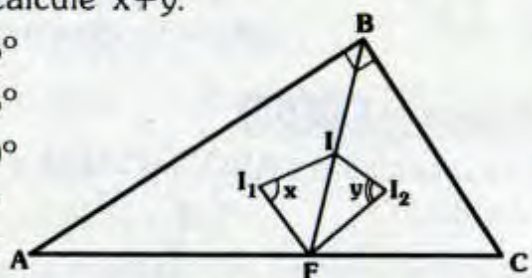
Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

PROBLEMA N° 94

I, I_1 e I_2 son incentros de ABC , ABF y BFC , calcule $x+y$.

- A) 135°
B) 125°
C) 120°
D) 90°
E) 60°



PROBLEMA N° 95

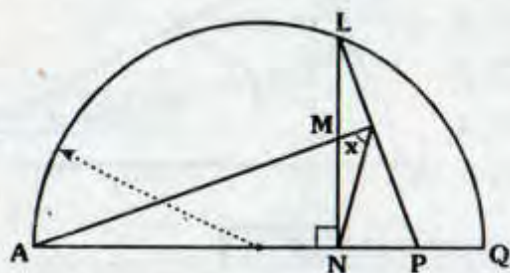
Se tiene un triángulo ABC (recto en B), la bisectriz del ángulo exterior en B corta a la circunferencia circunscrita en M , si N es punto medio de \overline{AC} , calcule $m\angle MNA$.

- A) 60° B) 70° C) 80°
D) 90° E) 100°

PROBLEMA N° 96

Si $LM=MN$, $NP=PQ$ y $m\widehat{AL} = 110^\circ$, calcule x .

- A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 70°



PROBLEMA N° 97

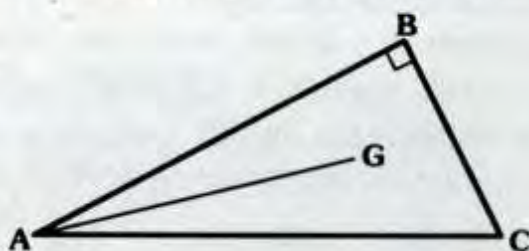
En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , I y E son el incentro y excentro relativo a \overline{BC} , si $AC=IE=6$, calcule AB .

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA N° 98

Si G es baricentro de ABC y $AC=18$, calcule el mayor valor entero de AG .

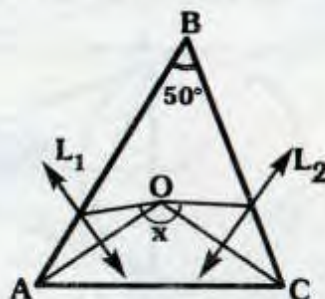
- A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13



PROBLEMA N° 99

O es circuncentro de ABC , si \vec{L}_1 y \vec{L}_2 son mediatrices de \overline{AO} y \overline{OC} , calcule x .

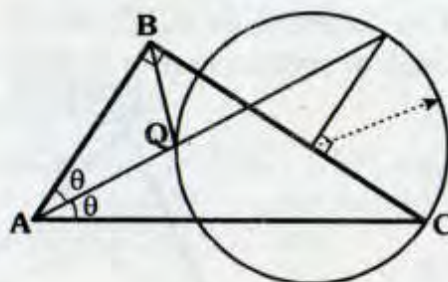
- A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 140°
E) 150°



PROBLEMA N° 100

Si $BQ = 3\sqrt{2}$, calcule el inradio de ABC .

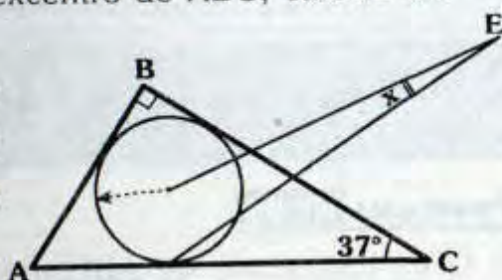
- A) 3
B) 3,5
C) $3\sqrt{2}$
D) 4
E) 5



PROBLEMA N° 101

E es excentro de ABC, calcule x :

- 15°
- 17°/2
- 21°/2
- 23°/2
- 25°



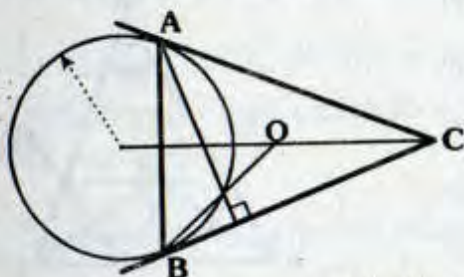
PROBLEMA N° 102

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, rectángulo en B, $m\angle BAC = 30^\circ$ y $AC = \sqrt{3}$, si O es el circuncentro de ABC, calcule la distancia entre los circuncentros de AOB y BOC.

- A) 1
- B) 2
- C) $\sqrt{3}$
- D) $2\sqrt{3}$
- E) $\sqrt{5}$

PROBLEMA N° 103

A y B son puntos de tangencia. ¿Qué punto notable es O de ABC?

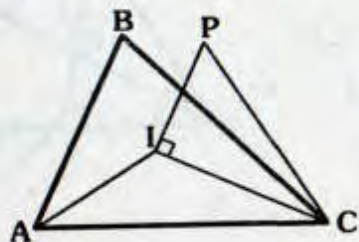


- A) Circuncentro
- B) Baricentro
- C) Punto de Georgone
- D) Incentro
- E) Ortocentro

PROBLEMA N° 104

Si I es incentro de ABC, $AI = IP$ y $PC = 6$, calcule el mínimo valor entero de AC.

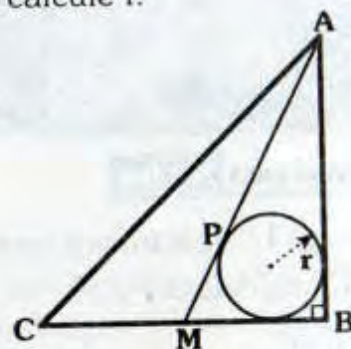
- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9



PROBLEMA N° 105

Si P es punto de tangencia y baricentro de ABC, $MP = 2$, calcule r.

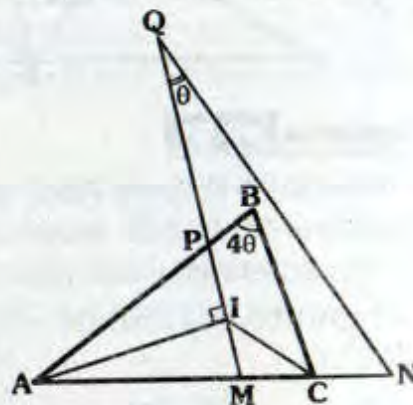
- A) $3\sqrt{5}$
- B) $2\sqrt{5} - 1$
- C) $\sqrt{15} - 3$
- D) $\sqrt{17} - 3$
- E) $2\sqrt{7}$



PROBLEMA N° 106

I es incentro de ABC, $MC = CN$ y $CI = 3$, calcule PQ.

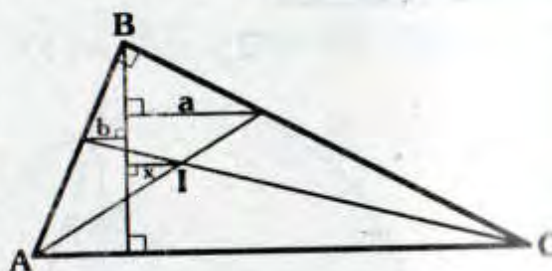
- A) 6
- B) 6,5
- C) $6\sqrt{2}$
- D) 8
- E) 9



PROBLEMA N° 107

I es incentro de ABC y $a - b = 4$, calcule x.

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5



PROBLEMA N° 108

Dado los triángulos equiláteros ABC, de baricentro G_1 , CDE, de baricentro G_2 , tal que A, C y E son colineales y B, C y D no son colineales, si $AC = 2(CD)$ y $G_1G_2 = 5$, calcule G_1D .

- A) 1
- B) 3
- C) 5
- D) 7
- E) 9

PROBLEMA N° 109

Se tiene el $\triangle ABC$, se trazan la altura BH y la ceviana interior CP , tal que $BC=CP$, si $m\angle PCA = 15^\circ$ y $m\angle BAC = 60^\circ$, calcule $m\angle PHA$.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA N° 110

En un cuadrilátero $ABCD$, si :

$$m\angle ABC = 2(m\angle ABD) = 120^\circ ;$$

$$m\angle ADB = 40^\circ \quad y$$

$$m\angle ADC = 110^\circ$$

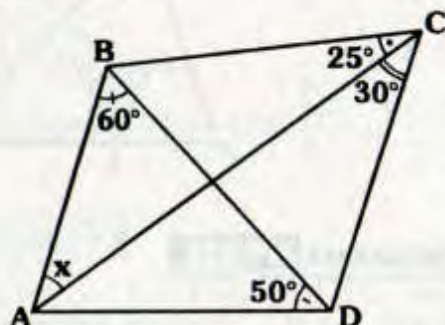
Calcule la medida del ángulo entre las diagonales.

- A) 60° B) 65° C) 70°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA N° 111

Calcule x .

- A) 30°
B) 40°
C) 35°
D) 45°
E) 50°



PROBLEMA N° 112

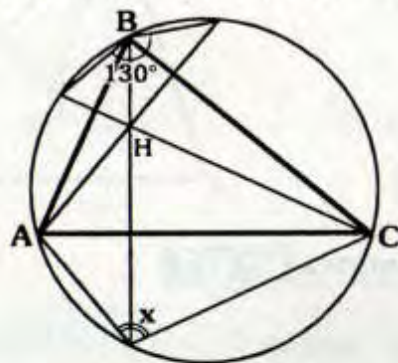
En un $\triangle ABC$, se ubica O en la ceviana interior BH , tal que $m\angle BAO = m\angle BCO$ $m\angle AOC = 90^\circ + m\angle BAO$, si $m\angle OAC = 15^\circ$ y $BC=12$, calcule la distancia de H a \overline{BC} .

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 113

Si H es ortocentro de ABC , calcule x .

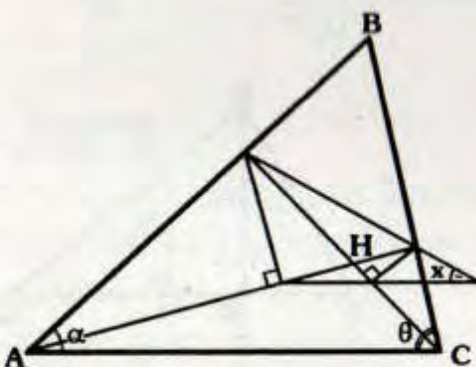
- A) 115°
B) 95°
C) 100°
D) 105°
E) 110°



PROBLEMA N° 114

H es ortocentro de ABC , calcule x .

- A) $\theta + \alpha$
B) $\theta - \alpha$
C) $\frac{\alpha + \theta}{2}$
D) $\frac{\theta - \alpha}{2}$
E) $2\alpha - \theta$



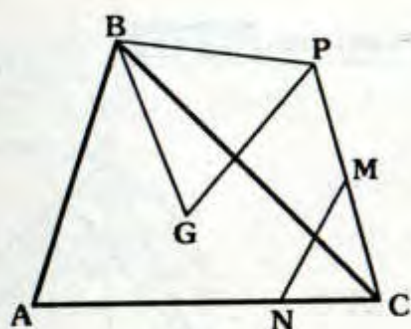
PROBLEMA N° 115

Se tiene el triángulo rectángulo ABC , recto en B , se construye el triángulo equilátero APC (exterior a ABC), si $m\angle ACB = 15^\circ$ y $AB+BC=12$, calcule la distancia del baricentro de APC a \overline{BC} .

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA N° 116

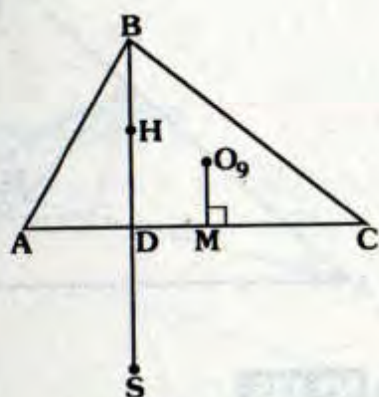
Si G es baricentro de ABC , BGP es un triángulo equilátero, $AN=3(NC)$, $PM=MC$ y $BP=4$, calcule MN .



PROBLEMA N° 117

En el gráfico H y O_9 son ortocentro y centro de la circunferencia de Euler del ángulo ABC. Si $BD=DS$.

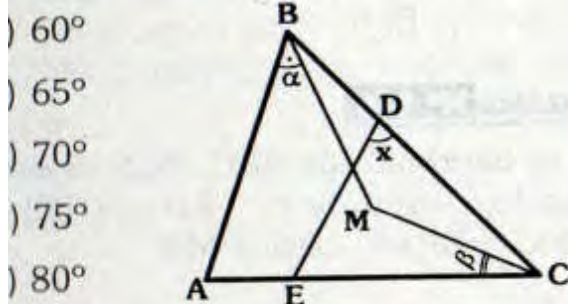
Calcule: $\frac{HS}{O_9M}$



- 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
3 E) 4

PROBLEMA N° 118

Si O es el circuncentro de ABC y ortocentro de EDC, si $\alpha + \beta = 75^\circ$, calcule x.

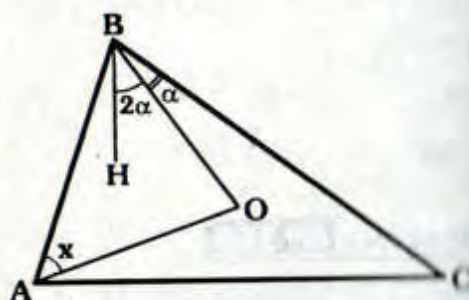


- 60°
65°
70°
75°
80°

PROBLEMA N° 119

Si H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente y $AC=3(BH)$, calcule x.

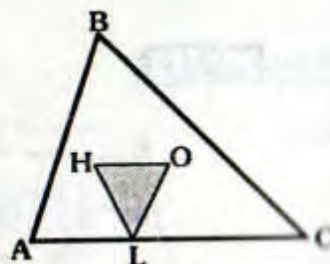
- A) 53°
B) $\frac{429^\circ}{8}$
C) 45°
D) $\frac{245^\circ}{60}$
E) 60°



PROBLEMA N° 120

Calcule el circunradio de ABC, si H y O son su ortocentro y circuncentro respectivamente, además el perímetro de la región triangular equilátera HLO es 6 y $\overline{HO} \parallel \overline{AC}$.

- A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



PROBLEMA N° 121

En un $\triangle ABC$, H es el ortocentro y O es el circuncentro, si $m\angle ABH = 2(m\angle HCO)$ y $BH=BO$, calcule $m\angle HAO$.

- A) 6° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 10°

PROBLEMA N° 122

Se tiene un triángulo ABC, se ubica el punto O en la altura BH, K y O son el circuncentro y ortocentro de ABC.

respectivamente, si $m\angle ABC = 60^\circ$ y $m\angle AOH = 40^\circ$, calcule $m\angle HOK$.

- A) 90° B) 95° C) 100°
D) 105° E) 110°

PROBLEMA N° 123

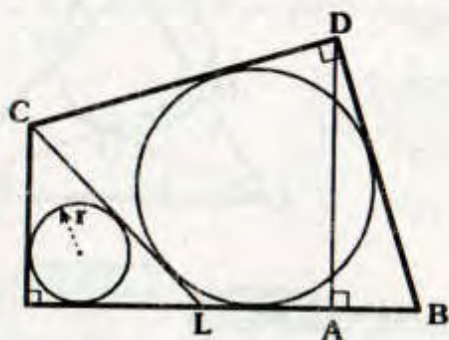
Se tiene el $\triangle ABC$; I_1 , I_2 e I_3 son sus excentros (I_1 es relativo a \overline{AB}), además I es el incentro de ABC , si $m\angle I_3 I_1 I_2 = 50^\circ$, calcule $m\angle I_2 I I_3$.

- A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

PROBLEMA N° 124

Si $AD - AB = 6$, $AL = 4$ y $CD = DB$, calcule r

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA N° 125

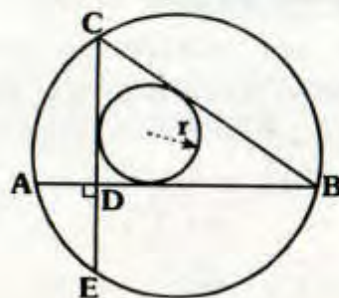
Dado un triángulo rectángulo ABD , recto en B , se construye el triángulo rectángulo BCD , recto en C , si $AB = 4(BC)$, $AD = 5(BC) - 7$ y la suma de los inradios de ABD y BCD es 5, calcule CD .

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 126

Si $m\widehat{CA} = 2(m\widehat{AE})$, y $CD - AD = 16$. Calcule r .

- A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9



PROBLEMA N° 127

En un cuadrilátero $ABCD$ circuncrito, $AB = AC$ y $m\angle ACD = 90^\circ$, si $BC = 12$. Calcule el inradio de ACD .

- A) 3 B) 1 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 128

Se tiene el trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B , dicho trapecio es circuncrito, si $m\angle ACD = 90^\circ$ y los inradios de ABC y ACD son r_1 y r_2 respectivamente, calcule BC .

- A) $2r_1 - r_2$ B) $\frac{r_1 + r_2}{2}$
C) $r_1 + 2r_2$ D) $3r_1 - 2r_2$
E) $r_1 + r_2$

PROBLEMA N° 129

Se tiene el cuadrilátero inscrito $ABCD$, se ubica E en \overline{BC} , si $CD = 3$, $m\angle BAD = 2(m\angle EDC)$ y ED toma su máximo valor entero, calcule AB . (Siendo $ABED$ circuncrito de perímetro 26).

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

PROBLEMA N° 130

En un octógono circunscrito CDEFGH, si $AB=2(BC)=DE=2$, $EF=1,5$, $GH=3$ y $AH=4$, calcule FG.

- A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3

PROBLEMA N° 131

En un triángulo ABC, de incentro I y mediatriz interior AD, se traza \overline{IE} perpendicular a BC ($E \in \overline{BC}$), calcule:

$$\frac{m\angle BID}{m\angle EIC}$$

- A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5

PROBLEMA N° 132

En un cuadrilátero ABCD, $m\angle BAD=105^\circ$, $m\angle ABC=130^\circ$, $m\angle BAC=30^\circ$ y $m\angle ACD=80^\circ$, calcule la medida del ángulo entre \overline{AC} y \overline{BD} .

- A) 60°
B) 65°
C) 75°
D) 85°
E) 90°

PROBLEMA N° 133

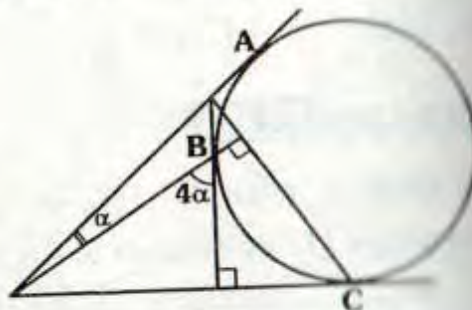
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en el cual BQ es mediana, trazamos $\overline{L} \perp \overline{BQ}$, $\overline{AM} \perp \overline{L}$ y $\overline{CN} \perp \overline{L}$ ($M, N \in \overline{L}$), si $MN=24$, calcule la distancia del ortocentro de ABC a \overline{AC} .

- A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16

PROBLEMA N° 134

A, B y C son puntos de tangencia, calcule α .

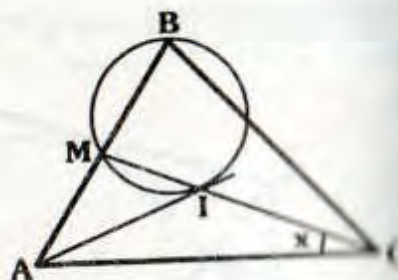
- A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 16°
E) 18°



PROBLEMA N° 135

I es punto de tangencia e incentro de ABC, si $MB=20$ y el inradio de ABC mide 15, calcule x.

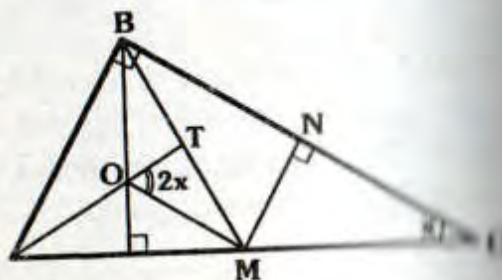
- A) 30°
B) 37°
C) $37^\circ/2$
D) 15°
E) 14°



PROBLEMA N° 136

Si: $\overline{OM} \parallel \overline{BC}$ y $MT=MN$, calcule x.

- A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 15°
E) 14°



PROBLEMA N° 137

En un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O, la prolongación de \overline{BO} corta a \overline{AC} en P, si $m\angle ABP=30^\circ$ y $m\angle PBC=20^\circ$, calcule $m\angle BPC$.

- A) 90° B) 25° C) 80°
 D) 100° E) 40°

PROBLEMA N° 138

Se tiene un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$) cuyo excentro relativo a \overline{BC} es E , en el $\triangle BEC$ se traza la altura EH , si $BH=2$, calcule AC .

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 139

Se tiene un triángulo equilátero ABC , inscrito en una circunferencia de centro O , se traza una cuerda \overline{CQ} , tal que $\overline{CQ} \perp \overline{AC}$, si el circunradio de BQO mide 4, calcule BC .

- A) 12 B) $12\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{3}$
 D) 13 E) 24

PROBLEMA N° 140

En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q respectivamente, de modo que \overline{PQ} es tangente a la circunferencia inscrita a dicho triángulo, si los perímetros de las regiones triangulares ABC y PBQ son 24 y 12, calcule AC .

- A) 5 B) 6 C) 7
 D) 8 E) 9

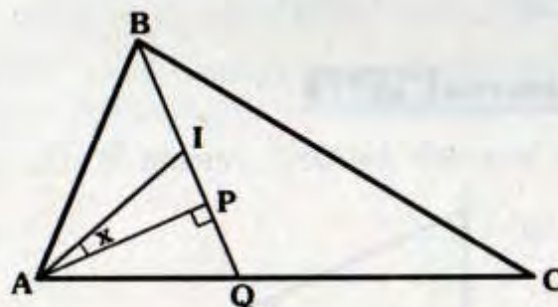
PROBLEMA N° 141

En un paralelogramo $ABCD$ en \overline{CD} se ubica el punto M tal que $CM=MD=3$, en \overline{BM} se ubica N de modo que $BN=2(MN)$ y $m\angle NDA = m\angle BCD$. Calcule DN .

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 142

I es incentro de ABC , si $AB=BQ$ y $QC=2(AP)$, calcule x .



- A) 10° B) 11° C) 12°
 D) 14° E) 15°

PROBLEMA N° 143

Dado un triángulo acutángulo ABC , calcule la distancia del circuncentro de ABC a la altura BF , siendo su circunradio 12 y $m\angle BAC - m\angle BCA = 30^\circ$.

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

Problemas Propuestos

Ciclo

Semestral
Intensivo

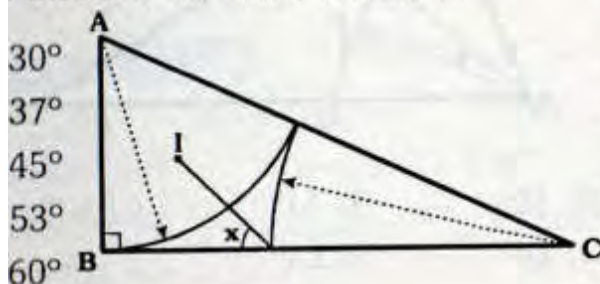
PROBLEMA N° 144

Se tiene el $\triangle ABC$ de circuncentro O , se toma el punto P exterior y relativo a \overline{BC} . OP es igual al circunradio de ABC y $\angle BPC = m\angle BAC$, calcule $m\angle PBC$.

- 30° B) 37° C) 45°
53° E) 60°

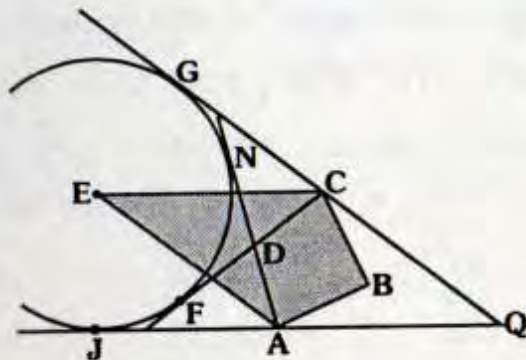
PROBLEMA N° 145

Si I es incentro de ABC , calcule x .



PROBLEMA N° 146

En el gráfico J, F, N y G son puntos de tangencia, indique que tipo de cuadrilátero es $ABCE$, si $ABCD$ y $AECQ$ son paralelogramos.



- A) Circunscriptible B) Exinscriptible
C) Trapecio D) Inscriptible
E) Bicéntrico

PROBLEMA N° 147

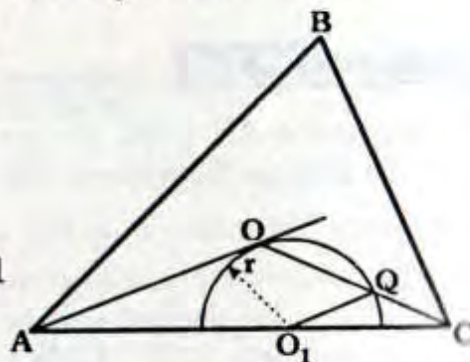
Se tiene el cuadrilátero $ABCD$, se prolonga \overline{AB} hasta E , si $m\angle ADB = 54^\circ$, $m\angle BDC = 30^\circ$, $m\angle DBC = 78^\circ$ y $m\angle EBC = 48^\circ$, calcule $m\angle BAC$.

- A) 10° B) 12° C) 14°
D) 16° E) 18°

PROBLEMA N° 148

O es circuncentro de ABC y punto de tangencia, si $AO \parallel O_1Q$, calcule AO/r .

- A) $\sqrt{2} + 1$
B) $\sqrt{2} - 1$
C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3} - 1$
E) $\sqrt{5}$



PROBLEMA N° 149

Dado el triángulo acutángulo ABC , H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC , si $AB=2$ y $BH=BO=\sqrt{2}$, calcule $m\angle HBO$.

- A) 14° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 45°

PROBLEMA N° 150

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AD, si $CD = 2(AB)$, $BD = 2\sqrt{3}$ y $m\angle BCA = 15^\circ$, calcule la distancia del ortocentro de ABC al circuncentro de ABD.

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{3}$ E) 2

PROBLEMA N° 151

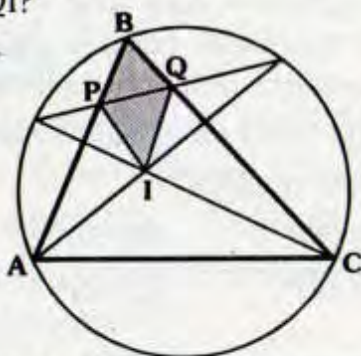
En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior BD, I es el incentro de ABC, si $BI = 7\sqrt{2}$ y $DI = 5\sqrt{2}$, calcule AC.

- A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

PROBLEMA N° 152

I es incentro de ABC, ¿Qué tipo de cuadrilátero es PBQI?

- A) Rombo
B) Rectángulo
C) Inscriptible
D) Romboide
E) Cuadrado

**PROBLEMA N° 153**

Se tiene el triángulo ABC de incentro I y circuncentro O, si K es el circuncentro de AIC, $m\angle BCA = 20^\circ$ y $m\angle BAC = 60^\circ$. Calcule $m\angle KIO$.

- A) 14° B) 16° C) 30°
D) 20° E) 50°

PROBLEMA N° 154

Dado un $\triangle ABC$ de circuncentro O, la recta de Euler de ABC corta a \overline{AB} en L, luego se ubican M y N en dicha recta, si $m\angle BLO = 60^\circ$, $m\angle MAC = m\angle NCA = 90^\circ$, $AM = 2$ y $NC = 4$, calcule BO.

- A) 3 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 155

Por el vértice C de un $\triangle ABC$ se traza \mathcal{L} paralela a la mediana BN, la prolongación de la mediana AM corta a \mathcal{L} en F, si G es el baricentro de ABC y la suma de las longitudes de las medianas del $\triangle ABC$ es ℓ , calcule el perímetro de la región limitada por el triángulo mediano del $\triangle GCF$.

- A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell}{2}$
D) ℓ E) $\frac{3\ell}{2}$

PROBLEMA N° 156

Se tiene el pentágono ABCDE, si :

$$\begin{aligned} m\angle BAC &= m\angle CAD \text{ y} \\ m\angle DEC &= m\angle CEB, \\ m\angle ABE + m\angle ADE &= 180^\circ \end{aligned}$$

y $AE = 30$, calcule la distancia entre el baricentro y circuncentro de ACE.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA N° 157

En los lados AB y CD de un cuadrilátero ABCD se ubican los puntos P y Q, si PBCQ y APQD son circunscriptibles, calcule:

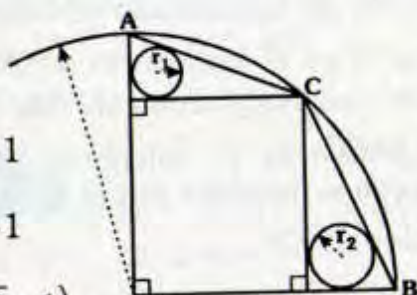
$$\frac{PQ}{CD + AB - BC - AD}$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

PROBLEMA N° 158

Si $AC=4$ y $BC=4\sqrt{2}$, calcule $r_1 + r_2$:

- A) $\sqrt{10} - \sqrt{2}$
B) $2\sqrt{10} - 1$
C) $\sqrt{10} - \sqrt{3} - 1$
D) $\sqrt{10} - \sqrt{2} - 1$
E) $2(\sqrt{10} - \sqrt{2} - 1)$



PROBLEMA N° 159

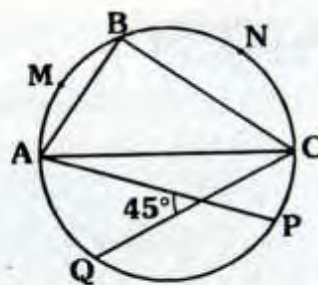
Dado un triángulo ABC cuyo ortocentro es H, las prolongaciones de \overline{AH} , \overline{BH} , \overline{CH} , cortan a la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ en M, N y L, respectivamente. Si el perímetro de la región hexagonal ALBMCN es 18, calcule la suma de los circunradios de los triángulos LHN, NHM y LHM.

- A) 9 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

PROBLEMA N° 160

Si $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$, $m\widehat{NB} = m\widehat{NC}$, $m\widehat{PQ} = 90^\circ$ y las distancias de M y N a \overline{BC} y \overline{AB} son 5 y 12 respectivamente, calcule el inradio de ABC.

- A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



PROBLEMA N° 161

En una circunferencia se inscribe un triángulo ABC, $m\angle ABC = 90^\circ$, se traza la altura BH, en el arco BC se ubica el punto Q, tal que sea el excentro de AHB, si $\overline{AQ} \cap \overline{BH} = \{P\}$. ¿Qué punto notable es P de ABC?

- A) Incentro B) Baricentro
C) Circuncentro D) Punto de Miquel
E) Ortocentro

PROBLEMA N° 162

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\angle ACB = 18^\circ$, la mediatriz del segmento que une el ortocentro y el circuncentro corta a \overline{AC} en D, luego la bisectriz del ángulo BAC corta en E a \overline{BD} , si O es el punto medio de \overline{AC} , calcule $m\angle DEO$.

- A) 36° B) 38° C) 54°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA N° 163

En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura BM, calcule la distancia del circuncentro O de dicho triángulo a \overline{AC} , si $AM=2$, $m\angle MBO = 31^\circ$ y $m\angle OBC = 14^\circ$.

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA N° 164

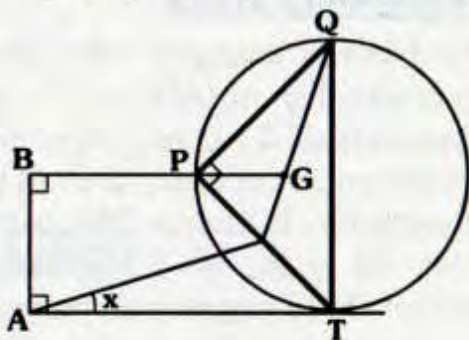
Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, gira 60° alrededor de A, siendo su posición final $AB'C'$, si $BC = 3\sqrt{10}$ y $m\angle BAC = 37^\circ$, calcule la distancia entre los incentros del triángulo en su posición inicial y final.

- A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 10
D) $\sqrt{18}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA N° 165

Si T es punto de tangencia, G es el baricentro de PQT y $4(BP) = 3(PG)$, Calcule x.

- A) 14°
B) 15°
C) $37^\circ/2$
D) $53^\circ/2$
E) 30°

**PROBLEMA N° 166**

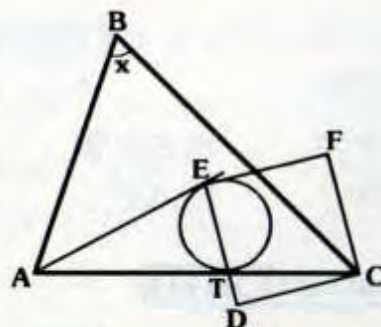
Dado el cuadrilátero convexo ABCD, se traza $BH \perp \overline{CD}$ ($H \in \overline{CD}$), si A es el circuncentro de BCD, $AB = CD$ y $m\angle HBC = m\angle BAC$, calcule la medida del ángulo entre sus diagonales.

- A) 80° B) 82° C) 84°
D) 86° E) 90°

PROBLEMA N° 167

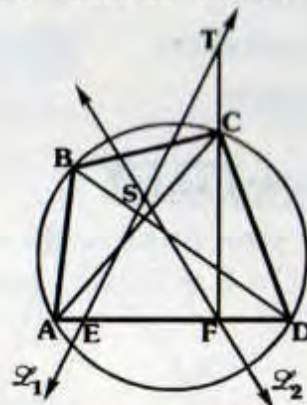
E y T son puntos de tangencia, E es el circuncentro de ABC y EDCF es un cuadrado, calcule x.

- A) 90°
B) 45°
C) 53°
D) 75°
E) 60°

**PROBLEMA N° 168**

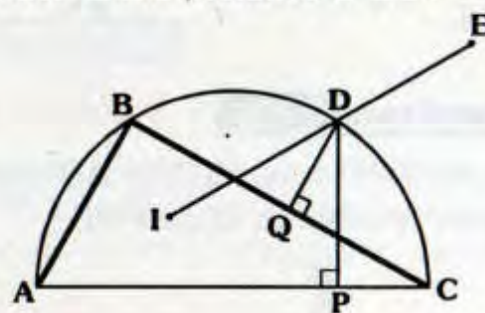
En el gráfico \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son rectas de Simson de B y C respecto a los triángulos ACD y ABD respectivamente. Si $EF = 6$ y $ST = 5$. Calcule $m\angle BC$.

- A) 60°
B) 74°
C) 106°
D) 53°
E) 78°

**PROBLEMA N° 169**

Del gráfico, I es incentro y E es excentro de ABC, si $DP + DQ = 6$, calcule el exradio del $\triangle ABC$, relativo a \overline{BC} .

- A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

**PROBLEMA N° 170**

Se tiene el triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se trazan las alturas CH y AQ. Si

$\overline{OB} = \{F\}$ y $HF = 2(FO)$, calcule $\angle FHO$.

- 37°/2 B) 53°/2 C) 30°
37° E) 45°

PROBLEMA N° 171

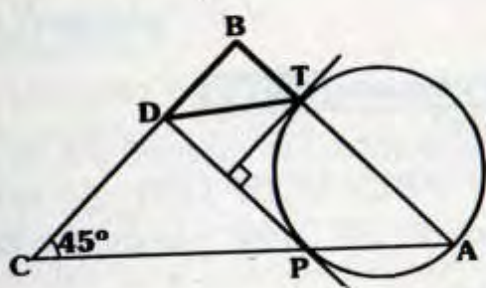
do un cuadrante AOB, de centro O, inscribe una circunferencia tangente a \overline{OA} , \overline{OB} y el arco AB en P, Q y T respectivamente. ¿Qué punto notable es B ATQ?

- Incentro B) Baricentro
Circuncentro D) Ortocentro
Excentro

PROBLEMA N° 172

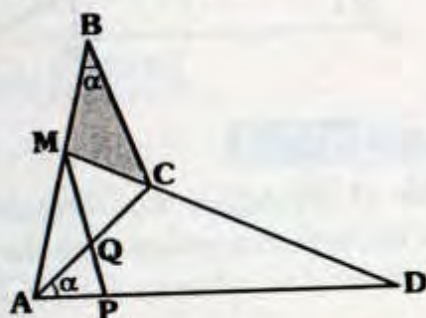
y P son puntos de tangencia, si $AT - DC = 1$ y $TD = 5$, calcule el inradio de TBD.

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 3,5
E) 4



PROBLEMA N° 173

Si $m\angle MAD = m\angle MCA$ y $AQ = AP$. ¿Qué punto notable es Q de MBC?

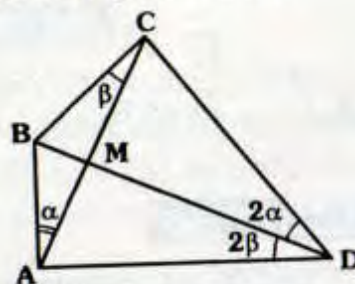


- A) Ortocentro B) Circuncentro
C) Excentro D) Punto de Nagel
E) Punto de Steiner

PROBLEMA N° 174

Si $AM = MC = 5$ y $AD + CD = 26$, calcule el inradio del triángulo AMD.

- A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 3



PROBLEMA N° 175

Se tiene el triángulo ABC, de inradio 3, incentro I y $m\angle ABC = 60^\circ$, las prolongaciones de CI y AI intersectan a la circunferencia circunscrita en M y N respectivamente, la cuerda MN corta a los lados \overline{AB} y \overline{BC} en E y F, calcule el perímetro de la región triangular EBF.

- A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 4
D) 6 E) $6\sqrt{3}$

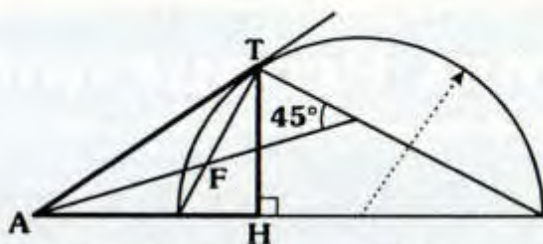
PROBLEMA N° 176

Sea H e I el ortocentro e incentro respectivamente de un $\triangle ABC$, tal que $I \in BH$, si $m\angle BCA + m\angle HCI = 90^\circ$, calcule $m\angle BAC$.

- A) 70° B) 72° C) 74°
D) 76° E) 90°

PROBLEMA N° 177

T es punto de tangencia. ¿Qué punto notable es F de ATH?



- A) Incentro B) Baricentro
C) Punto de Brocard D) Ortocentro
E) Circuncentro

PROBLEMA N° 178

En un triángulo ABC de ortocentro H, se trazan las alturas BQ y AM, luego la prolongación de \overline{AM} corta a la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ en P, si $m\angle ACB = 60^\circ$, calcule la medida del ángulo entre \overline{QM} y \overline{CP} .

- A) 14° B) 15° C) 16°
D) 30° E) 45°

PROBLEMA N° 179

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si M es punto medio de \overline{BC} , $AB=5$ y $m\angle BAC = 2(m\angle AMB)$, calcule la distancia entre su baricentro y circuncentro de ABC.

- A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

PROBLEMA N° 180

Se tiene un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, \overline{BD} corta a \overline{CA} en P, tal que $AP = 2(PC)$. ¿Qué tipo de triángulo es ACD?

- A) Acutángulo B) Obtusángulo
C) Escaleno D) Isósceles
E) Equilátero

PROBLEMA N° 181

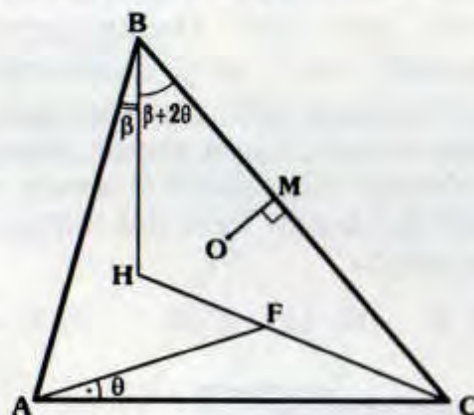
Dado un $\triangle ABC$, se traza el cuadrado BNPQ, tal que $P \in \overline{BC}$ y N es incentro de ABC, $\overleftrightarrow{AN} \cap \overleftrightarrow{BQ} = \{S\}$, si $SQ = m$ y $NS = n$, calcule $CN - CP$.

- A) $n - m\sqrt{2}$ B) $2n - m$
C) $n + m\sqrt{2}$ D) $n\sqrt{2} - m$
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}(n - m)$

PROBLEMA N° 182

H y O son ortocentro y circuncentro de ABC, si $OM = 3$, calcule HF.

- A) 3
B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{3}$
D) 6
E) 9

**PROBLEMA N° 183**

Dado un triángulo ABC, con centro en \overline{AC} se traza la circunferencia tangente a \overline{AB} y \overline{BC} , dicha circunferencia contiene al circuncentro y ortocentro, calcule $m\angle ABC$.

- A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 90°

Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA N° 184

En un triángulo ABC, se ubica en su región interior el punto P, tal que $PA=PB=PC$, $m\angle ABP = 80^\circ$, $m\angle BAP = 30^\circ$, $m\angle BPC = 140^\circ$, calcule $m\angle ACP$.

- A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

PROBLEMA N° 185

Dado un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia \mathcal{C} , $\angle ABC = 45^\circ$, se prolongan las alturas del triángulo ABC hasta un punto de \mathcal{C} terminando una región triangular de perímetro 52, calcule el menor valor en el mayor lado del triángulo órtico ABC.

- A) 7 B) 11 C) 6 D) 8 E) 9

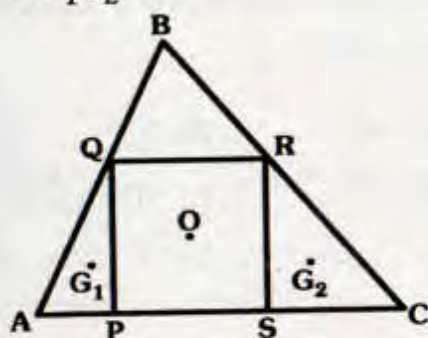
PROBLEMA N° 186

O es centro y baricentro del cuadrado PQRS y del triángulo ABC respectivamente.

G_1 y G_2 son baricentros de AQP y

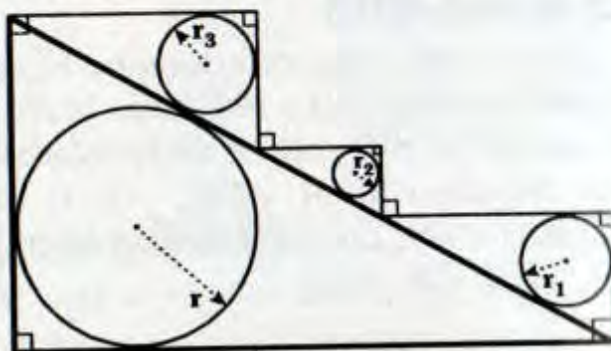
PRC, calcule : $\frac{RS}{G_1G_2}$

- A) $2/3$
B) $3/4$
C) $3/5$
D) $5/3$
E) $3/2$



PROBLEMA N° 187

Si $r_1 + r_2 + r_3 = 7$, calcule r .

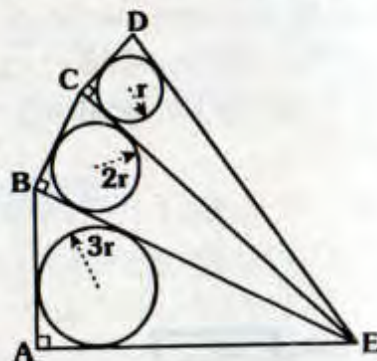


- A) 3,5 B) 4 C) 4,5 D) 7 E) 14

PROBLEMA N° 188

Si $ED = 12$ y $AE + AB + BC + CD = 24$, calcule r .

- A) $1/2$
B) 1
C) $3/2$
D) 2
E) $5/2$



PROBLEMA N° 189

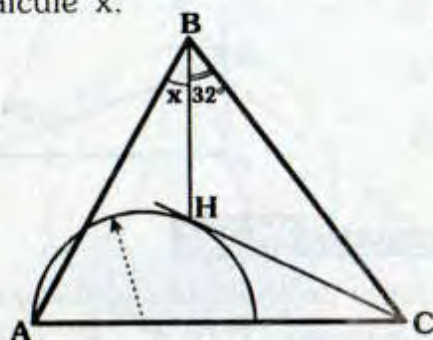
Dado un triángulo isósceles ABC, $AB=BC$ se traza la ceviana interior AM, tal que $MC = 2(MB)$, en \overline{AM} se ubica el punto L, tal que $m\angle BLC = 90^\circ$, si Q es punto medio de \overline{AC} , calcule $m\angle ALQ$.

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 190

Si H es punto de tangencia y ortocentro de ABC, calcule x.

- A) 26°
 B) 27°
 C) 28°
 D) 29°
 E) 30°

**PROBLEMA N° 191**

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $AB=DC$, si:

$$m\angle ABD = \frac{m\angle BAD}{2} = \frac{m\angle BCD}{4}$$

Calcule $m\angle ABD$.

- A) 5° B) 7° C) 9° D) 8° E) 10°

PROBLEMA N° 192

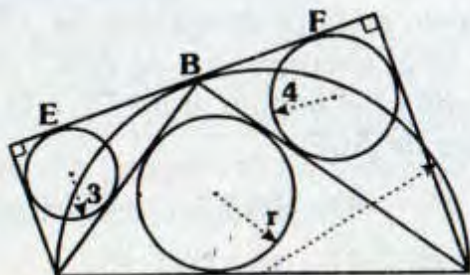
Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base \overline{AB} , si la ceviana interior BN pasa por el circuncentro de ABC y $m\angle ABC = m\angle ANB$, calcule $m\angle NBC$.

- A) $22^\circ 30'$ B) $10^\circ 30'$ C) 15°
 D) 20° E) 25°

PROBLEMA N° 193

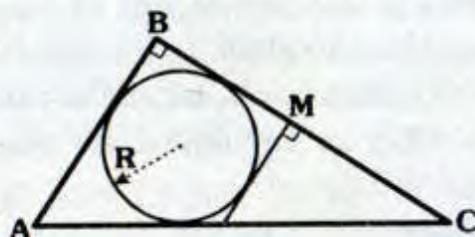
Si E, B y F son puntos de tangencia y $EF=15$, calcule r.

- A) 4
 B) 5
 C) 6
 D) 7
 E) 8

**PROBLEMA N° 194**

Del gráfico, $AB=6$ y $BM=MC$, calcule R.

- A) 2
 B) 3
 C) 4
 D) 5
 E) 6

**PROBLEMA N° 195**

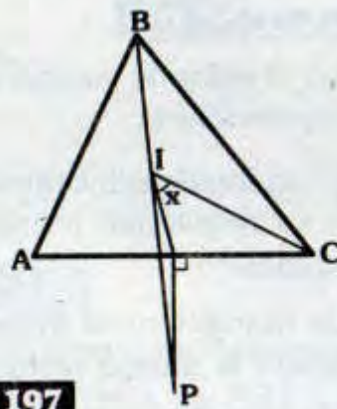
En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia de centro O, donde P es el punto de tangencia con \overline{BC} , si $m\angle ABC = 90^\circ$, $AB+CD=21$ y $AD+OC=17$, calcule el inradio de OPC.

- A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

PROBLEMA N° 196

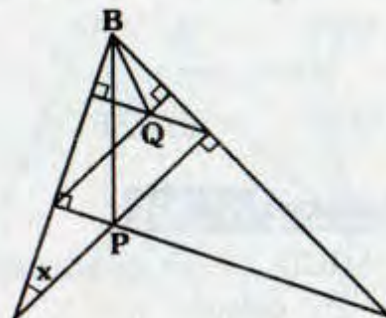
I es incentro de ABC, $AB=13$, $BC=15$, $AC=14$ y $BI=IP$, calcule x.

- A) 42°
 B) 44°
 C) 45°
 D) $49^\circ 30'$
 E) 46°

**PROBLEMA N° 197**

Si $PB=2(BQ)$, calcule x.

- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) $\frac{53^\circ}{2}$
 E) $\frac{37^\circ}{2}$



PROBLEMA N° 198

En un triángulo ABC, se trazan la altura y la bisectriz interior AL, S es la proyección ortogonal de L sobre la paralela \overline{BC} traza por B, tal que el circuncentro HBS se encuentra en \overline{AL} , calcule $\angle ABC$.

- A) 50° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 199

En un triángulo ABC de incentro I, sea P punto medio de \overline{AC} , las rectas AI y BP cortan en Q a \overline{BM} respectivamente, si $BP=6$, $QM=4$ y $2(BI)=3(ID)$ ($\angle C > \angle A$ y \overline{BD} es bisectriz interior), calcule PQ.

- A) 5 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

PROBLEMA N° 200

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

Un triángulo exincentral es equilátero si su respectivo triángulo órtico es equilátero.

Un triángulo y su triángulo mediano tienen la misma recta de Euler.

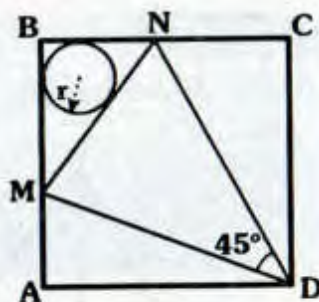
El triángulo tangencial puede ser rectángulo.

- VVV B) VFV C) FFV
VVF E) FFF

PROBLEMA N° 201

ABCD es un cuadrado, $MN=12$ y $AC=16$, calcule r .

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA N° 202

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O, si A' , B' y C' son los circuncentros de COB, AOC y AOB, ¿Qué punto notable es O del triángulo $A'B'C'$?

- A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Excentro

PROBLEMA N° 203

Se tiene un trapecio isósceles ABCD ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), si $BD=10$, calcule la distancia entre los ortocentros de ABC y ADC.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

PROBLEMA N° 204

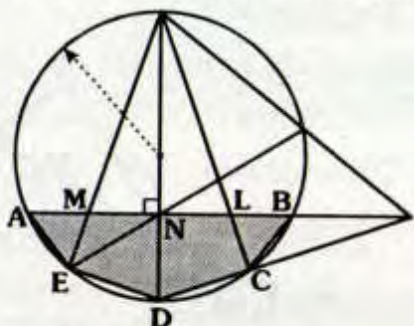
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se diferencian en 20° , la mediatriz de \overline{AC} corta en P al arco BC de la circunferencia circunscrita, luego se traza \overline{PE} perpendicular a \overline{AB} (E está en la prolongación de \overline{AB}), siendo O el circuncentro de ABC, calcule la medida del ángulo entre OE y la recta de Euler de ABC.

- A) 3° B) 5° C) 7°
D) 10° E) 15°

PROBLEMA N° 205

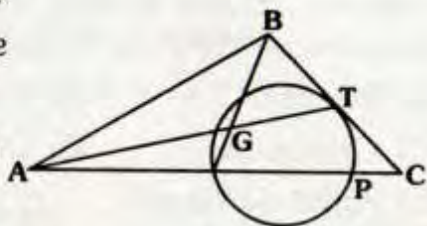
Si $MN=3$, $LB=2$, $CD=5$ y $AE=1$, calcule el perímetro de la región pentagonal ABCDE.

- A) 10
B) 15
C) 22
D) 25
E) 30

**PROBLEMA N° 206**

T es punto de tangencia y G es baricentro de ABC, ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABTP?

- A) Inscriptible
B) Trapezoide
C) Rombo
D) Bicentrico
E) Trapecio

**PROBLEMA N° 207**

Exteriormente al triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros ABE y BCH, si M, N y P son los baricentros de ABE, ABC y BHC respectivamente, calcule $m\angle MNP$.

- A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA N° 208

Calcule el perímetro de la región trapezoidal inscrita en una circunferencia, sabiendo que dicho trapecio está circunscrito a otra circunferencia de radio R, además uno de sus ángulos interiores mide 30° .

- A) $10R$ B) $12R$ C) $14R$
D) $16R$ E) $18R$

PROBLEMA N° 209

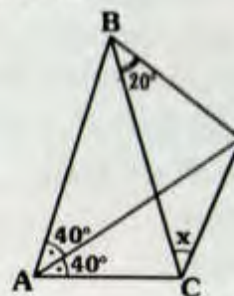
En un triángulo ABC, se ubica D en la región exterior relativa a \overline{BC} , tal que AC, BD y el circunradio de ABC son iguales y $m\angle ADC = 30^\circ$, calcule la medida del ángulo entre \overline{AD} y \overline{BC} .

- A) 60° B) 18° C) 24° D) 30° E) 37°

PROBLEMA N° 210

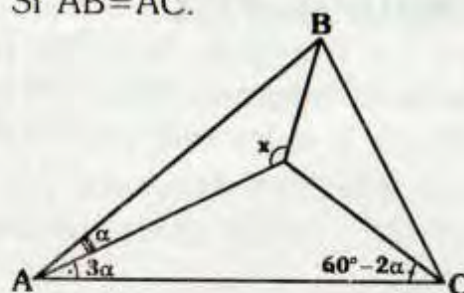
Si $AB=BC$, calcule x.

- A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 45°

**PROBLEMA N° 211**

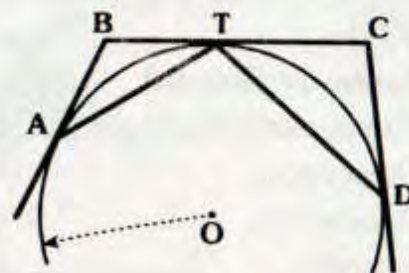
Calcule x. Si $AB=AC$.

- A) 90°
B) 150°
C) 110°
D) 120°
E) 135°

**PROBLEMA N° 212**

Si A, T y D son puntos de tangencia, O_1 y O_2 son circuncentros de ABT y TCD, calcule la medida del ángulo entre $\overline{O_1O_2}$ y \overline{OT} .

- A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA N° 213

Se tiene el cuadrilátero ABCD, las diagonales se cortan en E, si $AB=BE$, $m\angle EDC = m\angle ABC = 2(m\angle BEA)$, ¿qué punto notable es A del triángulo BCD?

- A) Excentro
- B) Ortocentro
- C) Punto de Steiner
- D) Circuncentro
- E) Punto de Miquel

PROBLEMA N° 214

Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente se construyen los triángulos equiláteros ARB y BSC, si \overline{RC} y \overline{SA} se cortan en L, indique que punto notable es B de RSL.

- A) Baricentro
- B) Incentro
- C) Ortocentro
- D) Circuncentro
- E) Punto de Brocard

PROBLEMA N° 215

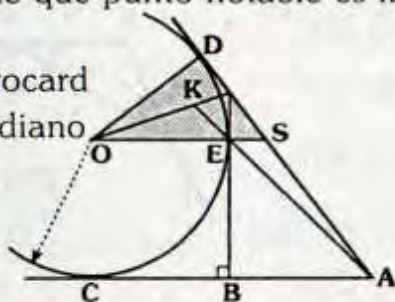
En un triángulo ABC se trazan las medianas interiores AM y CN que se cortan en T, si los triángulos AMB y BNC son isósceles de bases \overline{AB} y \overline{BC} y $T=AC$. ¿Qué punto notable es T de BC?

- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Ortocentro
- D) Circuncentro
- E) Cevacentro

PROBLEMA N° 216

D, E y C son puntos de tangencia y $AB=BC$, indique que punto notable es k de SDO.

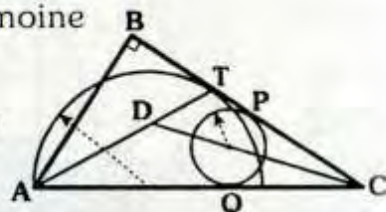
- A) Punto de Brocard
- B) Punto exmediano
- C) Ortocentro
- D) Baricentro
- E) Incentro



PROBLEMA N° 217

T, P y Q son puntos de tangencia. ¿Qué punto notable es D del triángulo ABC?

- A) Baricentro
- B) Punto de Lemoine
- C) Ortocentro
- D) Circuncentro
- E) Incentro



PROBLEMA N° 218

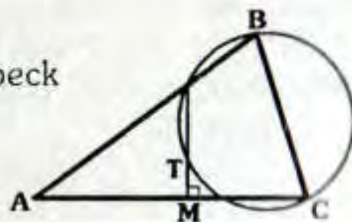
La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AB, BC y AC en M, N y P respectivamente, las bisectrices interiores de los ángulos BAC y ACB cortan a \overline{MN} en R y Q respectivamente. ¿Qué punto notable es el incentro de ABC del triángulo PQR?

- A) Incentro
- B) Baricentro
- C) Ortocentro
- D) Circuncentro
- E) Punto de Nagel

PROBLEMA N° 219

Si $AM=MC$, ¿Qué punto notable es T de ABC?

- A) Baricentro
- B) Punto de Jerabeck
- C) Ortocentro
- D) Incentro
- E) Circuncentro



PROBLEMA N° 220

En un cuadrilátero ABCD, tal que $AB=BC$, $m\angle BDC = 2(m\angle BAC)$ y $m\angle BDA = 2(m\angle BCA)$

¿Qué punto notable es D de ABC?

- A) Cevacentro
- B) Circuncentro
- C) Excentro
- D) Ortocentro
- E) Punto de Brocard



Problemas Propuestos

Oímpicos

PROBLEMA Nº 1

XX Olimpiada Iberoamericana
Cartagena de Indias, 2005

Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y D un punto en el menor arco BC de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Sean E y F punto de \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente, tales que $m\angle BDE = m\angle OAC$ y $m\angle CDF = m\angle OAB$.

Demuestre que EF pasa por el ortocentro del triángulo ABC .

PROBLEMA Nº 2

41° IMO 2 000

P es un punto en el interior del triángulo ABC . Las perpendiculares desde P sobre los lados BC , CA y AB intersecan a dichos lados en D , E y F respectivamente. Demostrar que P es el circuncentro si uno de los triángulos AEF , BDF , CDE tiene perímetro no mas que DEF .

PROBLEMA Nº 3

Prueba de selección para IMO
2000 Brasil

Sean CC' , BB' alturas del triángulo ABC , suponga $AB \neq AC$. Sea M punto medio de \overline{BC} , H ortocentro del triángulo ABC y D la intersección de \overline{BC} y $\overline{B'C'}$. Demostrar $\overline{DH} \perp \overline{AM}$.

PROBLEMA Nº 4

38° Olimpiada Internacional - Mar de Plata 1 997

Se da un ángulo de vértice M y un punto B , una circunferencia arbitraria que pasa por M y B interseca a los lados del ángulo en los puntos C y D (distintos de M). Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos MCD .

PROBLEMA Nº 5

Dado un triángulo no degenerado ABC , O es su circuncentro, H su ortocentro y R su circunradio.

Demostrar : $OH < 3R$

PROBLEMA Nº 6

17° Olimpiada Brasil - 1 995

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo al mismo tiempo inscriptible y circunscriptible, sean I su incentro, O su circuncentro y S el punto de intersección de las diagonales. Demostrar que si dos puntos I , O y S coinciden entonces $ABCD$ es un cuadrado.

PROBLEMA Nº 7

**2° Olimpiada de matemática de
Centroamérica y el Caribe - El Salvador
2 000**

Sea ABCDE un pentágono convexo sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE respectivamente. Demostrar que PQRS es un paralelogramo y que el área de su región es $\frac{2}{9}$ del área de ABCD.

PROBLEMA Nº 8

**16° Olimpiada de Matemática de los
países balcanicos - Macedonia - 1 999**

Dado un triángulo acutángulo, sea D el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, que no contiene A, sean E el simétrico de D con respecto a las rectas BC y F simétrico de D con respecto al circuncentro O. Finalmente sea K el punto medio del segmento EA. Probar que la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo ABC, también pasa por K y a su vez demostrar que la recta que pasa por K y el punto medio del segmento BC es perpendicular a la recta AF.

PROBLEMA Nº 9

**12° Olimpiada Iberoamericana de
Matemáticas - México 1 997**

En un triángulo ABC sean AE y BF dos alturas, y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto a la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto a la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersectan en O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N respectivamente. Sean P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S, la intersección de HR con OP. Demostrar que AHSO es un paralelogramo.

PROBLEMA Nº 10

39° IMO 1 998

Sea I el incentro del triángulo ABC. La circunferencia inscrita de ABC toca a los lados BC, CA y AB en K, L y M respectivamente. La línea que pasa por B y que es paralela a MK interseca a las líneas LM y LK en R y S respectivamente. pruebe que el ángulo RIS es agudo.



CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. B	9. C	17. D	25. E	33. A	41. D	49. E
2. C	10. A	18. C	26. B	34. A	42. C	50. E
3. D	11. D	19. A	27. A	35. C	43. A	
4. D	12. B	20. B	28. D	36. A	44. E	
5. A	13. C	21. C	29. E	37. D	45. B	
6. C	14. A	22. D	30. A	38. B	46. D	
7. D	15. E	23. C	31. C	39. E	47. D	
8. B	16. B	24. A	32. E	40. A	48. B	

CEPRE-UNI

51. C	58. E	65. C	72. C	79. E	86. D	93. C
52. D	59. B	66. E	73. C	80. D	87. E	
53. C	60. C	67. D	74. E	81. C	88. D	
54. C	61. D	68. C	75. B	82. B	89. C	
55. B	62. B	69. B	76. A	83. A	90. A	
56. C	63. C	70. A	77. D	84. D	91. E	
57. E	64. C	71. A	78. C	85. B	92. D	

SEMESTRAL

94. A	102. A	110. E	118. D	126. D	134. C	142. E
95. D	103. A	111. C	119. B	127. D	135. C	143. D
96. B	104. C	112. A	120. C	128. E	136. A	
97. C	105. D	113. A	121. A	129. B	137. D	
98. C	106. A	114. B	122. E	130. C	138. B	
99. E	107. B	115. A	123. D	131. B	139. A	
100. A	108. C	116. C	124. B	132. D	140. B	
101. C	109. C	117. E	125. E	133. C	141. C	

SEMESTRAL INTENSIVO

144. A	150. E	156. C	162. C	168. B	174. D	180. D
145. C	151. B	157. D	163. B	169. D	175. E	181. E
146. B	152. D	158. E	164. C	170. B	176. B	182. D
147. E	153. C	159. A	165. D	171. E	177. A	183. C
148. A	154. E	160. C	166. A	172. A	178. D	
149. D	155. B	161. A	167. E	173. C	179. E	

REPASO

184. A	190. A	196. D	202. A	208. D	214. B	220. B
185. B	191. E	197. C	203. E	209. A	215. B	
186. C	192. A	198. C	204. D	210. C	216. E	
187. D	193. B	199. E	205. C	211. B	217. E	
188. B	194. A	200. D	206. A	212. C	218. A	
189. C	195. C	201. D	207. D	213. A	219. E	

Bibliografía

- Olivera Diaz, Carlos Geometría Plana
- Pogorelov, A.V. (1974) Geometría elemental,
Editorial MIR Moscú
- Shariguin, 9 (1989) Problemas de Geometría. Planimetría
Editorial MIR. Moscú
- Puig Adam, Pedro (1961) Curso de Geometría Métrica. Tomo I
Nuevas gráficas S.A. Madrid
- Levi S. Skively (1961) Introducción a la Geometría Moderna
Compañía Editorial Continental S.A. México
- Golovina L.G. -Yaglom G.M (1976) Inducción en la Geometría.
Editorial MIR Moscú
- Coxeter - H.S.M (1971) Fundamentos de Geometría
Editorial Limusa - Wiley - S.A.
- Francisco de la Borbolla y Monterrubio Geometría Analítica y Cálculo
Luis de la Borbolla y Monterrubio
(1966) Editorial Limusa - Wiley - S.A.
- Vila, Antonio (1968) 40 temas de Matemáticas para Preuniversita-
rio. Editorial Vines - Vives - Barcelona
- Miguel de Guzman (2002) Experiencias del Descubrimiento en Geometría
Universidad Complutense de Madrid
- Organización de los Estados Ibero- 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáti-
cas. Fotojae, S.A. Madrid.
americanos para la Educación, la
ciencia y la cultura (1996)
- Material Bibliográfico de Diferentes
Instituciones Preuniversitarias
- Material Bibliográfico del Centro Pre
de la Universidad Nacional de Ingeniería (Exámenes, Prácticas, Seminarios)

Páginas web consultadas:

- <http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>
- <http://xtec.cat/~qcastell/ttwesp/novedades.html>
- www.arraki.es/~mcj/sangaku02.htm
- www.ctv.es/users/pacoga/bella/htm/
- <http://www.personal.vs.es/rbarroso/triánguloscabril/>
- <http://www.oei.es/>